

УДК 519.6

## СГЛАЖИВАНИЕ ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛАГРАНЖЕВЫХ СЕТОК

А. В. Ялозо  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Для методик ДМК и ТИМ в дополнение к ранее разработанным алгоритмам сглаживания векторного поля скоростей рассматриваются алгоритмы, позволяющие сглаживать граничные поверхности многоугольных и многогранных лагранжевых сеток. Предпринята попытка разработать механизм, позволяющий поддерживать гладкость сетки без изменения скоростей движения ее узлов. Сглаживание граничной поверхности осуществляется перемещением каждого из ее узлов в некоторое положение. Для предотвращения потерь массы, а также перемешивания различных веществ новое положение узла на поверхности выбирается из условия сохранения объемов. Так как узлы на граничной поверхности топологически связаны с узлами внутри сетки, осуществляется также перемещение внутренних узлов.

### Введение

Методики ДМК [1] и ТИМ [2] являются нерегулярными лагранжевыми методиками. Как известно, при некоторых условиях нерегулярные методики обладают феноменом счетной неустойчивости, особенно ярко выраженным на свободной и контактной поверхностях. Такая неустойчивость может возникать при наличии сильных неоднородностей расчетной нерегулярной сетки вблизи свободных или контактных границ. Это, в свою очередь, может приводить к нарушению гладкости границ, к ухудшению аппроксимации решения и затруднению проведения расчета. Данная проблема так же остро стоит при расчетах контактных взаимодействий вдоль выделенных границ раздела между счетными областями, метод расчета которых был сначала разработан в методике ДМК [1], а затем применительно к методике ТИМ [3]. Для улучшения качества счетной сетки при решении обозначенной выше проблемы для методик ТИМ и ДМК были разработаны операторы сглаживания векторного поля скоростей, описание которых дано в работе [4].

Сетка, не удовлетворяющая критериям гладкости, может быть получена по разным причинам как на стадии расчета начальных данных (РНД), так и во время расчета задачи. Существует довольно много подходов к сглаживанию поверхностей лагранжевых сеток. Так, для регулярных сеток данная проблема стоит менее остро, и для них считается достаточным сглаживание поля скоростей. Для нерегулярных сеток подходы к сглаживанию поверхностей в основном связаны с оптимизацией некоторого функционала, например [5]. Однако разработка такого функционала и его оптимизация достаточно сложны, особенно в случае трехмерной области, заполненной многогранной сеткой с произвольным количеством *связей* в узлах. Кроме того, при перемещении узлов на граничной поверхности тела, заполненного сеткой, происходит изменение объема этого тела, что при условии сохранения плотности в ячейках может приводить к дисбалансу по массе. В связи с этим требовалось найти алгоритмы, не имеющие указанных недостатков.

В настоящей работе рассматриваются алгоритмы, которые расширяют уже имеющийся аппарат сглаживания, позволяя сглаживать граничные поверхности многогранных и многоугольных лагранжевых сеток, которые используются соответственно в методиках ТИМ и ДМК. Автором разработан механизм, позволяющий поддерживать гладкость поверхностей сеток без изменения скоростей движения их узлов.

Сглаживание граничной поверхности осуществляется перемещением каждого из ее узлов в некоторое оптимальное положение. Для предотвращения потерь массы, а также перемешивания различных веществ новое местоположение узла на поверхности выбирается из условия сохранения объемов, которое для тетраэдрических сеток рассматривается в работе [6]. Так как узлы на граничной поверхности топологически связаны с узлами внутри сетки, осуществляется также перемещение внутренних узлов. За новое местоположение внутреннего узла принимается среднее арифметическое координат окружающих его соседних узлов.

### Сглаживание кривых и поверхностей

При проведении численных расчетов двумерных осесимметричных или трехмерных задач кривые или поверхности, описывающие форму границ, могут с течением времени терять свою гладкость и становиться непригодными для последующих вычислений. Под сглаживанием поверхностей будем понимать:

- упорядоченность направлений нормалей в узлах;
- равномерность *плотности* узлов (их количества на единицу площади поверхности);
- равномерность площадей всех граней на поверхности.

Под нормалью в узле понимается вектор, аппроксимирующий нормаль к поверхности в точке с координатами данного узла.

**Алгоритм релаксации узла.** Рассмотрим несамопересекающуюся кривую  $\Gamma$  (рис. 1). Нужно разработать оператор, который будет действовать локально в небольшой окрестности каждого из узлов. При этом необходимо добиться гладкости кривой и сохранить площадь области, ограниченной этой кривой.

Наиболее простым представляется алгоритм, графическая иллюстрация к которому дана на рис. 2. На этом рисунке показана последовательность трех узлов кривой  $\vec{r}_1, \vec{r}_0, \vec{r}_2$ . При перемещении узла  $\vec{r}_0$  параллельно отрезку  $\vec{r}_1\vec{r}_2$  сохраняется площадь треугольника. Будем перемещать узел  $\vec{r}_0$  так, чтобы . Тем самым будет достигнута равномерность сетки.

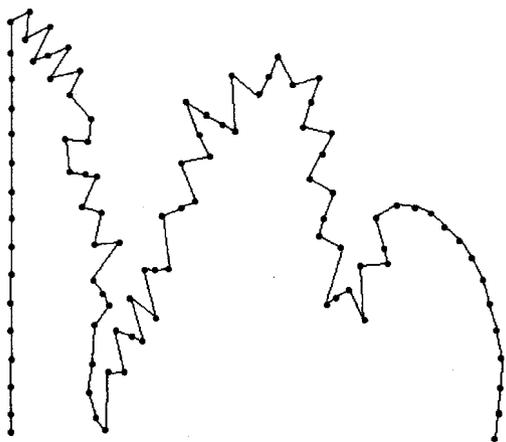


Рис. 1. Несамопересекающаяся кривая  $\Gamma$

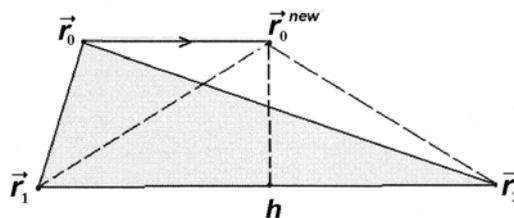


Рис. 2. Графическая иллюстрация алгоритма релаксации узла для двумерного случая

Такой алгоритм называется алгоритмом *релаксации узла*. Расчетные формулы имеют следующий вид:

$$d\vec{r} = \alpha \left( \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} - \vec{r}_0 \right);$$

$$\vec{n} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^\perp; \quad h = d\vec{r} \cdot \vec{n}; \tag{1}$$

$$\vec{r}_0^{new} = \vec{r}_0 + d\vec{r} - h \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2}, \tag{2}$$

где  $d\vec{r}$  — смещение узла;  $\alpha$  — коэффициент сглаживания;  $\vec{n}$  — нормаль в узле;  $h$  — изменение площади за счет смещения узла на величину  $dr_1$ ;  $\vec{r}_0, \vec{r}_0^{new}$  — старые и новые координаты перемещаемого узла.

Очевидно, что зависимость изменения площади треугольника от перемещения его узла является линейной. В случае осесимметричной геометрии зависимость становится квадратичной и возникает необходимость решать квадратное уравнение. Формула изменения объема принимает вид

$$\Delta V = \Delta y(d\vec{r} \cdot \vec{n}) + d\vec{r} \cdot \{n_x(y_0 + y_1 + y_2), x_0 n_x + x_2(2y_0 + y_2) - x_1(2y_0 + y_1)\},$$

где  $\vec{n} = \{y_1 - y_2, x_2 - x_1\}$ ;  $d\vec{r} = \{\Delta x, \Delta y\}$ .

Записав условие равенства нового (измененного) объема прежнему объему ячейки, получим следующие коэффициенты квадратного уравнения  $ax^2 - bx + c = 0$ :

$$a = n_y n^2;$$

$$b = \vec{n} \cdot \{n_x(y_0 + y_1 + y_2) + \Delta y n_x, x_0 n_x + x_2(2y_0 + y_2) - x_1(2y_0 + y_1) + \Delta x n_x + 2\Delta y n_y\};$$

$$c = \Delta y(d\vec{r} \cdot \vec{n}) + d\vec{r} \cdot \{n_x(y_0 + y_1 + y_2), x_0 n_x + x_2(2y_0 + y_2) - x_1(2y_0 + y_1)\}.$$

Решение  $h = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  является искомым. Новое положение узла вычисляется по формуле (2).

Алгоритм релаксации узла легко обобщается на трехмерный случай, если только все грани граничной поверхности пространственной сетки являются треугольниками [6]. В этом случае зависимость изменения объема тела от перемещения узла является линейной. В методике ТИМ для решения трехмерных задач существует несколько способов определения положения центра грани, которая является пространственным многоугольником. Если полагать, что координаты центра грани ячейки есть среднее арифметическое координат узлов грани, то зависимость изменения объема становится линейной. Именно для такого варианта вычисления центров граней в трехмерном случае реализовано сглаживание сетки с сохранением объема.

Графическая иллюстрация алгоритма релаксации узла для трехмерного случая приведена на рис. 3. Соответствующие формулы при указанном выше допущении:

$$d\vec{r} = \alpha \left( \frac{\sum_{i=1}^n \vec{r}_i}{n} - \vec{r}_0 \right); \quad \vec{n} = \sum_{i=1}^n (\vec{e}_i \times \vec{e}_{i+1}); \quad h = d\vec{r} \cdot \vec{n}; \quad \vec{r}_0^{new} = \vec{r}_0 + d\vec{r} - h \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2},$$

где  $d\vec{r}$  — смещение узла;  $n$  — количество соседей узла;  $\alpha$  — коэффициент сглаживания;  $\vec{e}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_0$ ;  $\vec{e}_{n+1} = \vec{e}_1$ ;  $\vec{n}$  — нормаль в узле;  $h$  — изменение объема за счет смещения узла на величину  $dr$ ;  $\vec{r}_0, \vec{r}_0^{new}$  — соответственно старые и новые координаты перемещаемого узла.

Алгоритм релаксации узла достаточно прост и отвечает требованию сохранения площади или объема. Однако существенным недостатком одноточечного алгоритма, как видно из формул, является то, что узлы не будут смещаться в нормальных к сглаживаемой кривой или поверхности направлениях. Поэтому данный алгоритм не позволяет осуществлять сглаживание в нормальных к поверхности сетки направлениях. Устранить этот недостаток можно, используя пару узлов.

**Алгоритм релаксации ребра.** На рис. 4 показана последовательность четырех узлов кривой  $\vec{r}_1, \vec{r}_0^{(1)}, \vec{r}_0^{(2)}, \vec{r}_2$ . По аналогии с алгоритмом релаксации одного узла перемещаем узлы  $\vec{r}_0^{(1)}$  и  $\vec{r}_0^{(2)}$  в новые положения, соответствующие большей равномерности сетки. После этого компенсируем измененный объем одновременным перемещением этих узлов в направлении нормали  $\vec{n}$ , определенной формулами, указанными ниже.

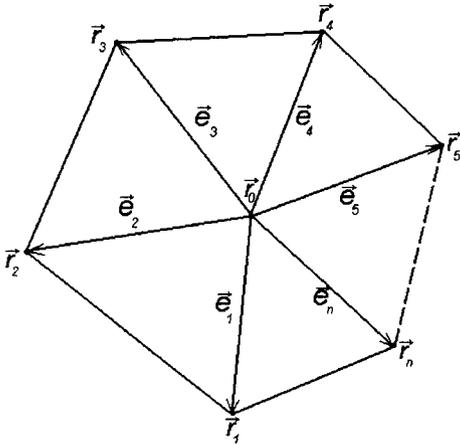


Рис. 3. Графическая иллюстрация алгоритма релаксации узла для трехмерного случая

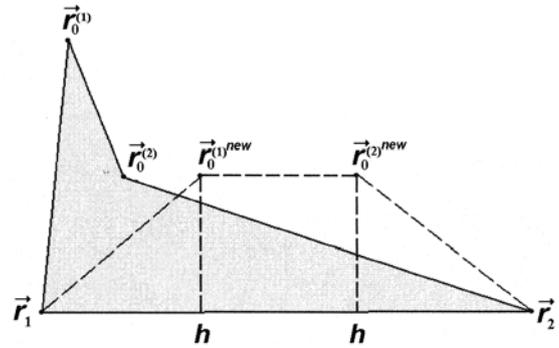


Рис. 4. Графическая иллюстрация алгоритма релаксации ребра для двумерного случая

Расчетные формулы алгоритма для двумерного случая имеют следующий вид:

$$d\vec{r}^{(1)} = \alpha \left( \frac{2\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{3} - \vec{r}_0^{(1)} \right); \quad d\vec{r}^{(2)} = \alpha \left( \frac{\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2}{3} - \vec{r}_0^{(2)} \right);$$

$$\vec{n} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^\perp; \quad \vec{n}^{(1)} = (\vec{r}_0^{(2)} - \vec{r}_1)^\perp; \quad \vec{n}^{(2)} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_0^{(1)})^\perp; \quad h = \frac{d\vec{r}^{(1)} \cdot \vec{n}^{(1)} + d\vec{r}^{(2)} \cdot \vec{n}^{(2)}}{(d\vec{r}^{(1)} + d\vec{r}^{(2)}) \cdot \vec{n}};$$

$$\vec{r}_0^{(k)new} = \vec{r}_0^{(k)} + d\vec{r}^{(k)} - h\vec{n}, \quad k = 1, 2,$$

где  $d\vec{r}^{(k)}$  — смещение  $k$ -го узла;  $\alpha$  — коэффициент сглаживания;  $\vec{n}^{(k)}$  — нормаль в  $k$ -м узле;  $\vec{n}$  — нормаль к ребру;  $h$  — изменение площади за счет смещения узлов;  $\vec{r}_0^{(k)}, \vec{r}_0^{(k)new}$  — соответственно старые и новые координаты перемещаемого  $k$ -го узла.

Рассмотрим действие двухточечного алгоритма сглаживания (*релаксации ребра*) на границу возмущенной сетки, изображенной на рис. 5,а. На рис. 5,б–г приведено состояние кривой после 20, 50 и 100 итераций сглаживания по этому алгоритму с коэффициентом  $\alpha = 0,1$ . Для одновременного сохранения гладкости внутри сетки выполнялось перемещение внутренних узлов. Видно, что с использованием двухточечного алгоритма граница сетки полностью удовлетворяет сформулированным выше критериям гладкости.

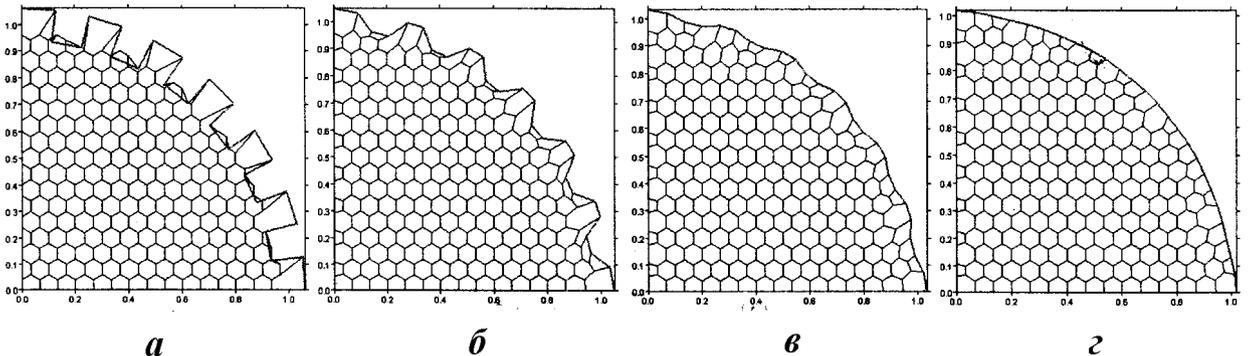


Рис. 5. Начальная сетка (а) и сетка после 20 (б), 50 (в), 100 (г) итераций сглаживания

Перейдем к рассмотрению алгоритма релаксации ребра для трехмерного случая. На рис. 6 изображена пара узлов  $\vec{r}^{(1)}$  и  $\vec{r}^{(2)}$  с их окружением, состоящим соответственно из  $n_1$  и  $n_2$  узлов.

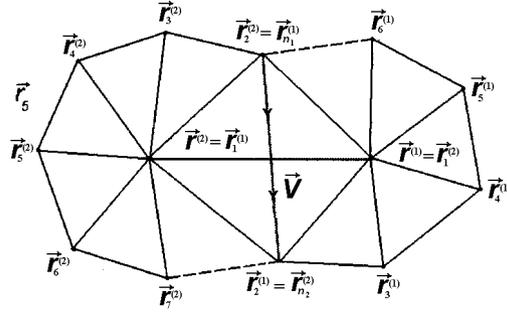


Рис. 6. Графическая иллюстрация алгоритма релаксации ребра для трехмерного случая

Будем искать новые положения перемещаемых узлов по формулам

$$\vec{r}^{(1)} = \frac{\sum_{i=2}^{n_1} \vec{r}_i^{(1)} + \vec{r}^{(2)}}{n_1}; \quad \vec{r}^{(2)} = \frac{\sum_{i=2}^{n_2} \vec{r}_i^{(2)} + \vec{r}^{(1)}}{n_2}. \quad (3)$$

Тогда итоговые формулы для перемещений узлов будут иметь вид

$$d\vec{r}^{(1)} = \alpha \left( \frac{n_2 \sum_{i=2}^{n_1} \vec{r}_i^{(1)} + \sum_{i=2}^{n_2} \vec{r}_i^{(2)}}{n_1 n_2 - 1} - \vec{r}_0^{(1)} \right); \quad d\vec{r}^{(2)} = \alpha \left( \frac{\sum_{i=2}^{n_1} \vec{r}_i^{(1)} + n_1 \sum_{i=2}^{n_2} \vec{r}_i^{(2)}}{n_1 n_2 - 1} - \vec{r}_0^{(2)} \right). \quad (4)$$

Проделав для пространственной сетки выкладки, аналогичные случаю на плоскости, получим следующие формулы для сглаживания ребра:

$$\vec{n}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n_k+1} \left( \vec{e}_i^{(k)} \times \vec{e}_{i+1}^{(k)} \right); \quad \vec{n} = \vec{n}^{(1)} + \vec{n}^{(2)}; \quad h = d\vec{r}^{(1)} \cdot \vec{n}^{(1)} + d\vec{r}^{(2)} \cdot \vec{n}^{(2)}; \\ \vec{r}_0^{(k) new} = \vec{r}^{(k)} + d\vec{r}^{(k)} - h \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2}; \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

где  $d\vec{r}^{(k)}$  — смещение  $k$ -го узла;  $n_k$  — количество соседей узла  $k$ ;  $\alpha$  — коэффициент сглаживания;  $\vec{e}_i^{(k)} = \vec{r}_i^{(k)} - \vec{r}^{(k)}$ ;  $\vec{e}_{n+1}^{(k)} = \vec{e}_1^{(k)}$ ;  $\vec{n}^{(k)}$  — нормаль в  $k$ -м узле;  $\vec{n}$  — нормаль к ребру;  $h$  — изменение объема за счет смещения узлов;  $\vec{r}^{(k)}$ ,  $\vec{r}^{(k) new}$  — соответственно старые и новые координаты  $k$ -го перемещаемого узла.

В двумерном случае с осевой симметрией новые положения узлов будем определять по формулам (3), (4). Для восстановления измененных объемов, как упоминалось выше, получим квадратное уравнение  $ax^2 - bx + c = 0$  со следующими коэффициентами (см. рис. 4):

$$a^{(k)} = \vec{n} \cdot \vec{n}^{(k)}; \\ \vec{b}^{(k)} = \{n_x(y_0 + y_1 + y_2) + \Delta y n_x, x_0 n_x + x_2(2y_0 + y_2) - x_1(2y_0 + y_1) + \Delta x n_x + 2\Delta y n_y\}^{(k)}; \\ c^{(k)} = \Delta y (d\vec{r} \cdot \vec{n}) + d\vec{r} \cdot \{n_x(y_0 + y_1 + y_2), x_0 n_x + x_2(2y_0 + y_2) - x_1(2y_0 + y_1)\}^{(k)}; \\ a = n_y(a^{(1)} + a^{(2)}); \quad b = \vec{n} \cdot (\vec{b}^{(1)} + \vec{b}^{(2)}); \quad c = c^{(1)} + c^{(2)}, \quad (6)$$

где  $d\vec{r}^{(k)}$  — смещение  $k$ -го узла;  $\vec{n}^{(1)} = (\vec{r}_0^{(2)} - \vec{r}_1^{(1)})^\perp$ ,  $\vec{n}^{(2)} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_0^{(1)})^\perp$  — нормали в перемещаемых узлах;  $\vec{n} = \vec{n}^{(1)} + \vec{n}^{(2)}$  — нормаль к ребру.

Решение  $h = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  является искомым. Новые координаты узлов вычисляются по формуле (5).

### Контроль за состоянием сетки

Достаточно произвольное перемещение узла в процессе сглаживания может исказить сетку. Например, могут получиться самопересекающиеся ячейки или ячейки с отрицательным объемом. Поэтому после перемещения каждого узла или ребра в результате выполнения процедуры сглаживания необходимо проверять критерии невырожденности сетки.

В данной работе реализован достаточно общий критерий невырожденности сетки. Для двумерного случая проверяется положительность всех площадей треугольников, образуемых связями данного узла. Для трехмерного случая требуется положительность объемов всех пирамид, образуемых связями данного узла. Это условие можно также трактовать как выпуклость всех многогранных углов с вершиной в данном узле.

На рис. 7, 8 приведены ситуации бесконтрольного сглаживания сетки для двумерного и трехмерного случаев соответственно. Отчетливо видно наличие "запутанных" и самопересекающихся ячеек. Такое запутывание сетки без контроля за ее состоянием называется коллапсом. Эти примеры подтверждают необходимость контроля качества сетки и дополнительного использования алгоритмов коррекции сетки при сглаживании.

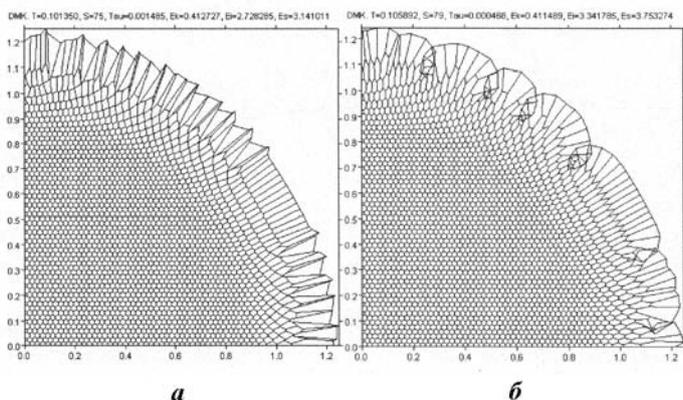


Рис. 7. Двумерная сетка до (а) и после (б) сглаживания без контроля за состоянием сетки

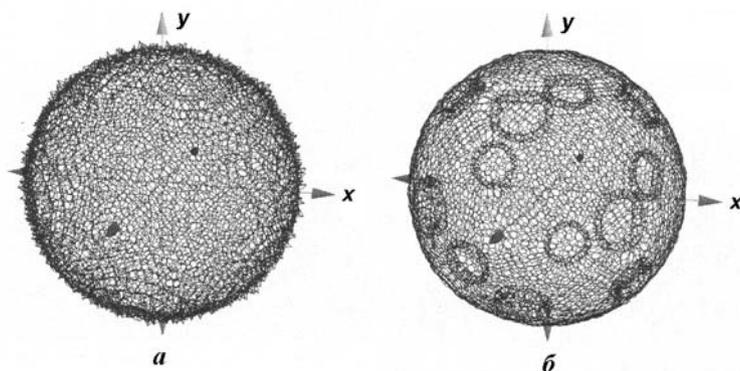


Рис. 8. Трехмерная сетка до (а) и после (б) сглаживания без контроля за состоянием сетки

## Пересчет термодинамических и кинематических величин

В связи с изменением положения узлов на поверхности и, как следствие, объема ячеек требуется выполнять пересчет термодинамических величин в приграничных ячейках сетки. С другой стороны, массы узлов связаны с массами ячеек, поэтому необходимо для них пересчитать все кинематические величины.

Для пересчета термодинамических величин применяется достаточно быстрый и эффективный алгоритм. Алгоритм базируется на подсчете входящих в ячейку и исходящих из нее потоков пересчитываемой величины. При использовании этого алгоритма делается предположение, что перемещение узлов при сглаживании сетки невелико.

При пересчете кинематических (узловых) величин рассматривается пара узлов или ребро. Избыточный импульс, приобретенный ребром за счет изменения масс узлов, перераспределяется между узлами с весами  $\alpha$  и  $1-\alpha$ . Записав дополнительно закон сохранения кинетической энергии для этих узлов, приходим к уравнению параболы относительно параметра  $\alpha$ , ветви которой направлены вверх. В случае отсутствия корней уравнения в качестве искомого решения принимается координата  $\alpha$  вершины параболы.

### Тестовые примеры

Для оценки дееспособности алгоритмов сглаживания, а также их эффективности рассмотрим несколько тестовых примеров. Сглаживание было опробовано применительно к поверхностям двумерных сеток методики ДМК, являющимся кусочно-линейными кривыми, и поверхностям трехмерных сеток методики ТИМ, представляющим собой совокупность пространственных многоугольников. Одновременно со сглаживанием поверхностей выполнялось перемещение внутренних узлов, контроль за состоянием сетки и пересчет величин.

Рассмотрим действие сглаживания на возмущенную кусочно-непрерывную кривую, изображенную на рис. 9,а. На рис. 9,б–г приведено состояние кривой после 5, 30 и 100 итераций сглаживания по алгоритму релаксации ребра с коэффициентом  $\alpha = 0,1$ . Анализируя результаты, можно заметить, что основные неровности кривой в нормальных к ней направлениях выравниваются на первых итерациях сглаживания. Далее происходит все большее разглаживание кривой, однако начальная форма кривой меняется незначительно.

Действие алгоритмов сглаживания на двумерную сетку в целом демонстрирует рис. 10. На рис. 10,а изображена двумерная сетка в сфере с закраской по давлению, взятая из газодинамической задачи. На рис. 10,б приведено состояние сетки после 10 итераций сглаживания с коэффициентом  $\alpha = 0,1$ . Анализируя полученные результаты, можно заключить, что поверхность сетки и сама сетка стали более гладкими.

Рассмотрено влияние сглаживания на сетки, заполняющие прямоугольный параллелепипед и осесимметричный эллипсоид, взятые из газодинамической задачи. На рис. 11,а изображена поверхность параллелепипеда и его продольное сечение с раскраской по скорости до сглаживания, на рис. 11,б — после 50 итераций сглаживания с коэффициентом  $\alpha = 0,1$ . На рис. 12 представлены аналогичные данные для сетки в осесимметричном эллипсоиде. Анализируя эти результаты, можно заключить, что сетки на обеих поверхностях стали более гладкими.

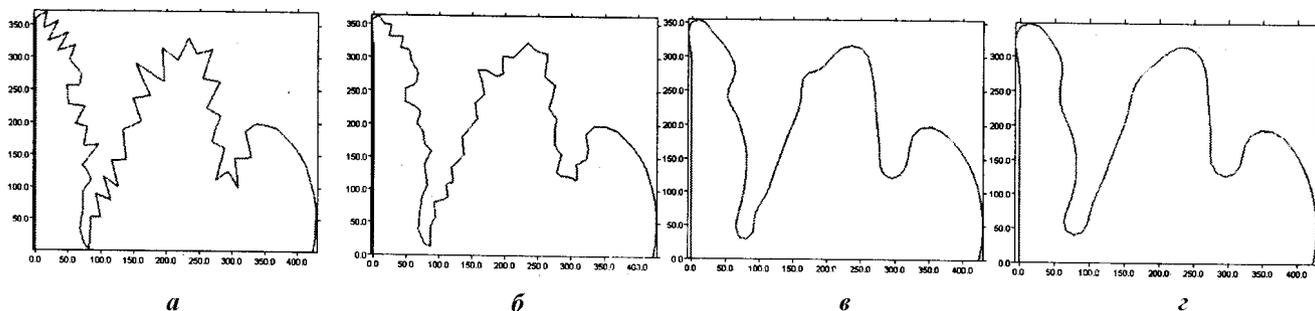


Рис. 9. Первоначальная кривая (а) и кривая после 5 (б), 30 (в) и 100 (г) итераций сглаживания

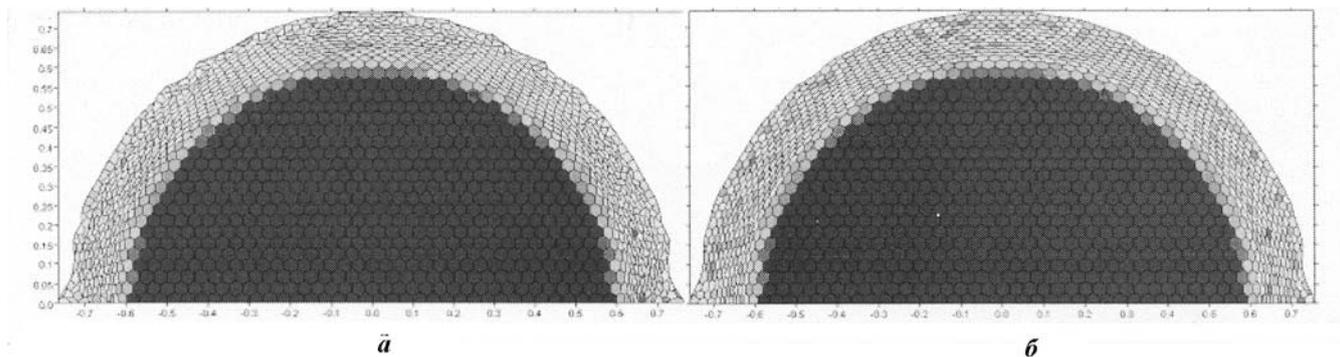


Рис. 10. Начальная сетка (а) и сетка после 10 итераций сглаживания (б) с закраской по давлению

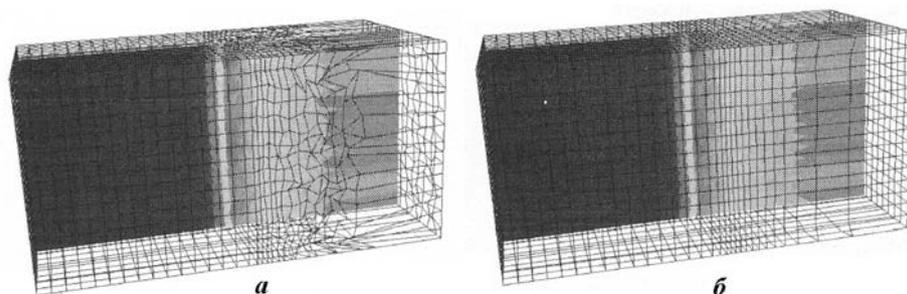


Рис. 11. Возмущенная (а) и сглаженная (б) поверхности сетки в параллелепипеде

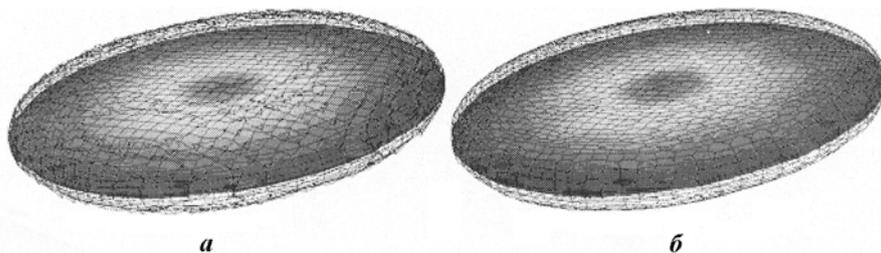


Рис. 12. Возмущенная (а) и сглаженная (б) поверхности сетки в эллипсоиде

### Заключение

В методики ДМК и ТИМ были внедрены и опробованы несколько алгоритмов, позволяющих сглаживать поверхности многоугольных и многогранных лагранжевых сеток. Так как узлы на поверхности топологически связаны с узлами внутри сетки, то для сохранения гладкости всей сетки в целом осуществляется перемещение внутренних узлов.

Предложены алгоритмы релаксации узла и релаксации ребра. Первый алгоритм обладает большим быстродействием, но не позволяет производить сглаживание в нормальных к узлам сетки направлениях. Второй алгоритм не имеет этого недостатка. Оба алгоритма сглаживания позволяют сохранить объем всего тела до и после процедуры сглаживания и могут быть использованы с целью недопущения перемешивания различных веществ.

Для возможности использования процедур сглаживания во время счета были разработаны алгоритмы контроля за состоянием сетки и пересчета величин. Алгоритм пересчета сеточных величин базируется на подсчете входящих в ячейку и исходящих из нее потоков пересчитываемой величины и не требует дополнительных геометрических операций по определению общих частей двух различных сеток, что особенно затруднительно в случае трехмерных нерегулярных многогранных сеток.

Алгоритм пересчета узловых величин основывается на сохранении импульса и кинетической энергии пары узлов.

Задача сглаживания неструктурированных нерегулярных сеток достаточно масштабна. Разработанные автором методы являются лишь ее частичным решением, и, безусловно, будут уточняться и совершенствоваться.

### Список литературы

1. *Мотлохов В. Н., Рассказова В. В., Шапоренко А. Н.* Лагранжева методика ДМК для решения прикладных задач газовой динамики на нерегулярных сетках // I науч. конф. "Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения". Сб. докладов, Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2000. С. 57–63.
  2. *Соколов С. С., Панов А. И., Воронцов А. А., Новиков И. Г., Соболев И. В., Ялозо А. В.* Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 37–52.
  3. *Соколов С. С., Ялозо А. В.* Метод расчета контактной границы для нерегулярных многогранных сеток в методике ТИМ // Там же. Вып. 4. С. 38–45.
  4. *Соколов С. С., Ялозо А. В.* Оператор сглаживания поля скоростей в методиках ТИМ и ДМК // Сб. тез. докл. IV науч.-тех. конф. "Молодежь в науке". Саров, 1–3 ноября 2005 г. С. 35–36.
  5. *Kuprat A., George D., Linnebur E., Trease H., Smith K.* Moving adaptive unstructured 3-D meshes in semiconductor process modeling applications // VLSI Des. 1998. Vol. 6. P. 373.
  6. *Kuprat A., Khamayseh A., George D., Larkey L.* Volume conserving smoothing for piecewise linear curves, surfaces, and triple lines // J. Comp. Phys. 2001. Vol. 172. P. 99–118.
-