

УДК 519.6

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ХАРАКТЕРА ТЕЧЕНИЯ В ЗОНЕ ОТРАЖЕННОЙ ОТ КОНТАКТНОЙ ГРАНИЦЫ ЦЕНТРИРОВАННОЙ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ

Д. Н. Боков
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Представлены расчеты задач о взаимодействии волны разрежения с жесткой стенкой и контактном разрывом. Рассматриваются задачи, имеющие аналитические решения. Приводятся относительные погрешности численного решения.

Точность расчета взаимодействия волны разрежения с контактном разрывом имеет принципиальное значение, так как погрешности расчета параметров течения на контактном разрыве становятся возмущениями параметров течения в прошедшей и отраженной волнах и переносятся ими как вперед, так и назад по потоку.

Случай, когда параметры уравнений состояния слева и справа от контактного разрыва одинаковы, хорошо изучен и описан в литературе, поэтому этот вариант будет рассмотрен как тестовый. Для случая, когда параметры уравнений состояния слева и справа от контактного разрыва различны, формулируются критерии смены типа отраженной волны.

Введение

В работе рассматривается решение системы одномерных уравнений газовой динамики для плоской симметрии без источников и внешних сил с уравнением состояния (УРСом) совершенного газа. Для случая кусочно-постоянной энтропии в начальных данных все многообразие газодинамических течений определяется:

- эволюцией зон постоянного течения, волн сжатия (ВС) и волн разрежения (ВР), описываемых семействами характеристик $\lambda^1 = u - c$ и $\lambda^3 = u + c$;
- их взаимодействием между собой и с сильными разрывами (ударные волны (УВ) и контактные границы (КГ));
- граничными условиями.

ВС и ВР в одном и том же семействе характеристик примыкают друг к другу либо гладко, либо через слабый разрыв. Время существования гладкой ВС конечно, оно ограничено моментом пересечения характеристик одного семейства с образованием УВ.

КГ — это сильный разрыв в семействе характеристик $\lambda^2 = u$, на котором выполняются условия равенства давлений и скоростей по обе стороны разрыва. Значения остальных газодинамических величин могут претерпевать разрыв. Параметры УРСов $P = (\gamma_i - 1) \rho \varepsilon$, $\gamma_i = \text{const} > 1$, $i = 1, 2$, по разные стороны КГ могут различаться. Целью настоящей работы является тестирование алгоритма расчета КГ, реализованного в методике МХС [1].

Методика МХС реализует метод характеристических направлений для решения системы уравнений газовой динамики с произвольным выпуклым УРСом. Численное решение определяется на заданный момент времени t на трех независимых сеточных множествах, соответствующих семействам характеристик $\lambda^1 = u - c$, $\lambda^2 = u$ и $\lambda^3 = u + c$. Такое разбиение на сеточные множества позволяет разработать алгоритмы:

- отслеживания эволюции слабых и сильных разрывов (УВ и КГ);
- определения места и времени образования УВ в ВС.

Представленные алгоритмы позволяют детально описать взаимодействие элементов течения.

В работе рассмотрена задача о взаимодействии централизованной ВР (ЦВР) с КГ. При прохождении переднего фронта ВР через КГ, разделяющую две области (слева и справа от нее), происходит расщепление ВР. В правой области формируется *прошедшая* волна (в том же семействе характеристик, что и *падающая*), а в левой области формируется *отраженная* волна (в противоположном семействе характеристик). Таким образом, в левой области образуется зона взаимодействия падающей и отраженной волн. Именно эта область взаимодействия и будет предметом исследования, представленного в статье.

Точность расчета взаимодействия ВР с контактным разрывом имеет принципиальное значение, так как погрешности расчета параметров течения на контактном разрыве становятся возмущениями параметров течения в преломленной и отраженной волнах и переносятся ими как вперед, так и назад по потоку.

Случай, когда параметры УРСов слева и справа от КГ одинаковы, хорошо изучен и описан в литературе [2, 3], поэтому этот вариант будет рассмотрен как тестовый.

Прежде чем рассматривать вопрос о взаимодействии ВР с КГ с различными параметрами УРСа, будут представлены расчеты, подтверждающие корректность (правильность) расчета:

- эволюции ВР;
- взаимодействия ВР с граничными условиями;
- взаимодействия ВР с "фиктивной" КГ (нет разрывов в газодинамических величинах — аналог лагранжевой точки);
- взаимодействия ВР с КГ в случае одинаковых параметров УРСа.

В связи с тем, что аналитические решения существуют только для ЦВР, в дальнейшем будет рассматриваться именно такая ВР.

В качестве теста на проверку правильности расчета взаимодействия ЦВР с границами (отражение от *жесткой стенки*) рассматриваются две задачи [2, с. 190], постановки которых приведены в табл. 1. В тесте 1.1 реализуется дозвуковой разлет (скорость на границе меньше скорости звука), в тесте 1.2 — сверхзвуковой разлет (скорость на границе больше скорости звука).

КГ образована двумя различными веществами. Для веществ варьировались параметры γ (показатель степени адиабаты Пуассона), ρ (плотность) и ε (внутренняя энергия). Табл. 2 представляет собой сводную таблицу постановок тестовых задач.

Таблица 1

Постановки тестов

Номер теста	Начальные данные	Правое граничное условие	$t_{\text{кон}}$
1.1	$P = (\gamma - 1) \rho \varepsilon; \quad x \in [-1, 0]; \quad U_{\text{лев}}(t) = 0; \quad \gamma_1 = 1,4$	$U_{\text{прав}}(t) = 0,5$	2,8
1.2	$\rho^0(x) = 1,4; \quad U^0(x) = 0; \quad \varepsilon^0(x) = 1,7857142857$	$U_{\text{прав}}(t) = 1,5$	42

Таблица 2

Параметры постановок тестовых задач

Номер теста	$P = (\gamma - 1) \rho \varepsilon; \quad U^0(x) = 0; \quad P_{\text{лев}}(t) = 0,001; \quad U_{\text{прав}}(t) = 0$						X	$t_{\text{кон}}$
	Область 1: $x \in [0, 0,1]$			Область 2: $x \in [0,1; X]$				
2.1	$\gamma_1 = 1,1;$	$\rho_1 = 1;$	$\varepsilon_1 = 10$	$\gamma_2 = 1,1;$	$\rho_2 = 1;$	$\varepsilon_2 = 10$	100	75
2.2	$\gamma_1 = 3;$	$\rho_1 = 1;$	$\varepsilon_1 = 0,5$	$\gamma_2 = 3;$	$\rho_2 = 1;$	$\varepsilon_2 = 0,5$	12	6

Параметры постановок тестовых задач

Номер теста	$P = (\gamma - 1) \rho \varepsilon; U^0(x) = 0; P_{лев}(t) = 0,001; U_{прав}(t) = 0$						X	$t_{кон}$
	Область 1: $x \in [0; 0,1]$			Область 2: $x \in [0,1; X]$				
2.3	$\gamma_1 = 11;$	$\rho_1 = 1;$	$\varepsilon_1 = 0,1$	$\gamma_2 = 11$	$\rho_2 = 1;$	$\varepsilon_2 = 0,1$	5	1,5
3.1	$\gamma_1 = 11;$	$\rho_1 = 1;$	$\varepsilon_1 = 0,1$	$\gamma_2 = 11$	$\rho_2 = 5;$	$\varepsilon_2 = 0,02$	5	0,35
3.2	$\gamma_1 = 11;$	$\rho_1 = 5;$	$\varepsilon_1 = 0,02$	$\gamma_2 = 11$	$\rho_2 = 1;$	$\varepsilon_2 = 0,1$	5	0,35
3.3	$\gamma_1 = 3;$	$\rho_1 = 1;$	$\varepsilon_1 = 0,5$	$\gamma_2 = 3$	$\rho_2 = 5;$	$\varepsilon_2 = 0,1$	5	1
3.4	$\gamma_1 = 3;$	$\rho_1 = 5;$	$\varepsilon_1 = 0,1$	$\gamma_2 = 3$	$\rho_2 = 1;$	$\varepsilon_2 = 0,5$	5	1
3.5	$\gamma_1 = 1,1;$	$\rho_1 = 1;$	$\varepsilon_1 = 10$	$\gamma_2 = 1,1$	$\rho_2 = 5;$	$\varepsilon_2 = 2$	5	5
3.6	$\gamma_1 = 1,1;$	$\rho_1 = 5;$	$\varepsilon_1 = 2$	$\gamma_2 = 1,1$	$\rho_2 = 1;$	$\varepsilon_2 = 10$	5	5
4.1	$\gamma_1 = 11;$	$\rho_1 = 1;$	$\varepsilon_1 = 0,1$	$\gamma_2 = 1,1$	$\rho_2 = 20;$	$\varepsilon_2 = 0,5$	1	1
4.2	$\gamma_1 = 11;$	$\rho_1 = 1;$	$\varepsilon_1 = 0,1$	$\gamma_2 = 1,1$	$\rho_2 = 10;$	$\varepsilon_2 = 1$	1	1
4.3	$\gamma_1 = 11;$	$\rho_1 = 1;$	$\varepsilon_1 = 0,1$	$\gamma_2 = 1,1$	$\rho_2 = 1;$	$\varepsilon_2 = 10$	1	1
5.1	$\gamma_1 = 1,1;$	$\rho_1 = 1;$	$\varepsilon_1 = 10$	$\gamma_2 = 11$	$\rho_2 = 0,25;$	$\varepsilon_2 = 0,4$	30	5
5.2	$\gamma_1 = 1,1;$	$\rho_1 = 1;$	$\varepsilon_1 = 10$	$\gamma_2 = 11$	$\rho_2 = 0,1;$	$\varepsilon_2 = 1$	30	5
5.3	$\gamma_1 = 1,1;$	$\rho_1 = 1;$	$\varepsilon_1 = 10$	$\gamma_2 = 11$	$\rho_2 = 0,04;$	$\varepsilon_2 = 2,5$	30	5

Координата правой границы выбирается таким образом, чтобы отраженная от этой границы волна не влияла на решение вблизи КГ. Расчет проводится либо до конечного времени $t_{кон}$, либо до момента образования УВ в ВС, отраженной от КГ.

Отражение от жесткой стенки

Тест 1.1. Дозвуковой режим течения.

Описание сетки. В начальный момент времени используются две точки семейства λ^2 для описания границ области. В результате расчета распада разрыва в правом граничном условии рассчитывается веер ЦВР, содержащий 105 точек семейства λ^1 . Именно эти точки и формируют расчетную сетку при объединении с точками семейства λ^2 . Так как в момент постановки веера зона, занимаемая точками, мала ($\Delta x \approx 10^{-9}$), то временной шаг мал. В процессе движения зона, занимаемая веером, увеличивается (по пространству) и временной шаг увеличивается ("разгоняется").

На рис. 1 приведена (x, t) -диаграмма границ и фронтов ВР, а также положение контрольных точек расчета. Используются следующие обозначения:

1 — левая граница; 2 — правая граница; - - - — передний фронт ВР; — — задний фронт ВР;

A — выход переднего фронта падающей волны на жесткую стенку;

B — встреча переднего фронта отраженной волны с задним фронтом падающей волны;

C — выход заднего фронта падающей волны на жесткую стенку;

D — выход переднего фронта отраженной волны на жесткий поршень;

OA — интервал существования ЦВР, движущейся влево от жесткого поршня (падающей ЦВР);

AB, BC — интервалы взаимодействия падающей и отраженной волн;

BD — интервал существования отраженной волны, передний фронт которой движется по зоне постоянного течения, образовавшейся между жестким поршнем и падающей ЦВР;

CD — интервал существования только отраженной ВР.

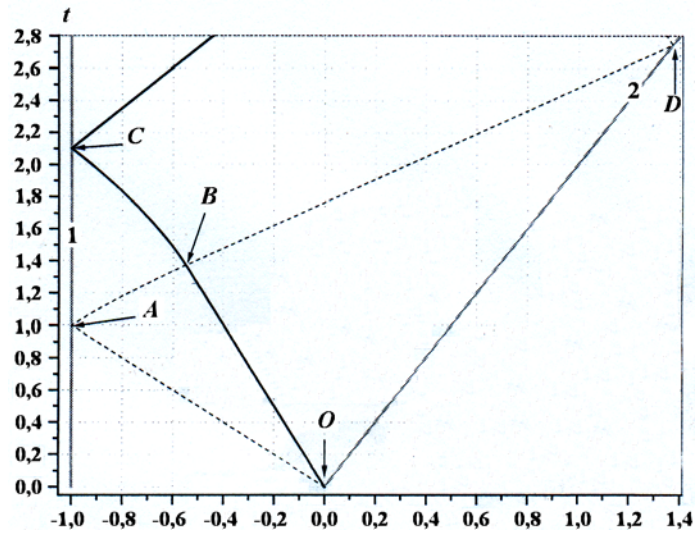


Рис. 1. Тест 1.1. (x, t) -диаграмма границ и фронтов ВР

Точка А. В этот момент времени вся сетка (за исключением границ области) состоит из точек семейства λ^1 . В зоне между задним фронтом падающей волны и правой границей точек нет.

Точка В. Сетка (за исключением границ области) состоит из 56 точек семейства λ^1 в падающей волне и 49 точек семейства λ^3 в отраженной волне. Суммарно — 105 точек. Каждая характеристика семейства λ^1 отражается от левой границы в виде характеристики семейства λ^3 . Характеристика λ^3 "отходит" от границы с разгоном временного шага. В зоне между точкой встречи заднего фронта падающей волны с передним фронтом отраженной волны и правой границей точек нет.

Точка С. Вся сетка (за исключением границ области) состоит из точек семейства λ^3 (105 точек). В зоне между передним фронтом отраженной волны и правой границей точек нет.

Точка D. Вся сетка (за исключением границ области) состоит из точек семейства λ^3 . В зоне между задним фронтом отраженной волны и левой границей точек нет.

В работе [2, с. 169] даны аналитические формулы, связывающие значения времени и давлений на жесткой стенке и на фронте отраженной волны. Для условий проведенных расчетов (см. табл. 1) эти формулы имеют следующий вид:

– для жесткой стенки

$$t = \frac{1}{8} \left[3 \left(\frac{1}{P_r} \right)^{1/7} + 2 \left(\frac{1}{P_r} \right)^{3/7} + 3 \left(\frac{1}{P_r} \right)^{5/7} \right],$$

где P_r — давление на левой границе;

– для фронта

$$t = \left(\frac{1}{P_\Phi} \right)^{3/7},$$

где P_Φ — давление на фронте отраженной волны.

Сравнение аналитического и численного решений в контрольных точках приведено в табл. 3 (см. [2, с. 193]).

Таблица 3

Сравнение аналитического и численного решений

Точка	Аналитические значения	Численные значения	Относительная ошибка, %	Число точек	Кол-во шагов
A	$t = 1$	$t = 0,99999998$	$\delta_t = +2,0 \cdot 10^{-6}$	107	5 661
B	$t = 1,371742;$ $x = -0,5486968;$ $P = 0,4782969$	$t = 1,372013699;$ $x = -0,548791766;$ $P = 0,478290891$	$\delta_t = -1,98 \cdot 10^{-2};$ $\delta_x = -1,73 \cdot 10^{-2};$ $\delta_P = +1,25 \cdot 10^{-3}$	107	6 824
C	$P = 0,2097152;$ $t = 2,10144043$	$P = 0,20970901;$ $t = 2,1026982$	$\delta_P = +2,95 \cdot 10^{-3};$ $\delta_t = +5,98 \cdot 10^{-2}$	107	8 205
D	$t = 2,7434841;$ $x = 1,371742;$ $P = 0,4782969$	$t = 2,74400859;$ $x = 1,372004296;$ $P = 0,47829732$	$\delta_t = -1,91 \cdot 10^{-2};$ $\delta_x = -1,91 \cdot 10^{-2};$ $\delta_P = -8,78 \cdot 10^{-5}$	107	8 298

Тест 1.2. Сверхзвуковой режим течения.

Описание сетки. В начальный момент времени используются две точки семейства λ^2 для описания границ области. В результате расчета распада разрыва в правом граничном условии рассчитывается веер ЦВР, содержащий 201 точку семейства λ^1 . Именно эти точки и формируют расчетную сетку при объединении с точками семейства λ^2 . Так как в момент постановки веера зона, занимаемая точками, мала, то временной шаг мал. В процессе движения зона, занимаемая веером, увеличивается (по пространству) и временной шаг увеличивается (разгоняется).

На рис. 2 приведена (x, t) -диаграмма границ и фронтов ВР, а также положение контрольных точек расчета. Буквенные обозначения на рис. 2 и аналитические формулы для давлений на границе и фронте отраженной волны соответствуют указанным для теста 1.1.

Точка А. В этот момент времени вся сетка (за исключением границ области) состоит из точек семейства λ^1 . В зоне между задним фронтом падающей волны и правой границей точек нет.

Точка В. Сетка (за исключением границ области) состоит из 120 точек семейства λ^1 в падающей волне и 81 точки семейства λ^3 в отраженной волне. Суммарно — 201 точка. Каждая характеристика семейства λ^1 отражается от левой границы в виде характеристики семейства λ^3 . Характеристика λ^3 отходит от границы с разгоном временного шага. В зоне между точкой встречи заднего фронта падающей волны с передним фронтом отраженной волны и правой границей точек нет.

Точка D. Сетка (за исключением границ области) состоит из 83 точек семейства λ^1 в падающей волне и 118 точек семейства λ^3 в отраженной волне. Суммарно — 201 точка. Каждая характеристика семейства λ^1 отражается от левой границы в виде характеристики семейства λ^3 . Характеристика λ^3 отходит от границы с разгоном временного шага. Каждая характеристика семейства λ^3 отражается от правой границы как характеристика семейства λ^1 . Характеристика λ^1 отходит от границы с разгоном временного шага. Зоны постоянного течения отсутствуют.

Точка С. Сетка (за исключением границ области) состоит из 77 точек семейства λ^1 и 124 точек семейства λ^3 .

Сравнение аналитического и численного решений в контрольных точках приведено в табл. 4 (см. [2, с. 193]).

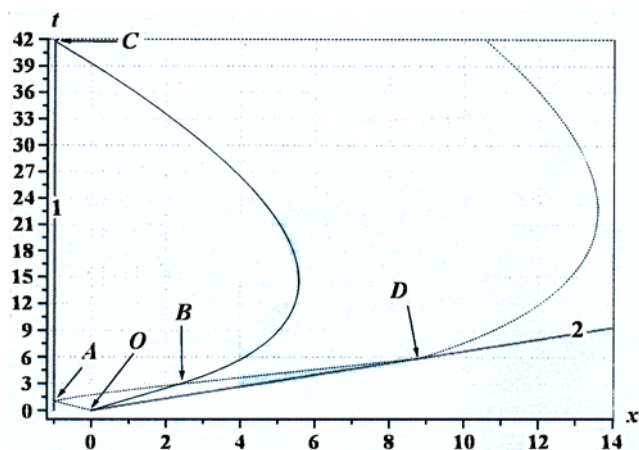


Рис. 2. Тест 1.2. (x, t) -диаграмма границ и фронтов ВР

Таблица 4

Сравнение аналитического и численного решений

Точка	Аналитические значения	Численные значения	Относительная ошибка, %	Число точек	Кол-во шагов
A	$t = 1$	$t = 0,99999997$	$\delta_t = +3,0 \cdot 10^{-6}$	203	3 320
B	$t = 2,915452;$ $x = 2,33236151;$ $P = 8,23543 \cdot 10^{-2}$	$t = 2,919065223;$ $x = 2,335333871;$ $P = 8,23512252 \cdot 10^{-2}$	$\delta_t = -1,16 \cdot 10^{-3};$ $\delta_x = -1,27 \cdot 10^{-1};$ $\delta_P = +3,73 \cdot 10^{-3}$	203	5 366
D	$t = 5,83090379;$ $x = 8,74635569;$ $P = 8,23543 \cdot 10^{-2}$	$t = 5,83798493;$ $x = 8,75697739;$ $P = 8,235516 \cdot 10^{-2}$	$\delta_t = -1,21 \cdot 10^{-1};$ $\delta_x = -1,21 \cdot 10^{-1};$ $\delta_P = -1,04 \cdot 10^{-3}$	203	6 416
C	$P = 1,6384 \cdot 10^{-3};$ $t = 41,464843$	$P = 1,6381385 \cdot 10^{-3};$ $t = 41,766425$	$\delta_P = +1,59 \cdot 10^{-2};$ $\delta_t = +7,22 \cdot 10^{-1}$	203	10 802

Расчет фиктивной КГ. Тесты 2.1—2.3

Рассматривается *фиктивная* КГ. Эта ситуация возникает, когда в однородной физической области ставится *математическая* граница для разбиения на подобласти. Целью проведения данных расчетов являлась проверка отсутствия эффекта *ложного отражения*. Так как значения параметров в любой точке ЦВР определяются по значениям, приходящим изнутри веера, то к моменту выхода заднего фронта ЦВР на КГ все эффекты ложного отражения накопятся и повлияют на значения параметров как в точках прошедшей ЦВР, так и в точках зоны взаимодействия падающей и отраженной волн. Источником возможных эффектов является алгоритм расчета параметров течения на КГ. Система шести нелинейных уравнений для определения параметров течения на КГ в случае

фиктивной КГ вырождается до системы трех независимых уравнений [1]. В рассмотренных тестах проверяется сохранение автомодельности ЦВР. Для сравнения выбраны три точки, принадлежащие:

- 1) заднему фронту ЦВР;
- 2) зоне сверхзвукового течения;
- 3) зоне дозвукового течения.

Сетка характеристик строится по алгоритмам, описанным для тестов 1.1 и 1.2. Так как перепад плотности на КГ отсутствует, то характеристики "проходят" через КГ без отражения. Число точек семейства λ^3 в каждом из тестов равно 601, количество точек семейства λ^2 для описания областей равно 4 (по две точки на область). Всего в сетке 605 точек.

Рассматриваются два момента времени t_1 и t_2 , первый из которых соответствует нахождению ЦВР целиком в первой области, а второй — нахождению ЦВР целиком во второй области. Сравняются значения параметров течения в контрольных точках (вдоль соответствующих характеристик) на оба момента времени. Для тестирования выбраны три значения γ — показателя степени адиабаты Пуассона. Результаты представлены в табл. 5—7, где δ — относительная ошибка (в %).

Приведенные результаты расчетов показывают сохранение автомодельности ЦВР при прохождении через фиктивную КГ с относительной погрешностью не более 0,05 %.

Таблица 5

Относительная ошибка для теста 2.1 ($\gamma = 1,1$)

Точка	$t_1 = 0,09132483$	$t_2 = 75$	δ
1 (задний фронт ЦВР)	$\rho = 1,873766 \cdot 10^{-3};$	$\rho = 1,8737787 \cdot 10^{-3};$	$\rho = -6,777 \cdot 10^{-4};$
	$u = -5,65250221;$	$u = -5,652512934;$	$u = -1,897 \cdot 10^{-4};$
	$\varepsilon = 5,336667003;$	$\varepsilon = 5,3366930571;$	$\varepsilon = -4,891 \cdot 10^{-4};$
	$P = 9,999667 \cdot 10^{-4}$	$P = 9,9997821 \cdot 10^{-4}$	$P = -1,151 \cdot 10^{-3}$
2 (сверхзвуковая зона)	$\rho = 1,504056 \cdot 10^{-2};$	$\rho = 1,504062 \cdot 10^{-2};$	$\rho = -3,989 \cdot 10^{-4};$
	$u = -3,9706527;$	$u = -3,97066046;$	$u = -1,954 \cdot 10^{-4};$
	$\varepsilon = 6,57242183;$	$\varepsilon = 6,572433462;$	$\varepsilon = -1,771 \cdot 10^{-4};$
	$P = 9,885288 \cdot 10^{-3}$	$P = 9,88535 \cdot 10^{-3}$	$P = -6,272 \cdot 10^{-4}$
3 (дозвуковая зона)	$\rho = 5,863771 \cdot 10^{-1};$	$\rho = 5,863764 \cdot 10^{-1};$	$\rho = 1,193 \cdot 10^{-4};$
	$u = -5,52438 \cdot 10^{-1};$	$u = -5,524411 \cdot 10^{-1};$	$u = -5,611 \cdot 10^{-4};$
	$\varepsilon = 9,48020171;$	$\varepsilon = 9,480202045;$	$\varepsilon = -3,533 \cdot 10^{-6};$
	$P = 5,558973 \cdot 10^{-1}$	$P = 5,558967 \cdot 10^{-1}$	$P = 0,593 \cdot 10^{-4}$
Количество шагов	2 800	18 063	—

Таблица 6

Относительная ошибка для теста 2.2 ($\gamma = 3$)

Точка	$t_1 = 0,056563656$	$t_2 = 6$	δ
1 (задний фронт ЦВР)	$\rho = 1,000035 \cdot 10^{-1};$	$\rho = 1,000003 \cdot 10^{-1};$	$\rho = 3,2 \cdot 10^{-3};$
	$u = -1,55885548;$	$u = -1,55885122;$	$u = 2,73 \cdot 10^{-4};$
	$\varepsilon = 5,000266 \cdot 10^{-3};$	$\varepsilon = 5,000002 \cdot 10^{-3};$	$\varepsilon = 5,28 \cdot 10^{-3};$
	$P = 1,000088 \cdot 10^{-3}$	$P = 1,000004 \cdot 10^{-3}$	$P = 8,40 \cdot 10^{-3}$
2 (сверхзвуковая зона)	$\rho = 2,146201 \cdot 10^{-1};$	$\rho = 2,146168 \cdot 10^{-1};$	$\rho = 1,54 \cdot 10^{-3};$
	$u = -1,36033269;$	$u = -1,36032926;$	$u = 2,53 \cdot 10^{-4};$
	$\varepsilon = 2,303061 \cdot 10^{-2};$	$\varepsilon = 2,303008 \cdot 10^{-2};$	$\varepsilon = 2,30 \cdot 10^{-3};$
	$P = 9,885660 \cdot 10^{-3}$	$P = 9,885285 \cdot 10^{-3}$	$P = 3,80 \cdot 10^{-3}$
3 (дозвуковая зона)	$\rho = 8,222329 \cdot 10^{-1};$	$\rho = 8,222308 \cdot 10^{-1};$	$\rho = 2,55 \cdot 10^{-4};$
	$u = -3,079054 \cdot 10^{-1};$	$u = -3,079070 \cdot 10^{-1};$	$u = -5,2 \cdot 10^{-4};$
	$\varepsilon = 3,3803301 \cdot 10^{-1};$	$\varepsilon = 3,3803150 \cdot 10^{-1};$	$\varepsilon = 4,47 \cdot 10^{-4};$
	$P = 5,5588373 \cdot 10^{-1}$	$P = 5,5587981 \cdot 10^{-1}$	$P = 7,05 \cdot 10^{-4}$
Количество шагов	3 800	17 437	—

Относительная ошибка для теста 2.3 ($\gamma = 11$)

Точка	$t_1 = 0,02314501$	$t_2 = 1,5$	δ
1 (задний фронт ЦВР)	$\rho = 5,3367473 \cdot 10^{-1};$ $u = -6,346127 \cdot 10^{-1};$ $\varepsilon = 1,8739510 \cdot 10^{-4};$ $P = 1,0000803 \cdot 10^{-3}$	$\rho = 5,3367131 \cdot 10^{-1};$ $u = -6,346119 \cdot 10^{-1};$ $\varepsilon = 1,8738478 \cdot 10^{-4};$ $P = 1,0000188 \cdot 10^{-3}$	$\rho = 6,41 \cdot 10^{-4};$ $u = 1,26 \cdot 10^{-4};$ $\varepsilon = 5,51 \cdot 10^{-3};$ $P = 6,15 \cdot 10^{-3}$
2 (сверхзвуковая зона)	$\rho = 6,5724661 \cdot 10^{-1};$ $u = -5,819758 \cdot 10^{-1};$ $\varepsilon = 1,5041048 \cdot 10^{-3};$ $P = 9,8856781 \cdot 10^{-3}$	$\rho = 6,5724489 \cdot 10^{-1};$ $u = -5,819752 \cdot 10^{-1};$ $\varepsilon = 1,5040763 \cdot 10^{-3};$ $P = 9,8854650 \cdot 10^{-3}$	$\rho = 2,62 \cdot 10^{-4};$ $u = 1,03 \cdot 10^{-4};$ $\varepsilon = 1,89 \cdot 10^{-3};$ $P = 2,15 \cdot 10^{-3}$
3 (дозвуковая зона)	$\rho = 9,4802029 \cdot 10^{-1};$ $u = -1,553835 \cdot 10^{-1};$ $\varepsilon = 5,8637525 \cdot 10^{-2};$ $P = 5,5589563 \cdot 10^{-1}$	$\rho = 9,4802003 \cdot 10^{-1};$ $u = -1,553840 \cdot 10^{-1};$ $\varepsilon = 5,8637398 \cdot 10^{-2};$ $P = 5,5589428 \cdot 10^{-1}$	$\rho = 2,74 \cdot 10^{-5};$ $u = -3,22 \cdot 10^{-4};$ $\varepsilon = 2,16 \cdot 10^{-4};$ $P = 2,43 \cdot 10^{-4}$
Количество шагов	4 300	16 931	—

Расчет отражения ВР от КГ в случае $\gamma_1 = \gamma_2$. Тесты 3.1—3.6

Результаты расчета данной серии из трех парных тестов (3.1, 3.2; 3.3, 3.4; 3.5, 3.6) представлены для иллюстрации взаимодействия ЦВР с КГ. В каждой паре тестов в областях рассматриваются одинаковые показатели степени адиабаты и различные значения плотностей, соответствующие случаям, когда ЦВР движется:

- из более легкого в более тяжелое вещество;
- из более тяжелого в более легкое вещество.

Расчеты полностью согласуются с положениями, изложенными в работе [3]: "...от более плотной среды ($\rho_2^0 > \rho_1^0$) волна разрежения отражается в виде волны разрежения и, наоборот, от менее плотной среды ($\rho_2^0 < \rho_1^0$) волна разрежения отражается волной сжатия".

Значения параметров решения, полученные на КГ, будут определять значения параметров как в зоне преломленной (прошедшей) ВР (в области 2), так и в зоне взаимодействия падающей и отраженной волн (в области 1).

На рис. 3—8 представлены профили плотности, скорости, давления и внутренней энергии для левой области либо на момент времени образования УВ, либо на момент, близкий к моменту выхода фронта отраженной ВР на левую границу.

Для более детального описания картины течения вводятся следующие контрольные точки:

- A — левая граница;
- B — передний фронт отраженной волны;
- C — задний фронт падающей волны;
- D — КГ.

При этом:

- AB/AC — зона постоянного течения, примыкающая к левой границе;
- BC — зона отраженной волны между ее передним фронтом и задним фронтом падающей ЦВР;
- CB — зона падающей ЦВР между ее задним фронтом и передним фронтом отраженной волны;
- CD/BD — зона взаимодействия падающей ЦВР и отраженной волны.

Контрольным параметром для представленных тестов является скорость КГ ($U_{КГ}$), которая для случая $\gamma_1 = \gamma_2 = 3$ [3] определяется соотношением

$$U_{КГ} = \frac{c_2^0 (X_{КГ} - c_1^0 t)}{c_2^0 + c_1^0} t.$$

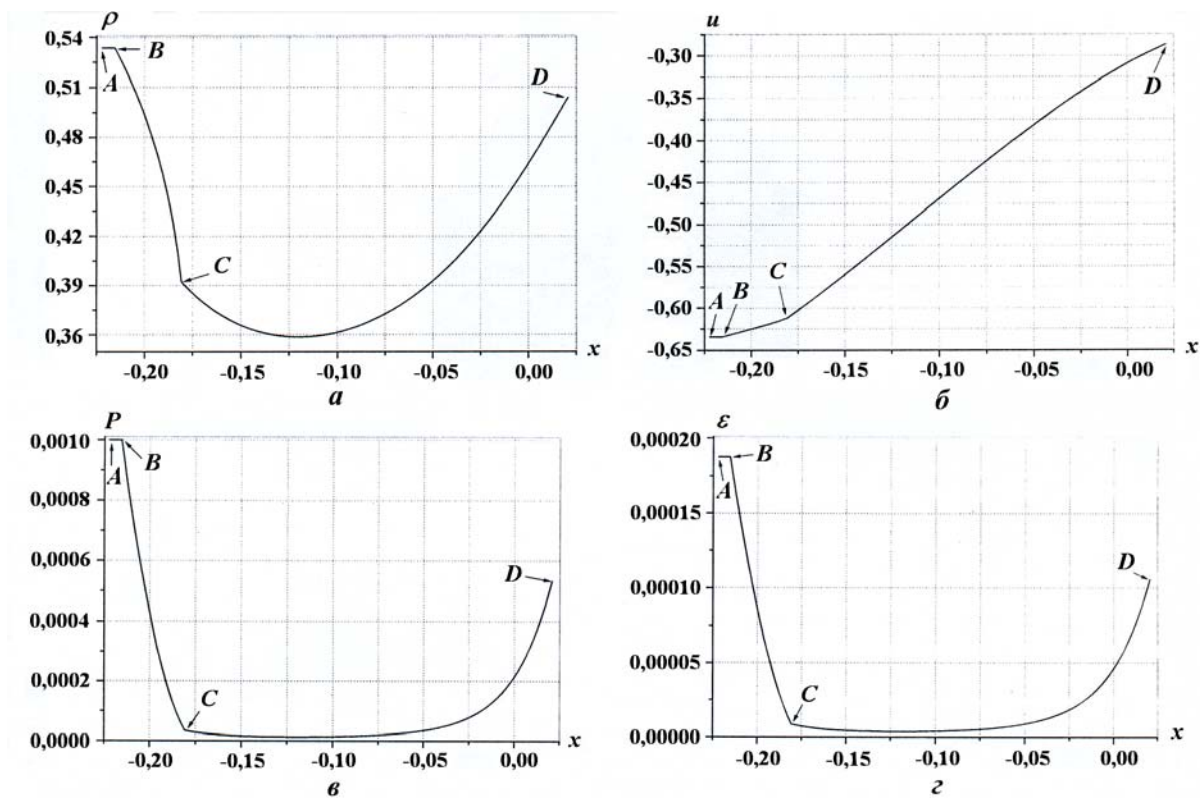


Рис. 3. Тест 3.1. Отражение в виде ВР, $\gamma_1 = \gamma_2 = 11$; $t = 0,35$: a — плотность; b — скорость; v — давление; z — внутренняя энергия

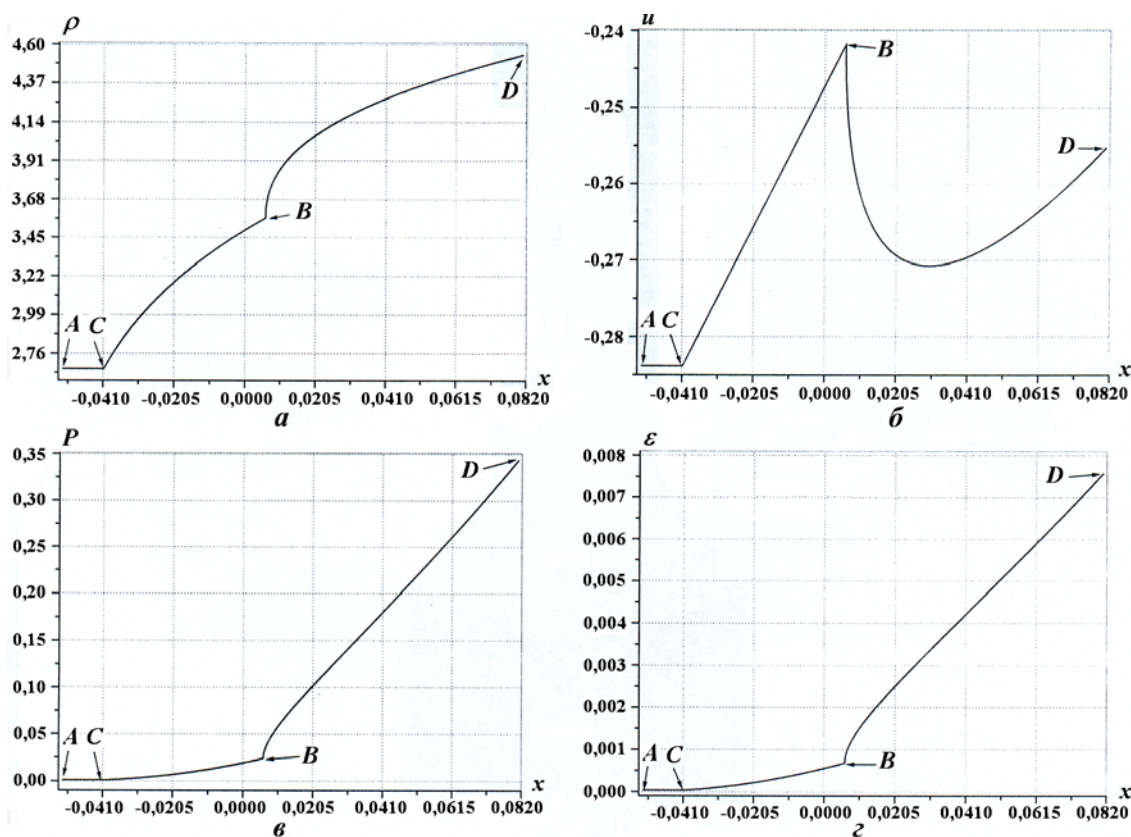


Рис. 4. Тест 3.2. Отражение в виде ВС, $\gamma_1 = \gamma_2 = 11$. Образование УВ на переднем фронте отраженной ВС (точка B), $t = 0,18557$: a — плотность; b — скорость; v — давление; z — внутренняя энергия

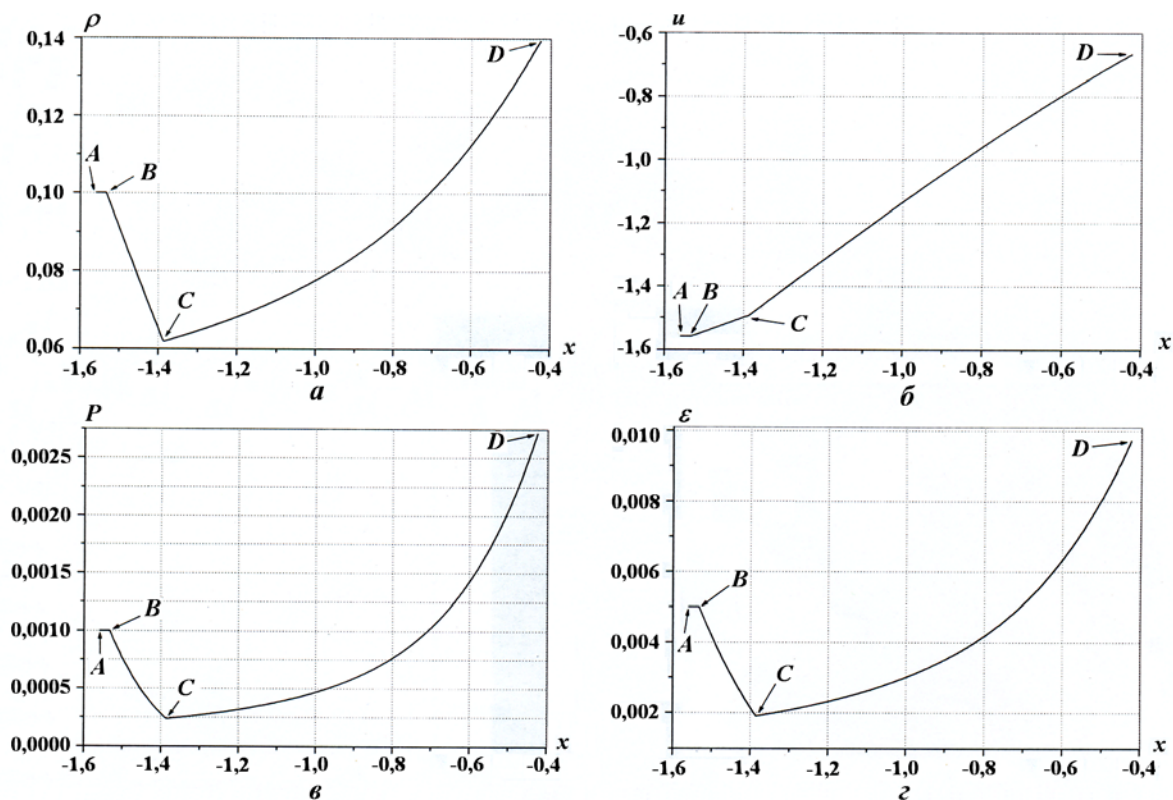


Рис. 5. Тест 3.3. Отражение в виде ВР, $\gamma_1 = \gamma_2 = 3$; $t = 1,0$: a — плотность; b — скорость; v — давление; z — внутренняя энергия

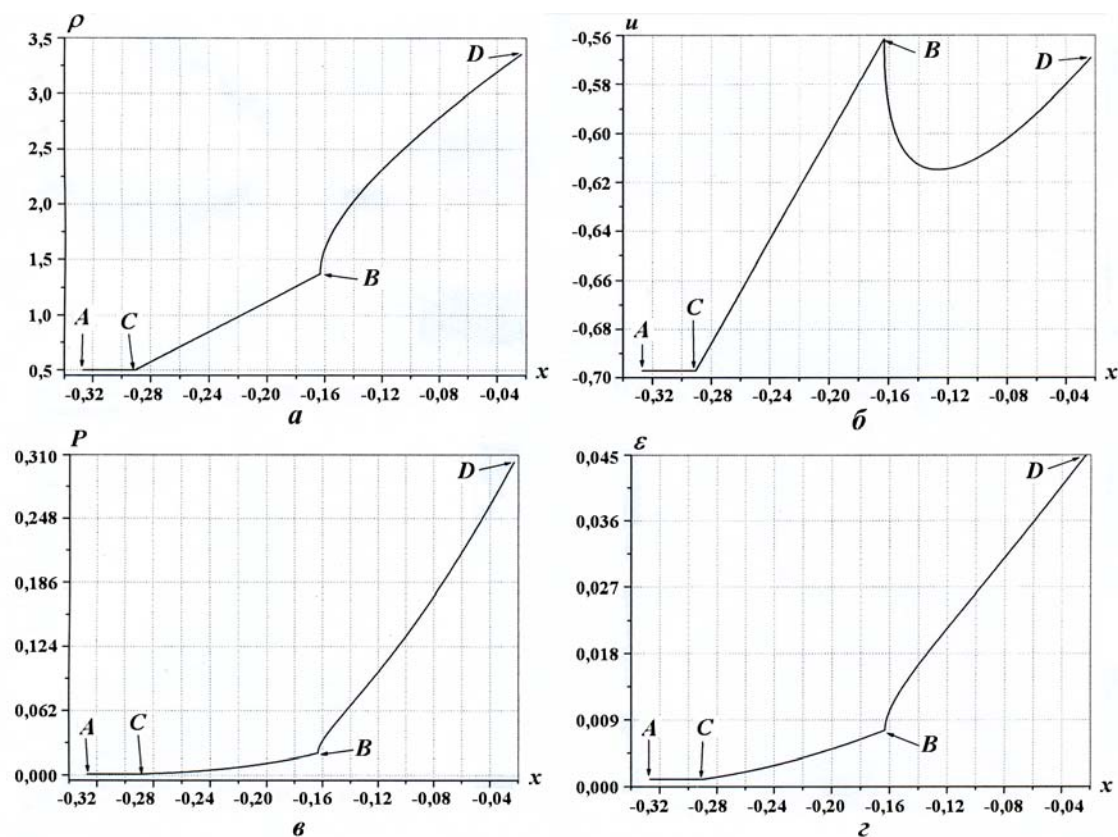


Рис. 6. Тест 3.4. Отражение в виде ВС, $\gamma_1 = \gamma_2 = 3$. Образование УВ на переднем фронте отраженной ВС (точка B), $t = 0,46894$: a — плотность; b — скорость; v — давление; z — внутренняя энергия

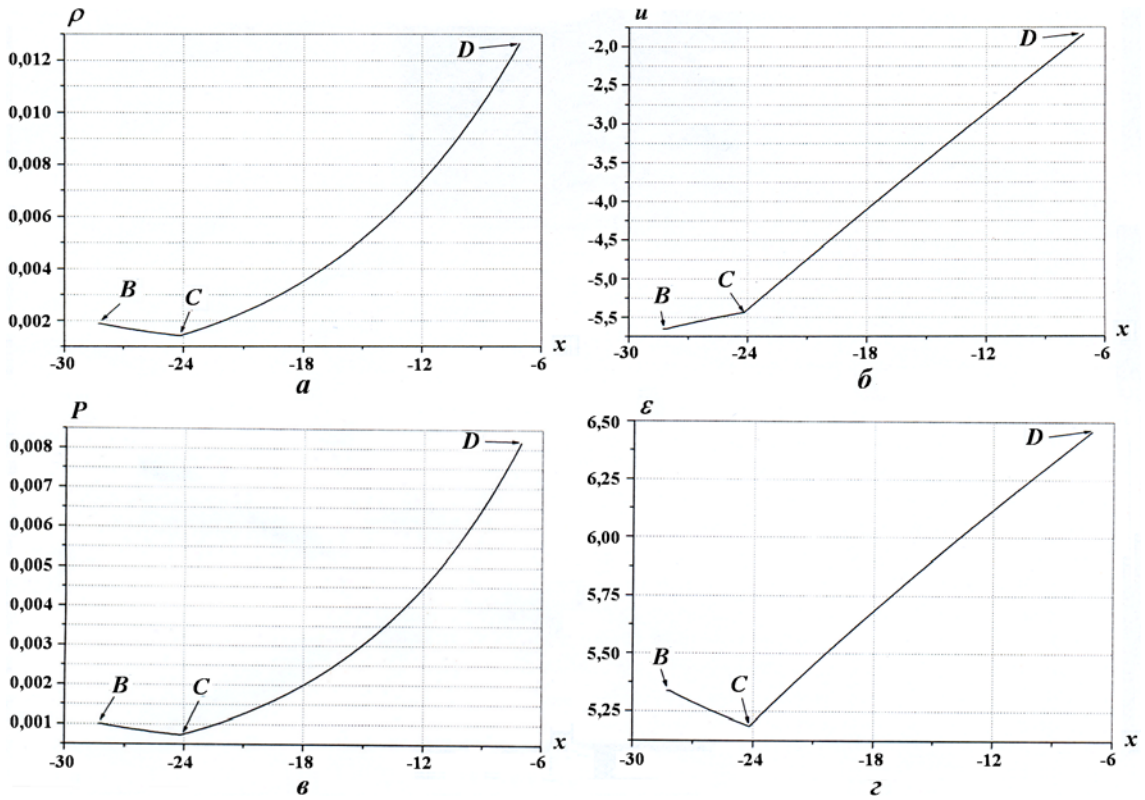


Рис. 7. Тест 3.5. Отражение в виде ВР, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1,1$. Выход переднего фронта отраженной ВР на левую границу (зоны постоянного течения нет), $t = 5,0$: a — плотность; b — скорость; v — давление; z — внутренняя энергия

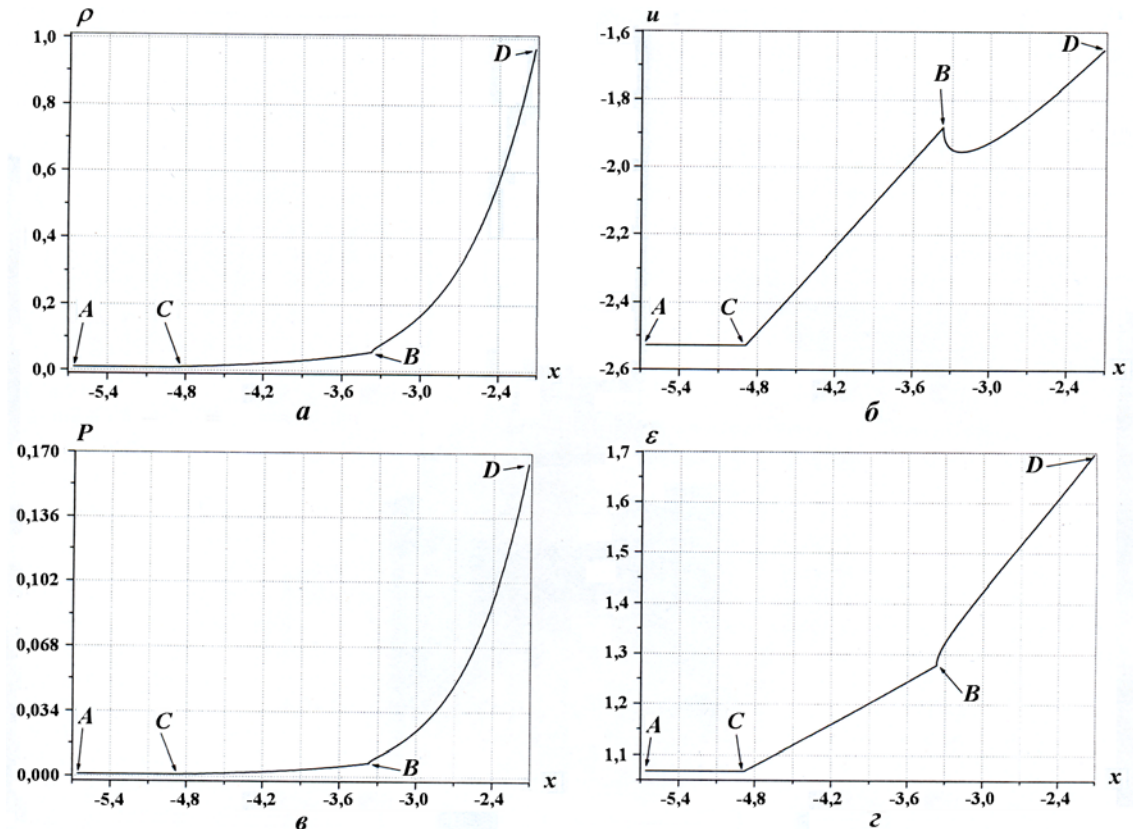


Рис. 8. Тест 3.6. Отражение в виде ВС, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1,1$. Образование УВ на переднем фронте отраженной ВС (точка B), $t = 2,23791$: a — плотность; b — скорость; v — давление; z — внутренняя энергия

Для сравнения берем координату КГ из расчетов (тесты 3.3 и 3.4) и подставляем в формулу. Сравнение значений скорости из расчета со значением, полученным по формуле, на конечный момент времени приведено в табл. 8. Там же указано количество шагов.

Сетка для теста 3.3. При расчете веера получены 601 точка семейства λ^3 и 4 точки семейства λ^2 для описания границ областей в начальных данных. Всего точек — 605. На контрольный момент времени сетка такова: область 1 — 603 точки ($254 - \lambda^1$, $2 - \lambda^2$, $347 - \lambda^3$); область 2 — 256 точек ($2 - \lambda^2$, $254 - \lambda^3$). Сетка λ^1 в области 1 появилась за счет отражения характеристик семейства λ^3 от КГ. Отражение реализуется, так как на КГ есть перепад плотностей.

Сетка для теста 3.4. При расчете веера получены 601 точка семейства λ^3 и 4 точки семейства λ^2 для описания границ областей в начальных данных. Всего точек — 605. На контрольный момент времени сетка такова: область 1 — 603 точки ($198 - \lambda^1$, $2 - \lambda^2$, $403 - \lambda^3$); область 2 — 200 точек ($2 - \lambda^2$, $198 - \lambda^3$). Сетка λ^1 в области 1 появилась за счет отражения характеристик семейства λ^3 от КГ. Отражение реализуется, так как на КГ есть перепад плотностей.

Для случая $\gamma_1 = \gamma_2 = 3$ (тест 3.4) В. А. Ногиным [4] любезно предоставлены значения аналитического решения для профилей скорости и скорости звука в зоне отраженной ВС (от ее фронта до КГ) и значение момента времени образования УВ. Относительная ошибка во времени образования УВ приведена в табл. 9.

Таблица 8

Сравнение аналитического и расчетного значений скорости КГ

Номер теста	t	Аналитическое значение	Численное значение	Относительная ошибка, %	Количество шагов
3.3	1	-0,66654940	-0,66655358	$-6,271 \cdot 10^{-4}$	9 400
3.4	0,468937783	-0,56911742	-0,56911779	$-6,501 \cdot 10^{-5}$	8 460

Таблица 9

Тест 3.4. Относительная ошибка во времени образования УВ

Численное значение	Аналитическое значение	Относительная ошибка, %	Число точек в сетке	Количество шагов
0,468938	0,4671	0,3934	803	8 460

Расчет отражения ВР от КГ в случае $\gamma_1 \neq \gamma_2$

Для тестов, приведенных ниже, берутся контрольные точки из предыдущего раздела. На рисунках добавлено обозначение УВ для точки образования УВ. На рис. 9, 10 представлена только левая область. Пояснения по профилям отраженной волны будут даны в следующем разделе.

$\gamma_1 > \gamma_2$. **Тесты 4.1—4.3.** В представленных тестах рассмотрены варианты, когда в левой области γ больше, чем в правой ($\gamma_1 = 11$; $\gamma_2 = 1,1$). На КГ варьируются параметры плотности и внутренней энергии.

Тест 4.1. Падающая ЦВР отражается как ВР, переходящая в ВС. УВ образуется внутри зоны ВС (не на переднем фронте отраженной волны). То, что отражение происходит в виде ВР, хорошо демонстрирует профиль плотности (см. рис. 9,а, зона между точками В и С — плотность убывает).

Тест 4.2. Падающая ЦВР отражается как ВС. УВ образуется внутри зоны ВС (не на переднем фронте отраженной волны). О том, что отражение происходит в виде ВС, свидетельствует профиль плотности (зона ВС — плотность возрастает).

Тест 4.3. Падающая ЦВР отражается в виде ВС. УВ образуется на переднем фронте отраженной ВС.

$\gamma_1 < \gamma_2$. **Тесты 5.1—5.3.** В представленных тестах рассмотрены варианты, когда в левой области γ меньше, чем в правой ($\gamma_1 = 1,1$; $\gamma_2 = 11$). На КГ варьируются параметры плотности и внутренней энергии.

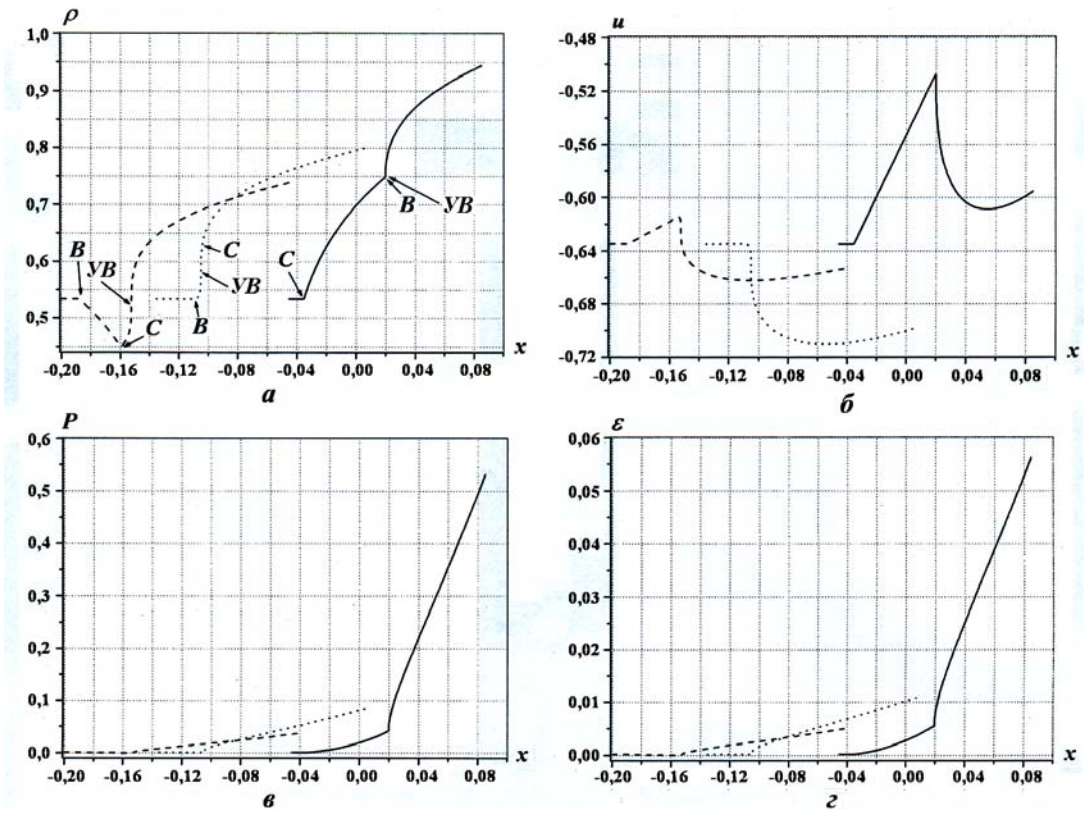


Рис. 9. Профили плотности (a), скорости (b), давления (v), внутренней энергии (z) для случая $\gamma_1 > \gamma_2$:
 - - - - тест 4.1, $t = 0,31506$; \cdots — тест 4.2, $t = 0,21325$; — — тест 4.3, $t = 0,07174$

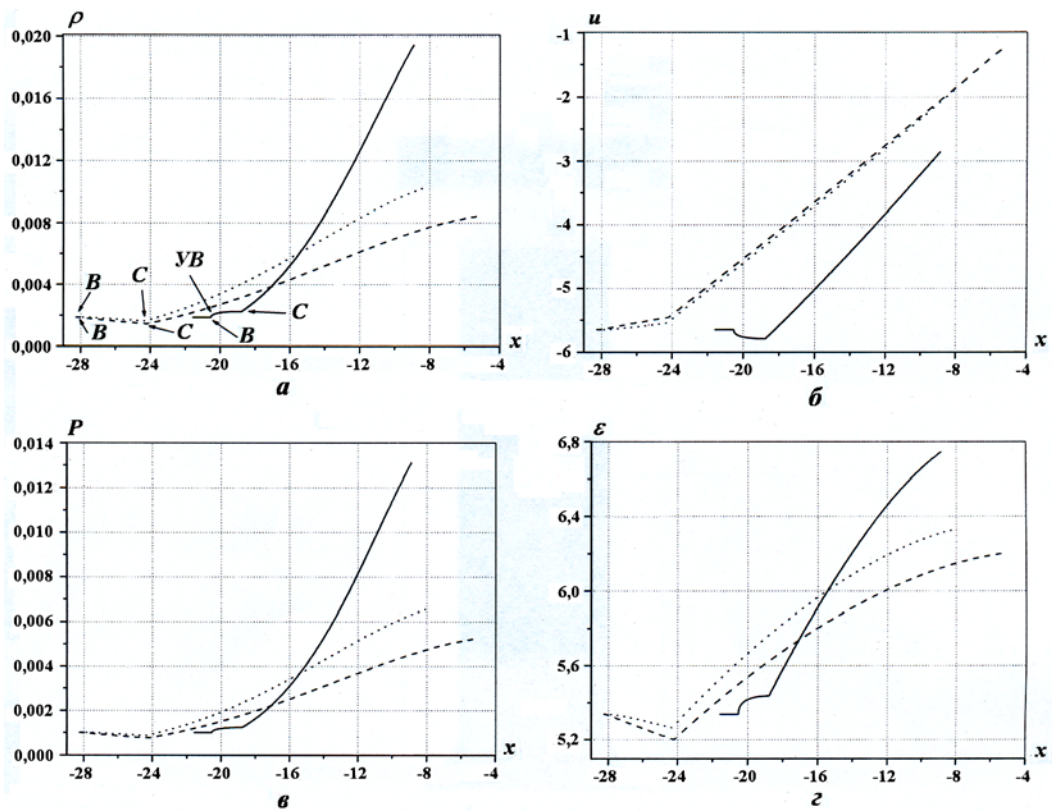


Рис. 10. Профили плотности (a), скорости (b), давления (v), внутренней энергии (z) для случая $\gamma_1 < \gamma_2$:
 - - - - тест 5.1, $t = 5,0$; \cdots — тест 5.2, $t = 5,0$; — — тест 5.3, $t = 3,81542$

Тест 5.1. Падающая ЦВР отражается как ВР. Это хорошо видно на профиле плотности (см. рис. 10,а, зона между точками В и А — плотность убывает).

Тест 5.2. Падающая ЦВР отражается как ВР. Это хорошо видно на профиле плотности (зона ВА — плотность убывает).

Тест 5.3. Падающая ЦВР отражается в виде ВС. УВ образуется на переднем фронте отраженной ВС.

Обсуждение полученных результатов

Для анализа профилей отраженных волн на рис. 11 для тестов 3.1—3.6 приведены профили импеданса ρc слева и справа от КГ как функции времени.

Для тестов 3.3 и 3.4 численные решения хорошо согласуются с аналитическими решениями, представленными в табл. 8. Поэтому качественную картину временной развертки импедансов для тестов

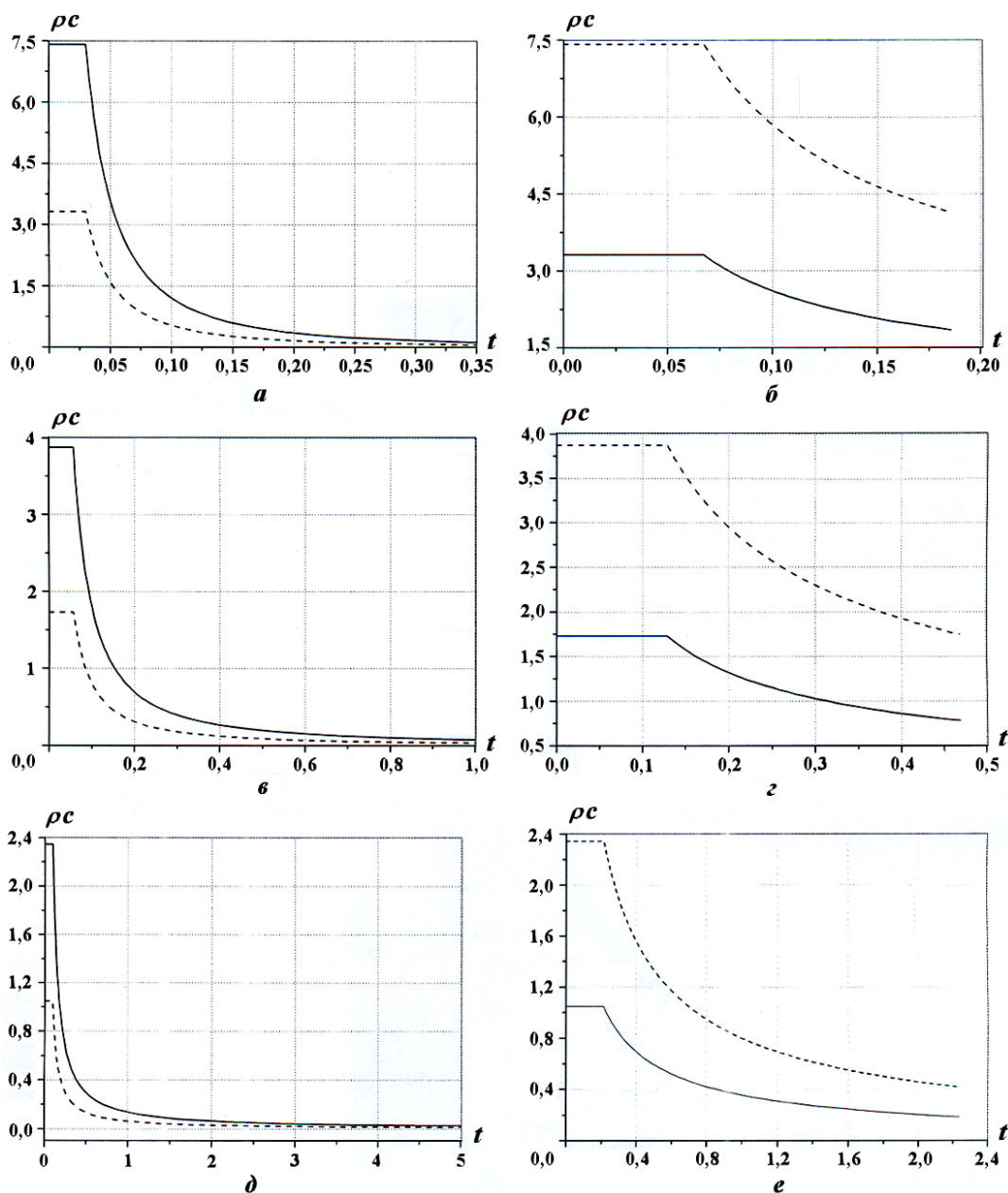


Рис. 11. Профили импедансов, $\gamma_1 < \gamma_2$: а — тест 3.1; б — тест 3.2; в — тест 3.3; г — тест 3.4; д — тест 3.5; е — тест 3.6; - - - - слева от КГ; — — справа от КГ

3.1–3.6 будем считать верной. На анализе временной развертки импедансов основываются дальнейшие выводы.

При равенстве показателей γ для обеих областей ($\gamma_1 = \gamma_2$) вывод заключается в следующем:

Если импеданс слева от КГ меньше, чем справа ($\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$), то в левой области распространяется ВР. Если импеданс слева от КГ больше, чем справа ($\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$), то в левой области распространяется ВС.

Для случая, когда в областях слева и справа от КГ показатели γ различны, картина течений представлена на рис. 12. Для тестов 4.1–4.3 ($\gamma_1 > \gamma_2$) и 5.1–5.3 ($\gamma_1 < \gamma_2$) типы отраженной волны будут следующими.

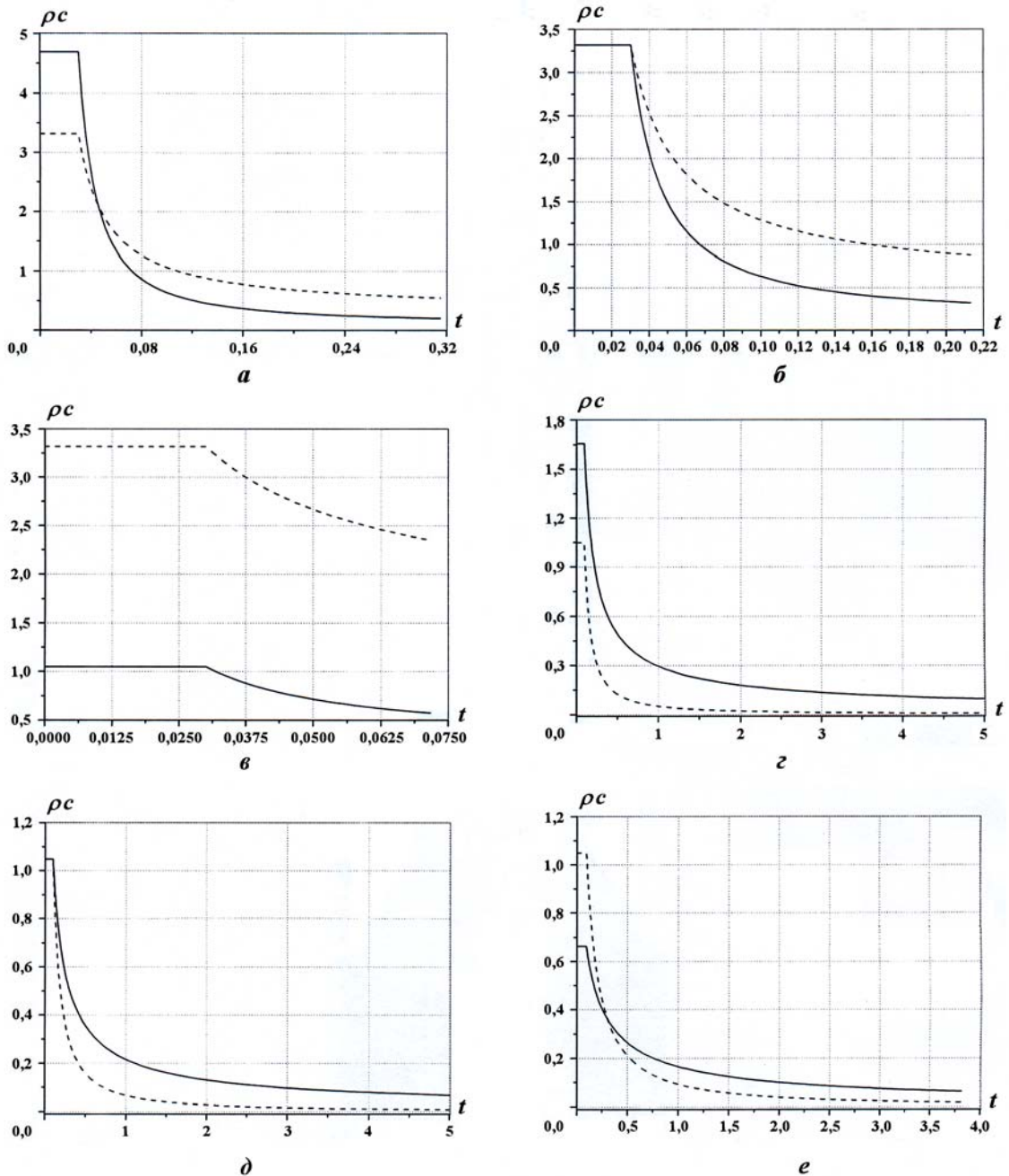


Рис. 12. Профили импедансов, $\gamma_1 \neq \gamma_2$: а — тест 4.1; б — тест 4.2; в — тест 4.3; з — тест 5.1; д — тест 5.2; е — тест 5.3; - - - - слева от КГ; — — справа от КГ

Тест 4.1, $(\rho_1 c_1)^0 < (\rho_2 c_2)^0$ (см. рис. 12,а). Падающая ЦВР отражается от КГ в виде ВР, но, начиная с момента равенства импедансов (вследствие взаимодействия падающей и отраженной волн), отраженная волна становится ВС. УВ образуется *внутри* ВС.

Тест 4.2, $(\rho_1 c_1)^0 = (\rho_2 c_2)^0$ (см. рис. 12,б). Падающая ЦВР отражается от КГ в виде ВС, интенсивность которой меньше, чем у падающей ЦВР, но с течением времени интенсивность падающей волны уменьшается, а интенсивность отраженной ВС увеличивается. УВ образуется *внутри* ВС.

Тест 4.3, $(\rho_1 c_1)^0 > (\rho_2 c_2)^0$ (см. рис. 12,в). Падающая ЦВР отражается от КГ в виде ВС с интенсивностью, большей, чем у падающей ЦВР. УВ образуется *на фронте* отраженной ВС.

Тест 5.1, $(\rho_1 c_1)^0 < (\rho_2 c_2)^0$ (см. рис. 12,г). Падающая ЦВР отражается от КГ в виде ВР.

Тест 5.2, $(\rho_1 c_1)^0 = (\rho_2 c_2)^0$ (см. рис. 12,д). Падающая ЦВР отражается от КГ в виде ВР.

Тест 5.3, $(\rho_1 c_1)^0 > (\rho_2 c_2)^0$ (см. рис. 12,е). Падающая ЦВР отражается от КГ в виде ВС, но, начиная с момента равенства импедансов (вследствие взаимодействия падающей и отраженной волн), отраженная волна становится ВР. УВ образуется *на фронте* отраженной ВС.

Для случая $\gamma_1 \neq \gamma_2$ критерии смены типа отраженной волны формулируются следующим образом:

Если в левой области показатель γ больше, чем в правой области, то ЦВР отражается в асимптотике в виде ВС. Если в начальный момент импеданс слева от КГ меньше, чем справа, то возможен начальный этап отражения ВР.

Если в левой области показатель γ меньше, чем в правой области, то ЦВР отражается в асимптотике в виде ВР. Если в начальный момент импеданс слева от КГ больше, чем справа, то возможен начальный этап отражения ВС.

Заключение

В работе представлены результаты тестирования методики МХС на задачах о взаимодействии ВР с КГ двух различных веществ. Рассмотрены все возможные комбинации соотношений параметров ρ и γ на КГ.

Приведенные результаты сравнения аналитических и численных расчетов тестовых задач показывают возможность с высокой точностью рассчитывать взаимодействие ВР с контактным разрывом по алгоритмам, реализованным в методике МХС.

Список литературы

1. *Боков Д. Н., Боков Н. Н.* Многосеточный подход к численному решению уравнений газовой динамики методом характеристических направлений с выделением сильных и слабых разрывов для произвольного уравнения состояния // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 2. С. 10–20.
2. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
3. *Рождественский Б. Л., Яценко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. *Ногин В. А.* К задаче о преломлении центрированной простой волны на контактном разрыве // Тез. 8-й Забабахинской конференции. Снежинск, 2005. С. 211.

Статья поступила в редакцию 26.04.06.
