

УДК 519.6

НЕЯВНЫЙ КОНЕЧНО-ОБЪЕМНЫЙ МЕТОД РОМБ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ ИЗ ТРЕУГОЛЬНЫХ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ ЯЧЕЕК

Э. М. Вазиев, А. Д. Гаджиев, С. Ю. Кузьмин
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Представлен неявный конечно-объемный метод РОМБ для численного решения двумерных уравнений газовой динамики на нерегулярных сетках из треугольных и четырехугольных ячеек. Рассматриваемый метод основан на лагранжево-эйлеровом описании среды с реализацией метода концентраций, перестройки сетки и пересчета величин методом дробного проектирования. Вектор состояния $(\rho, T, \vec{u})_i^n$ определяется в центрах ячеек, а координаты $\vec{r}_j^n = (r, z)_j^n$ — в узлах сетки. Разностная схема строится на основе интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии для ячейки, что обеспечивает ее консервативность.

При решении задач математического моделирования для систем, состоящих из множества веществ, часто оказывается более предпочтительным лагранжево описание среды. Связано это с тем, что лагранжевы методы четко отслеживают границы раздела веществ, не допуская их размывания. Однако чисто лагранжев счет становится невозможным при больших деформациях. Неплохим выходом из данной ситуации оказалось использование произвольно-лагранжево-эйлерового описания среды с реализацией метода концентраций и приемлемых по точности алгоритмов перестройки сетки. Существует множество методик, реализующих данный подход [1–9]. При этом надо иметь в виду, что при моделировании сложных систем, состоящих из различных веществ, введение эйлеровости приводит к снижению точности расчета. Факторами, вследствие которых это происходит, являются возникающий конвективный перенос, смешанные ячейки, необходимость вводить метод концентраций и модель смеси.

Трудности можно смягчить, используя нерегулярные сетки. Такие сетки проще построить для областей с сильными деформациями и, следовательно, можно дольше поддерживать чисто лагранжев счет. Кроме того, нерегулярные сетки можно легко локально сгущать и разреживать, добиваясь той же точности при меньшем числе ячеек. Нерегулярная сетка, в отличие от регулярной, может быть автоматически построена для области практически с любой сложной геометрией. Это дает возможность производить автоматическую локальную или глобальную перестройку в ходе расчета, тем самым дольше поддерживая безавостный счет. Примеры таких методик даны в [10–12].

В настоящей работе представлен неявный конечно-объемный метод РОМБ для численного решения двумерных уравнений газовой динамики на нерегулярных сетках из треугольных и четырехугольных ячеек. Вектор состояния $(\rho, T, \vec{u})_i^n$ определяется в центрах ячеек, а координаты $\vec{r}_j^n = (r, z)_j^n$ — в узлах сетки. Разностная схема строится на основе интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии для ячейки сетки. Это обеспечивает консервативность схемы.

Отметим, что в схеме РОМБ искусственная диссипация вводится особым образом, как в уравнение движения, так и в уравнение для давления, использованием в операторах $\text{grad } P$, $\text{div } \vec{U}$ диссипативных величин P , \vec{U} , связанных с исходными p , \vec{u} операторными соотношениями $p = P + \delta h a \text{div } \vec{U}$, $\vec{u} = \vec{U} + \theta h \frac{1}{a} \text{grad } P$. Здесь δ , θ — безразмерные коэффициенты искусственной диссипации; a — массовая скорость звука; h — линейный размер ячейки. Отмеченная особенность введения искусствен-

ной диссипации в сочетании с тем, что в схеме РОМБ аппроксимация величин строится с использованием их значений в центре ячейки и на ее гранях без привлечения значений из центров соседних ячеек, обеспечивают методу РОМБ более предпочтительные свойства монотонности по сравнению с традиционными схемами с разнесенным шаблоном. Это оказалось особенно важным при использовании нерегулярных сеток.

Постановка задачи

Пусть D — некоторый объем физического пространства, в котором происходит представляющий интерес процесс течения газа, Σ — гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая объем D . Рассмотрим движение газа, которое описывается следующей системой уравнений газовой динамики:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} - v \operatorname{div} \vec{u} &= 0; \\ \frac{d\vec{u}}{dt} + v \operatorname{grad} p &= \vec{g}; \\ \frac{dE}{dt} + v \operatorname{div} p\vec{u} &= \vec{u}\vec{g} + Q \end{aligned} \quad (1)$$

с уравнениями состояния

$$p = p(v, T); \quad \varepsilon = \varepsilon(v, T). \quad (2)$$

Здесь v — удельный объем ($v = 1/\rho$, ρ — плотность); $\vec{u} = (u_r, u_z)$ — вектор скорости; p — давление; ε — удельная внутренняя энергия; T — температура; \vec{g} — ускорение свободного падения; Q — внешние источники тепла; $\vec{r} = (r, z)$ — радиус-вектор точки в лагранжевой системе координат.

Для системы (1), (2) в области D решается смешанная краевая задача.

Начальные условия:

$$v^0 = v(\vec{r}, t)|_{t=0}; \quad \vec{u}^0 = \vec{u}(\vec{r}, t)|_{t=0}; \quad T^0 = T(\vec{r}, t)|_{t=0}. \quad (3)$$

Граничные условия:

$$\alpha p - \beta(\vec{u} \cdot \vec{n}) = \mu(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \in \Sigma, \quad (4)$$

где параметры α, β удовлетворяют условиям $\alpha(\vec{r}, t) \geq 0$; $\beta(\vec{r}, t) \geq 0$; $\alpha + \beta > 0$; \vec{n} — внешняя нормаль к Σ .

Разностная сетка, геометрические величины

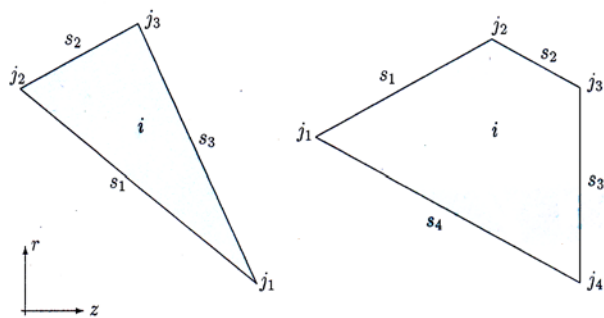


Рис. 1. Примеры ячеек сетки

Ячейки будем нумеровать индексом $i = 1, 2, \dots, I$. Каждой i -й ячейке соответствует свой набор вершин, который обозначим через $j_1, j_2, \dots, j_{\hat{k}_i}$, где \hat{k}_i — число граней i -й ячейки. Через s_k обозначим грани ячеек и одновременно середины этих граней.

Будем рассматривать решение краевой задачи (1)–(4) для осесимметричного или плоского движения газа. Рассматриваемую область D покроем сеткой из треугольных и четырехугольных ячеек, вершины которых заданы координатами $r_j, z_j, j = 1, 2, \dots, J$ (рис. 1). Сетка строится с использованием алгоритма [13]. Предполагаем, что ячейки примыкают друг к другу по полным сторонам своих граней, они не накладываются друг на друга и между ними нет пустот. Обход ячеек осуществляется по направлению против часовой стрелки.

Разностные аналоги уравнений в форме интегральных законов сохранения

Используя неявный подход для системы уравнений (1)–(4), запишем интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии для ячейки i :

$$\begin{aligned} \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} - \frac{1}{m_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (R\vec{n}\Delta\ell\vec{u})_{s_k}^{n+1/2} &= 0; \\ \frac{\vec{u}_i^{n+1} - \vec{u}_i^n}{\tau} + \frac{R_i^*}{m_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (\vec{n}\Delta\ell p)_{s_k}^{n+1/2} &= \vec{g}_i^{1, n+1/2}; \\ \frac{1}{\tau} \left[\left(\varepsilon + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right)_i^{n+1} - \left(\varepsilon + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right)_i^n \right] + \frac{1}{m_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (R\vec{n}\Delta\ell p\vec{u})_{s_k}^{n+1/2} &= (\vec{u} \cdot \vec{g})_i^{n+1/2} + Q_i^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $R_{s_k}^{n+1/2} = R_i^* = 1$ для плоской геометрии; $R_{s_k}^{n+1/2} = r_{s_k}^{n+1/2}$, $R_i^* = \left(\sum_{k=1}^{\hat{k}_i} r_{j_k} \right) / \hat{k}_i$ для случая осевой симметрии; m_i — масса ячейки; \hat{k}_i — число граней ячейки i ; \vec{n}_{s_k} — внешняя нормаль к ребру s_k ; $\Delta\ell_{s_k}$ — длина ребра s_k .

В уравнении движения системы (5) среднее значение R_i^* в ячейке вынесено из-под оператора суммирования. Для методик на регулярных сетках такой прием обеспечивает инвариантность схемы — сохранение сферической симметрии для одномерной задачи, для нерегулярных сеток он будет лишь улучшать выполнение условия инвариантности. Негативной стороной этой процедуры является нарушение консервативности по закону сохранения импульса. Данный прием применяется не только в методе РОМБ, но и практически во всех двумерных методиках.

Из системы (5) видно, что вектор состояния $(\rho, T, \vec{u})_i^n$ определен в центрах ячеек, как в конечно-объемных методах, а координаты $(r, z)_{j_s}^n$ — в вершинах ячеек.

Линеаризация системы уравнений

Система уравнений (5), дополненная уравнениями состояния (2), является нелинейной. Линеаризуем давление p и внутреннюю энергию ε по v и T в окрестности (v^ν, T^ν) :

$$\begin{aligned} p^{\nu+1} &= p(v^{\nu+1}, T^{\nu+1})^{\nu+1} = p^\nu + p_v^\nu (v^{\nu+1} - v^\nu) + p_T^\nu (T^{\nu+1} - T^\nu); \\ \varepsilon^{\nu+1} &= \varepsilon(v^{\nu+1}, T^{\nu+1})^{\nu+1} = \varepsilon^\nu + \varepsilon_v^\nu (v^{\nu+1} - v^\nu) + \varepsilon_T^\nu (T^{\nu+1} - T^\nu), \end{aligned} \quad (6)$$

где ν — индекс итераций по нелинейности. При этом величины v^ν , T^ν , p^ν , ε^ν , а также частные производные p_v^ν , p_T^ν , ε_v^ν , ε_T^ν относятся к моменту времени t^{n+1} .

Используя (6), уравнение для внутренней энергии и уравнение неразрывности, получаем следующую линеаризованную систему уравнений (без уравнения энергии, о нем речь пойдет ниже):

$$\begin{aligned} p_i^{\nu+1} + \tau (a_i^\nu)^2 v_i^\nu \operatorname{div}_h \vec{u}^{n+1/2(\nu+1)} &= p_i^\nu + (a_i^\nu)^2 (v_i^\nu - v_i^n); \\ \vec{u}_i^{\nu+1} + \tau v_i^\nu \operatorname{grad}_h p^{n+1/2(\nu+1)} &= \vec{u}_i^n + \tau \vec{g}_i^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} (a_i^\nu)^2 &= - (p_v)_i^\nu + \left(\frac{p_T}{\varepsilon_T} \right)_i^\nu (\varepsilon_v + p)_i^\nu; \\ v_i^\nu \operatorname{grad}_h p &\equiv \frac{(R_i^*)^\nu}{m_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (\vec{n}\Delta\ell p)_{s_k}; \quad v_i^\nu \operatorname{div}_h \vec{u} \equiv \frac{1}{m_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (R\vec{n}\Delta\ell\vec{u})_{s_k}. \end{aligned} \quad (8)$$

Разностные уравнения с искусственной диссипацией

Введем в систему разностных уравнений (7), дополненную уравнением энергии, искусственную диссипацию следующим образом:

$$\begin{aligned}
 p_i^{\nu+1} + \tau (a_i^\nu)^2 v_i^\nu \operatorname{div}_h \vec{U}^{\nu+1} &= p_i^\nu + (a_i^\nu)^2 (v_i^\nu - v_i^n); \\
 \vec{u}_i^{\nu+1} + \tau v_i^\nu \operatorname{grad}_h P^{\nu+1} &= \vec{u}_i^n + \tau \vec{g}_i^n; \\
 \left(\varepsilon + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right)_i^{\nu+1} &= \left(\varepsilon + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right)_i^n - \tau v_i^\nu \operatorname{div}_h \left(P \vec{U} \right)^{\nu+1} + \tau (\vec{u} \cdot \vec{g})_i^{\nu+1} + \tau Q_i^n.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь *диссипативные* величины $P^{\nu+1}, \vec{U}^{\nu+1}$ относятся к моменту времени $t^{n+1/2} = \gamma t^{n+1} + (1 - \gamma) t^n = t^n + \gamma \tau$, $\gamma \in [0, 5; 1]$ — весовой параметр.

Связь малых p, \vec{u} с большими P, \vec{U} задается соотношениями

$$\begin{aligned}
 (\gamma p^{\nu+1} + (1 - \gamma) p^n)_i &= P_i^{\nu+1} + \delta_i h_i^\nu a_i^\nu \operatorname{div}_h \vec{U}^{\nu+1}; \\
 (\gamma \vec{u}^{\nu+1} + (1 - \gamma) \vec{u}^n)_i &= \vec{U}_i^{\nu+1} + \theta_i \frac{h_i^\nu}{a_i^\nu} \operatorname{grad}_h P^{\nu+1},
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $h_i = \sqrt{S_i}$ — линейный размер ячейки; δ, θ — коэффициенты искусственной диссипации, причем значение коэффициента δ будем вычислять по формуле

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \frac{\rho_i^\nu h_i^\nu}{2a_i^\nu} \left[\left| \left(\operatorname{div}_h \vec{U} \right)_i^\nu \right| - \left(\operatorname{div}_h \vec{U} \right)_i^\nu \right],$$

тем самым введя и квадратичную вязкость с коэффициентом δ_2 .

Подставив соотношения (10) в систему (9), получим новую систему уравнений относительно диссипативных величин P, \vec{U} :

$$\begin{aligned}
 P_i^{\nu+1} + \gamma \tau \left(1 + \delta_i \frac{h_i^\nu}{\gamma \tau c_i^\nu} \right) (a_i^\nu)^2 v_i^\nu \operatorname{div}_h \vec{U}^{\nu+1} &= F_i^\nu; \\
 \vec{U}_i^{\nu+1} + \gamma \tau \left(1 + \theta_i \frac{h_i^\nu}{\gamma \tau c_i^\nu} \right) v_i^\nu \operatorname{grad}_h P^{\nu+1} &= \vec{u}_i^n + \gamma \tau \vec{g}_i^n,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$F_i^\nu = [\gamma p_i^\nu + (1 - \gamma) p_i^n] + (a_i^\nu)^2 \gamma (v_i^\nu - v_i^n); \quad c_i^\nu = \frac{a_i^\nu}{\rho_i^\nu}.$$

Здесь разностные операторы $v_i^\nu \operatorname{div}_h \vec{U}^{\nu+1}, v_i^\nu \operatorname{grad}_h P^{\nu+1}$ определяются по формулам (8).

Таким образом получена система уравнений (11), в которой неизвестными являются $P_i^{\nu+1}, \vec{U}_i^{\nu+1}, P_{s_k}^{\nu+1}, \left(\vec{U} \cdot \vec{n} \right)_{s_k}^{\nu+1}$ — значения диссипативных величин в центрах ячеек и на гранях.

Дополнительные соотношения связи

Для того чтобы система уравнений (11) была замкнутой, надо задать дополнительные соотношения, связывающие значения величин P, \vec{U} в центрах с их значениями на гранях. Будем считать искомыми неизвестными $P_{s_k}^{\nu+1}, \left(\vec{U} \cdot \vec{n} \right)_{s_k}^{\nu+1}$. Если найдены значения этих величин, то из системы уравнений (9) находим значения всех газодинамических величин в центрах ячеек $(\rho, T, \vec{u})_i^{\nu+1}$.

Поскольку в системе уравнений (11) для каждой ячейки i используются внешние нормали \vec{n}_{s_k} , то это приводит к тому, что \vec{n}_{s_k} на одной и той же грани, но для соседних ячеек имеют противоположные знаки. Соответственно этому и величина $\left(\vec{U} \cdot \vec{n} \right)_{s_k}$ будет иметь на данной грани два значения,

противоположные по знаку, тогда как необходимо иметь на каждой грани только одно значение нормальной компоненты скорости. В методе РОМБ для регулярных сеток разностная схема формулируется в терминах нормалей \vec{n}_i, \vec{n}_j , которые вдоль соответствующих каналов ориентированы в сторону роста индексов i, j . При таком определении на каждой грани есть только одна нормаль. Для нерегулярных сеток нет каналов, но есть номера ячеек $i = 1, 2, \dots, I$. Определим нормальную компоненту скорости на грани по формуле

$$W_{s_k} = \left(\vec{U} \cdot \vec{n} \Delta \ell \right)_{s_k} \text{sign}(i_k - i) = \left(\vec{U} \cdot \vec{N} \right)_{s_k},$$

где $\vec{N}_{s_k} = (\vec{n} \Delta \ell)_{s_k} \text{sign}(i_k - i)$ — нормаль, которая направлена в сторону ячейки с большим номером; i — номер текущей ячейки; i_k — номер соседней ячейки по грани s_k .

Для граней, принадлежащих внешней границе, в качестве \vec{N} будем брать произведение внешней единичной нормали на длину стороны, $\vec{n} \Delta \ell$, т. е.

$$(W_{s_k})_{\text{гран}} = \left(\vec{U} \cdot \vec{n} \Delta \ell \right)_{s_k}.$$

С введенными обозначениями систему уравнений (11) можно привести к виду

$$\begin{aligned} P_i^{\nu+1} + \gamma \tau \left(1 + \delta_i \frac{h_i^\nu}{\gamma \tau c_i^\nu} \right) (a_i^\nu)^2 \frac{1}{m_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} R_{s_k}^\nu W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_k - i) &= F_i^\nu; \\ \vec{U}_i^{\nu+1} + \gamma \tau \left(1 + \theta_i \frac{h_i^\nu}{\gamma \tau c_i^\nu} \right) \frac{R_i^\nu}{m_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_k}^\nu P_{s_k}^{\nu+1} &= \vec{u}_i^n + \gamma \tau \vec{g}_i^n. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим теперь дополнительные соотношения связи для четырехугольной и треугольной ячеек.

Для четырехугольной ячейки применим те дополнительные соотношения, что использовались в регулярном случае [14]:

$$P_i^{\nu+1} = \frac{1}{2} (P_{s_1}^{\nu+1} + P_{s_3}^{\nu+1}); \quad P_i^{\nu+1} = \frac{1}{2} (P_{s_2}^{\nu+1} + P_{s_4}^{\nu+1}); \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_i^{\nu+1} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_1 s_3}^\nu &= \frac{1}{2} \left(\vec{U}_{s_2}^{\nu+1} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_2}^\nu - \vec{U}_{s_4}^{\nu+1} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_4}^\nu \right); \\ \vec{U}_i^{\nu+1} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_2 s_4}^\nu &= \frac{1}{2} \left(\vec{U}_{s_3}^{\nu+1} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_3}^\nu - \vec{U}_{s_1}^{\nu+1} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_1}^\nu \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\vec{n}_{s_2 s_4}^\nu, \vec{n}_{s_1 s_3}^\nu$ — нормали к средним линиям $s_2 s_4, s_1 s_3$ соответственно (рис. 2,а), причем они должны оставаться по левую сторону при движении по средней линии от точки s_2 к s_4 или от s_1 к s_3 (см. рис. 2,а).

Формулы (14) можно трактовать следующим образом: поток через грань $s_2 s_4$ равен полусумме потоков, входящего через грань s_1 и выходящего через грань s_3 . Аналогично и для второго направления.

Для треугольной ячейки возьмем дополнительные соотношения в виде

$$P_i^{\nu+1} = \frac{1}{3} (P_{s_1}^{\nu+1} + P_{s_2}^{\nu+1} + P_{s_3}^{\nu+1}); \quad (15)$$

$$\vec{U}_i^{\nu+1} = \frac{1}{3} \left(\vec{U}_{s_1}^{\nu+1} + \vec{U}_{s_2}^{\nu+1} + \vec{U}_{s_3}^{\nu+1} \right). \quad (16)$$

Для того чтобы использовать соотношение для скорости (16), необходимо переписать его таким образом, чтобы вместо скоростей на гранях $\vec{U}_{s_k}^{\nu+1}$ в него входили их проекции на нормали $W_{s_k}^{\nu+1}$. Сделаем это при помощи проецирования соотношения для скорости на нормали к граням. Выберем грань, нормаль к которой наиболее коллинеарна вектору скорости в данной ячейке, т. е. величина

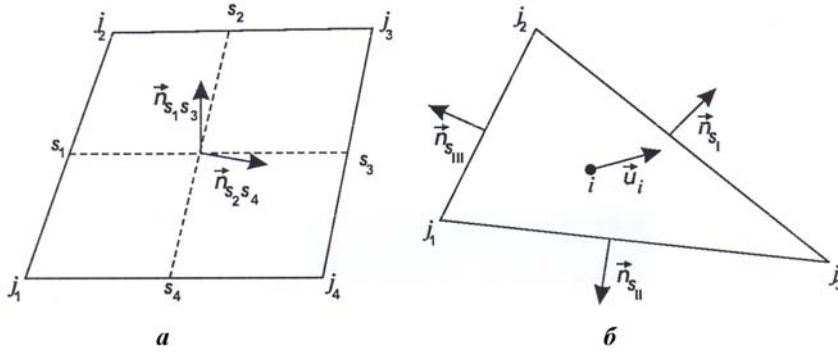


Рис. 2. Пояснение к дополнительным соотношениям связи: а — для четырехугольной ячейки; б — для треугольной ячейки

$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{s_k}^n \vec{u}_i^n|}{|\vec{n}_{s_k}^n| |\vec{u}_i^n|}$ — наибольшая. Обозначим нормаль к выбранной грани через \vec{n}_{s_I} , и будем называть это направление *продольным* (рис. 2,б). Нормали к двум другим граням обозначим соответственно $\vec{n}_{s_{II}}$ и $\vec{n}_{s_{III}}$. Выбор граней совершаем в начале шага и не меняем его до сходимости итераций. Далее, спроецировав (16) на продольное направление $(\vec{n}\Delta\ell)_{s_I}$ и *поперечное* направление $(\vec{n}\Delta\ell)_{s_{III}}$ — $(\vec{n}\Delta\ell)_{s_{II}}$, получим два уравнения, в которые будут входить нормальные компоненты скоростей на гранях. При этом в уравнениях останутся скорости на гранях, их будем брать с предыдущей итерации.

Подставим соотношения связи (13)–(15) и соотношения, полученные из (16) проецированием на продольное и поперечное направления, в систему уравнений (12). Для четырехугольной ячейки получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{P_{s_1}^{\nu+1} + P_{s_3}^{\nu+1}}{2} + \gamma\tau \left(1 + \delta_i \frac{h_i^\nu}{\gamma\tau c_i^\nu} \right) (a_i^\nu)^2 \frac{1}{m_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} R_{s_k}^\nu W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_k - i) = F_i^\nu; \\
 & P_{s_1}^{\nu+1} - P_{s_2}^{\nu+1} + P_{s_3}^{\nu+1} - P_{s_4}^{\nu+1} = 0; \\
 & \frac{1}{2} W_{s_2}^{\nu+1} \text{sign}(i_2 - i) - \frac{1}{2} W_{s_4}^{\nu+1} \text{sign}(i_4 - i) + \gamma\tau \left(1 + \theta_i \frac{h_i^\nu}{\gamma\tau c_i^\nu} \right) \frac{1}{(\rho S)_i^\nu} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (\vec{n}\Delta\ell)_{s_k}^\nu P_{s_k}^{\nu+1} (\vec{n}\Delta\ell)_{s_1s_3}^\nu = \\
 & = (\vec{u}_i^n + \gamma\tau \vec{g}_i^n) (\vec{n}\Delta\ell)_{s_1s_3}^\nu; \\
 & \frac{1}{2} W_{s_3}^{\nu+1} \text{sign}(i_3 - i) - \frac{1}{2} W_{s_1}^{\nu+1} \text{sign}(i_1 - i) + \gamma\tau \left(1 + \theta_i \frac{h_i^\nu}{\gamma\tau c_i^\nu} \right) \frac{1}{(\rho S)_i^\nu} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (\vec{n}\Delta\ell)_{s_k}^\nu P_{s_k}^{\nu+1} (\vec{n}\Delta\ell)_{s_2s_4}^\nu = \\
 & = (\vec{u}_i^n + \gamma\tau \vec{g}_i^n) (\vec{n}\Delta\ell)_{s_2s_4}^\nu.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Для треугольной ячейки система уравнений будет записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \frac{P_{s_1}^{\nu+1} + P_{s_2}^{\nu+1} + P_{s_3}^{\nu+1}}{3} + \gamma\tau \left(1 + \delta_i \frac{h_i^\nu}{\gamma\tau c_i^\nu} \right) (a_i^\nu)^2 \frac{1}{m_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} R_{s_k}^\nu W_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_k - i) = F_i^\nu; \\
 & \frac{1}{3} W_{s_I}^{\nu+1} \text{sign}(i_I - i) - \frac{2}{3} (W_{s_{III}}^{\nu+1} \text{sign}(i_{III} - i) + W_{s_{II}}^{\nu+1} \text{sign}(i_{II} - i)) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \gamma\tau \left(1 + \theta_i \frac{h_i^\nu}{\gamma\tau c_i^\nu} \right) \frac{1}{(\rho S)_i^\nu} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (\vec{n}\Delta\ell)_{s_k}^\nu P_{s_k}^{\nu+1} (\vec{n}\Delta\ell)_{s_I} = \\
 & = (\vec{u}_i^n + \gamma\tau \vec{g}_i^n) (\vec{n}\Delta\ell)_{s_I} - \frac{1}{3} \left(\vec{U}_{s_{III}}^\nu - \vec{U}_{s_{II}}^\nu \right) \left((\vec{n}\Delta\ell)_{s_{III}} - (\vec{n}\Delta\ell)_{s_{II}} \right); \quad (18) \\
 & W_{s_{III}}^{\nu+1} \text{sign}(i_{III} - i) - W_{s_{II}}^{\nu+1} \text{sign}(i_{II} - i) + \gamma\tau \left(1 + \theta_i \frac{h_i^\nu}{\gamma\tau c_i^\nu} \right) \times \\
 & \times \frac{1}{(\rho S)_i^\nu} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (\vec{n}\Delta\ell)_{s_k}^\nu P_{s_k}^{\nu+1} \left((\vec{n}\Delta\ell)_{s_{III}} - (\vec{n}\Delta\ell)_{s_{II}} \right) = (\vec{u}_i^n + \gamma\tau \vec{g}_i^n) \left((\vec{n}\Delta\ell)_{s_{III}} - (\vec{n}\Delta\ell)_{s_{II}} \right) - \\
 & - \frac{1}{3} \left(\vec{U}_{s_I}^\nu - \vec{U}_{s_{II}}^\nu \right) \left((\vec{n}\Delta\ell)_{s_I} - (\vec{n}\Delta\ell)_{s_{II}} \right) + \frac{1}{3} \left(\vec{U}_{s_I}^\nu - \vec{U}_{s_{III}}^\nu \right) \left((\vec{n}\Delta\ell)_{s_I} - (\vec{n}\Delta\ell)_{s_{III}} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, для четырехугольной ячейки имеются четыре уравнения относительно восьми величин на гранях, а для треугольной — три уравнения относительно шести величин на гранях.

Учет граничных условий

Граничное условие на внешней границе в разностном виде имеет форму

$$\alpha_{s_l} P_{s_l}^{\nu+1} - \beta_{s_l} \left(\vec{U}^{\nu+1} \cdot \vec{n}^\nu \right)_{s_l} = \mu_{s_l}, \quad l = 1, 2, \dots, k_{\text{гран}}. \quad (19)$$

Преобразуем уравнение (19) так, чтобы в него вместо \vec{U} входило W :

$$\alpha_{s_l} P_{s_l}^{\nu+1} - \frac{\beta_{s_l}}{\Delta\ell_{s_l}^\nu} W_{s_l}^{\nu+1} = \mu_{s_l}. \quad (20)$$

Именно в таком виде граничные условия будут добавлены в систему линейных уравнений.

Видно, сколь просто ставится граничное условие в методе РОМБ: оно берется в том виде, в котором задано.

Приведение системы уравнений к векторно-матричному виду

Проверим на замкнутость полученную систему линейных уравнений, сравнив количество неизвестных с количеством уравнений. Число ячеек равно I , ячейка i имеет \hat{k}_i граней, число граничных граней равно $k_{\text{гран}}$. Общее число граней равно $S = \frac{1}{2} \left(k_{\text{гран}} + \sum_{i=1}^I \hat{k}_i \right)$. На каждой грани неизвестными являются две величины $P_{s_k}^{\nu+1}$ и $W_{s_k}^{\nu+1}$, поэтому общее число неизвестных равно $2S$. Число уравнений (17), (18) равно $\sum_{i=1}^I \hat{k}_i$, число граничных условий (20) равно $k_{\text{гран}}$. Общее число уравнений равно $k_{\text{гран}} + \sum_{i=1}^I \hat{k}_i$, что в точности совпадает с числом неизвестных. Значит, полученная система линейных уравнений является замкнутой.

Введем в рассмотрение вектор-столбец $\Phi^{\nu+1} = (P_1^{\nu+1}, P_2^{\nu+1}, \dots, P_S^{\nu+1}, W_1^{\nu+1}, W_2^{\nu+1}, \dots, W_S^{\nu+1})^T$, составленный из неизвестных величин $P_s^{\nu+1}, W_s^{\nu+1}$, $s = 1, 2, \dots, S$.

Из коэффициентов уравнений (17), (18) и (20) составим матрицу M^ν . Перечисление строк будем производить в порядке возрастания номеров ячеек i , т. е. сначала записываем в матрицу M^ν коэффициенты уравнений первой ячейки, затем второй и так далее до последней. Порядок расположения элементов в строках соответствует порядку неизвестных в векторе $\Phi^{\nu+1}$. Последние строки матрицы M^ν будут соответствовать уравнениям граничных условий (20).

Наконец, соберем вектор-столбец правых частей уравнений: $\mathbf{B}^\nu = (B_1^\nu, B_2^\nu, \dots, B_{2S}^\nu)^T$. Теперь можно представить систему уравнений (17), (18), (20) в виде

$$M^\nu \Phi^{\nu+1} = \mathbf{B}^\nu. \quad (21)$$

Решение (21) будем искать, используя библиотеки для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами, например [15].

После решения системы (21) будут известны $P_s^{\nu+1}$, $W_s^{\nu+1}$, $s = 1, 2, \dots, S$. Теперь, зная значения *вязких* величин на всех гранях, можно вычислить значения всех остальных газодинамических величин.

Определение скорости узлов $\vec{U}_j^{\nu+1}$, новых координат $\vec{r}_j^{\nu+1}$ и плотностей $\rho_j^{\nu+1}$

Пусть к внутреннему узлу примыкает \hat{k}_j граней, на каждой из которых известно значение W_{s_k} , (рис. 3, *a*). Задача — реконструировать декартовы компоненты вектора \vec{U}_j по известным нормальным компонентам W_{s_k} на примыкающих к узлу ребрах. Для этого воспользуемся методом наименьших квадратов аналогично тому, как это было предложено в работе [16]. Составим квадратичный функционал

$$Q = \sum_{k=1}^{\hat{k}_j} \left(\vec{U}_j \cdot \vec{N}_{s_k} - W_{s_k} \right)^2.$$

Будем определять скорость узла из условия минимума функционала Q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial (U_r)_j} &= 2 \sum_{k=1}^{\hat{k}_j} \left(\vec{U}_j \cdot \vec{N}_{s_k} - W_{s_k} \right) (N_r)_{s_k} = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial (U_z)_j} &= 2 \sum_{k=1}^{\hat{k}_j} \left(\vec{U}_j \cdot \vec{N}_{s_k} - W_{s_k} \right) (N_z)_{s_k} = 0. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^{\hat{k}_j} (N_r)_{s_k} (N_r)_{s_k}; & b_1 &= \sum_{k=1}^{\hat{k}_j} (N_r)_{s_k} (N_z)_{s_k}; & c_1 &= \sum_{k=1}^{\hat{k}_j} W_{s_k} (N_r)_{s_k}; \\ b_2 &= \sum_{k=1}^{\hat{k}_j} (N_z)_{s_k} (N_z)_{s_k}; & c_2 &= \sum_{k=1}^{\hat{k}_j} W_{s_k} (N_z)_{s_k}, \end{aligned}$$

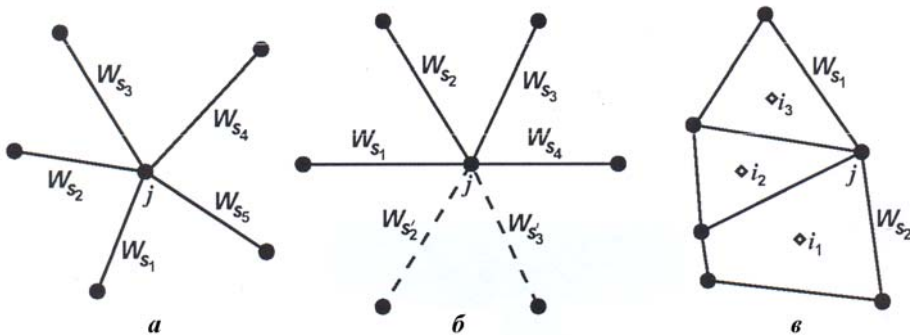


Рис. 3. Расчет скорости узла: *a* — внутреннего; *b* — на зеркальной границе; *в* — на внешней границе

легко получить выражения для компонент скорости в узле:

$$(U_r)_j = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1^2 - a_1 b_2}; \quad (U_z)_j = \frac{b_1 c_1 - a_1 c_2}{b_1^2 - a_1 b_2}.$$

Для узлов, принадлежащих зеркальной границе (граничное условие $(\vec{U}^{\nu+1} \cdot \vec{n}^\nu)_{s_l} = 0$, рис. 3,б), скорость будем определять аналогичным способом, учитывая при этом грани, полученные зеркальным отражением (s'_2 и s'_3 на рис. 3,б).

Скорость узлов, принадлежащих внешней границе (рис. 3,в), определяем иначе. Сначала определяем среднюю скорость в узле:

$$\vec{U}'_j = \left(\sum_{i=1}^{i_j} K_i^\nu \vec{U}_i^{\nu+1} \right) / \left(\sum_{i=1}^{i_j} K_i^\nu \right),$$

где $K_i^\nu = \left(\frac{\rho S}{\gamma \tau + \theta h \rho / a} \right)_i^\nu$. Скорость в ячейках $\vec{U}_i^{\nu+1}$ определяем из второго уравнения системы (11).

Далее определяем вектор нормали в узле \vec{n}_j , тангенциальный вектор $\vec{\tau}_j$ и значение нормальной компоненты W_j :

$$\vec{n}_j = \frac{(\vec{n} \Delta \ell)_{s_1} + (\vec{n} \Delta \ell)_{s_2}}{\Delta \ell_{s_1} + \Delta \ell_{s_2}}; \quad \vec{\tau}_j \perp \vec{n}_j; \quad W_j = \frac{W_{s_1} + W_{s_2}}{\Delta \ell_{s_1} + \Delta \ell_{s_2}}.$$

И наконец, находим скорость в узле, решая два уравнения:

$$\vec{U}_j^{\nu+1} \cdot \vec{n}_j = W_j; \quad \vec{U}_j^{\nu+1} \cdot \vec{\tau}_j = \vec{U}'_j \cdot \vec{\tau}_j,$$

т. е. нормальную компоненту в узле находим путем осреднения W_{s_1} , W_{s_2} на гранях, а тангенциальную — путем проецирования скорости \vec{U}'_j .

После определения скорости узлов рассчитываем новые координаты: $\vec{r}_j^{n+1(\nu+1)} = \vec{r}_j^n + \tau \vec{U}_j^{\nu+1}$.

Исходя из новых координат, вычисляем новые плотности: $\rho_i^{n+1(\nu+1)} = \frac{m_i}{V_i^{n+1(\nu+1)}}$.

Решение уравнения движения и уравнения энергии

Теперь решаем второе и третье уравнения системы (9) для определения $\vec{u}_i^{\nu+1}$, $\varepsilon_i^{\nu+1}$. Из второго уравнения находим

$$\vec{u}_i^{\nu+1} = \vec{u}_i^n + \tau \vec{g}_i^n - \tau \frac{1}{(\rho S)_i^{\nu+1}} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (\vec{n} \Delta \ell)_{s_k}^{\nu+1} P_{s_k}^{\nu+1}.$$

Используя найденные скорости, из третьего уравнения системы (9) определяем внутреннюю энергию:

$$\varepsilon_i^{\nu+1} = \left(\varepsilon + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right)_i^n - \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right)_i^{\nu+1} - \frac{\tau}{m_i} \sum_{k=1}^{\hat{k}_i} (RPW)_{s_k}^{\nu+1} \text{sign}(i_k - i) + \tau \vec{u}_i^{\nu+1} \cdot \vec{g}_i^n + \tau Q_i^n.$$

Далее, из линеаризации уравнения состояния для внутренней энергии итерационно определяем температуру:

$$T_i^{k+1} = T_i^k + \frac{1}{(\varepsilon_T)_i^k} (\varepsilon_i^{\nu+1} - \varepsilon_i^k); \quad T_i^{k=0} = T_i^\nu; \quad \varepsilon_i^k = \varepsilon(v_i^{\nu+1}, T_i^k).$$

На этом вычисления на итерации заканчиваются, переходим к следующей итерации и так до сходимости, пока в каждой ячейке не будет выполнено условие

$$|p_i^{\nu+1} - p_i^\nu| \leq \varepsilon_{\text{сх}} (1 + p_i^\nu).$$

Примеры расчетов

Обжатие эллипсоида равномерным давлением. Постановка задачи взята из [17]. В начальный момент времени физическая область представляет собой эллипсоид вращения с полуосями $a_z = 1$; $a_r = 1,516$, заполненный идеальным газом $\left(p = \rho T; \varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} T\right)$ с показателем адиабаты $\gamma = 4/3$, начальной плотностью $\rho_0 = 200$ и температурой $T = 10^{-5}$. На внешней границе задано давление

$$p(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 5; \\ 5, & t \geq 5. \end{cases}$$

При заданных начальных и граничных условиях задача не имеет точного решения, известно лишь качественное поведение внешней границы газа со временем. При временах, близких к $t = 9$, эллипсоид превращается в диск. Затем происходит отражение ударных волн от плоскости $z = 0$, приводящее при значениях $t > 14$ к образованию струи вдоль оси Oz .

На рис. 4 приведены изображения расчетной области, полученные на различные моменты времени. Расчет проводился на нерегулярной четырехугольной сетке с начальным числом ячеек, равным 1100. Как видно из рисунка, поведение внешней границы области описывается удовлетворительно.

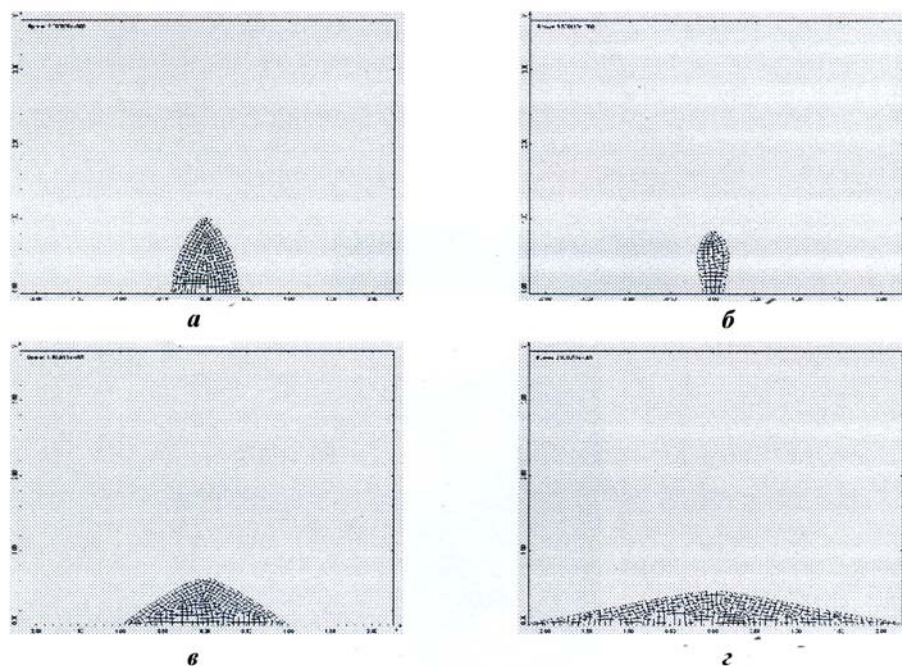


Рис. 4. Обжатие эллипсоида равномерным давлением. Вид расчетной области на разные моменты времени: $a - t = 6,0$; $б - t = 9,5$; $в - t = 14,0$; $г - t = 20,0$

Задача о падении плоской ударной волны на тяжелый угол. Постановка задачи взята из [10]. Начальная область для данной задачи приведена на рис. 5. Размеры всей области: $0 \leq r \leq 12$ см; $0 \leq z \leq 49$ см. Размеры области, занятой фреоном: $0 \leq r \leq 6$ см; $0 \leq z \leq 9$ см. В воздухе давление $p_1 = 1$ атм, плотность $\rho_1 = 0,001205$ г/см³. Во фреоне давление $p_2 = 1$ атм, плотность $\rho_2 = 0,00513$ г/см³. Уравнение состояния вещества — для идеального газа с $\gamma_1 = 1,4$ для воздуха и $\gamma_2 = 1,139$ для фреона. На правой границе задано постоянное давление $p = 2,26$ атм.

Расчет проводился на сетке, состоящей из четырехугольных ячеек, с начальным числом ячеек, равным 9 408.

Сравнение экспериментальных и расчетных зависимостей координат точек A и B , лежащих на жестких стенках, от времени приведено на рис. 6.

Из графиков видно удовлетворительное совпадение результатов численного расчета и эксперимента. Необходимо заметить, что экспериментальные точки были взяты с графиков из [10] и при их "снятии" могли быть внесены существенные ошибки.

На рис. 7 представлен фрагмент счетной области на два момента времени. Вид области, занимаемой фреоном, качественно согласуется с экспериментом (см. [10]).

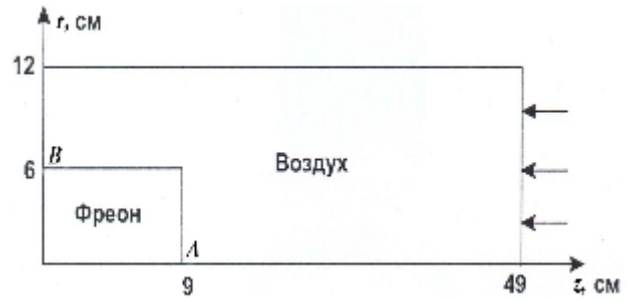


Рис. 5. Задача о падении плоской ударной волны на тяжелый угол. Начальный вид системы

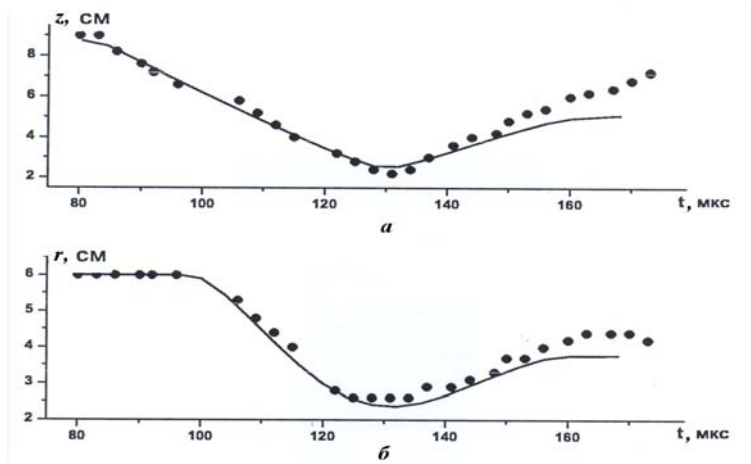


Рис. 6. Задача о падении плоской ударной волны на тяжелый угол. Зависимость от времени координат точек $A(a)$ и $B(b)$: — — численное решение; • — эксперимент

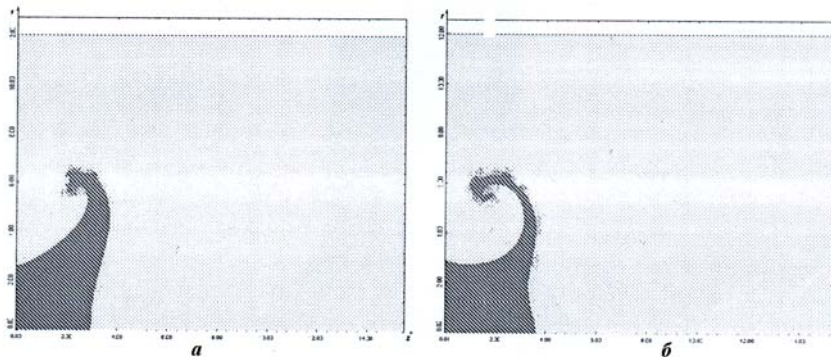


Рис. 7. Задача о падении плоской ударной волны на тяжелый угол. Вид области: $a - t = 124,0$ мкс; $b - t = 144,0$ мкс

Задача о развитии тейлоровской неустойчивости на линейной стадии (в плоской постановке). Постановка данной задачи взята из [17]. Задана плоская система двух слоев — тяжелой и легкой несжимаемых жидкостей, разделенных границей, имеющей синусоидальную форму (рис. 8).

Всей системе сообщается постоянное ускорение $g = 100 \text{ см/с}^2$, направленное от тяжелого вещества к легкому.

Форма границы между веществами задана уравнением

$$y_0^*(x) = y_0 + a_0 \cos nx,$$

где $n = 2\pi/\lambda$, $\lambda = 1,256 \text{ см}$ — длина волны возмущения; $a_0 = 0,04 \text{ см}$ — начальная амплитуда. Значения y_0, y_1, y_2 брались равным

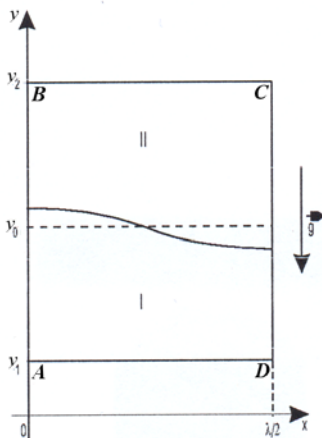


Рис. 8. Начальная геометрия задачи о развитии тейлоровской неустойчивости

Значения показателей адиабаты γ_i выбраны из условия равенства давлений на невозмущенной границе раздела: $\gamma_1 = 4,0; \gamma_2 = 1,3$. Несжимаемость жидкостей моделируется заданием больших значений начальных энергий: $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{02} = \varepsilon_0 = 1000$. В начальный момент задано распределение плотности $\rho(y)$, при котором система с невозмущенной границей раздела (при $a_0 = 0$) находится в равновесии (при наличии ускорения \vec{g}):

$$\rho(y) = \begin{cases} \rho_{01} \exp\left(\frac{g}{(\gamma_1 - 1)\varepsilon_0}(y_0^* - y)\right), & y_1 \leq y \leq y_0^*; \\ \rho_{02} \exp\left(\frac{g}{(\gamma_2 - 1)\varepsilon_0}(y_0^* - y)\right), & y_0^* \leq y \leq y_2. \end{cases}$$

Значения ρ_{01} и ρ_{02} равны соответственно 1 и 10. На всех границах (AB, BC, CD, AD) задано условие жесткой стенки.

Поставленная задача имеет точное решение в линейном приближении в предположении малости амплитуды возмущения границы раздела:

$$a(t) = y(0, t) - y\left(\frac{\lambda}{2}, t\right), \quad a(t) \ll \lambda.$$

Если ввести переменные ξ и η по формулам

$$\xi = \sqrt{\frac{g}{2\lambda} \frac{\rho_{02} - \rho_{01}}{\rho_{02} + \rho_{01}}} t; \quad \eta = \operatorname{arcch} \frac{a(t)}{2a_0},$$

то зависимость амплитуды возмущения границы от времени примет вид $\eta = 2\sqrt{\pi}\xi$.

Для заданных параметров задачи $\xi = 5,707t; \eta = \operatorname{arcch}\left(\frac{a(t)}{0,08}\right)$ расчет проводился на треугольных и четырехугольных сетках. Шаг по времени выбирался автоматически. Результаты расчетов, зависимости η от ξ , приведены на рис. 9. Из графиков видно, что численный расчет удовлетворительно передает линейную стадию развития неустойчивости: в начальные моменты времени точки лежат близко к прямой.

На рис. 10 представлена динамика развития тейлоровской неустойчивости. Рисунки развернуты на 90 градусов для лучшего представления.

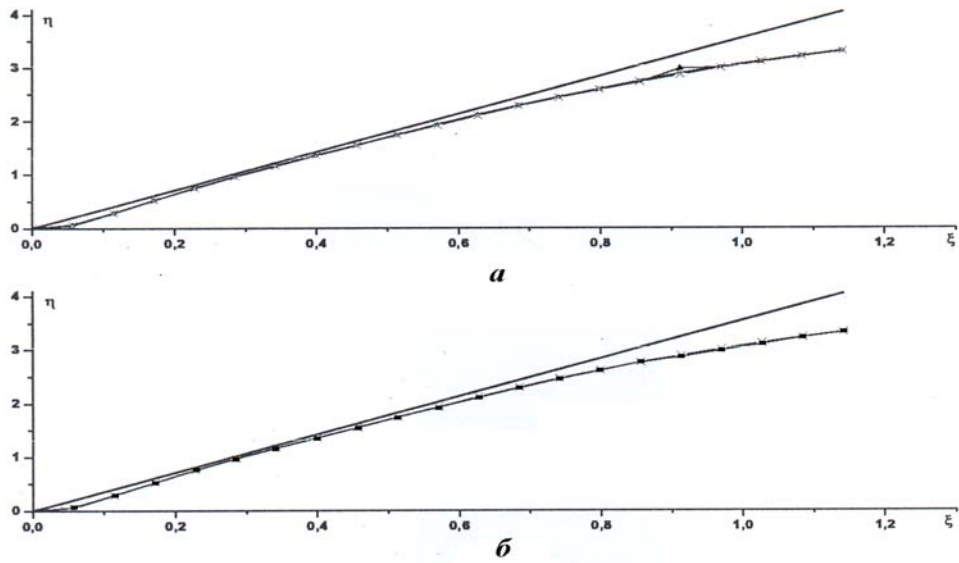


Рис. 9. Развитие тейлоровской неустойчивости. Расчетная зависимость амплитуды возмущения границы раздела сред от времени: *a* — на треугольных сетках: \blacktriangle — 3 730 ячеек; \times — 6 708 ячеек; ∇ — 14 536 ячеек; — — — линейное приближение; *b* — на четырехугольных сетках: \blacksquare — 6 319 ячеек; \times — 14 554 ячейки; — — — линейное приближение



Рис. 10. Развитие тейлоровской неустойчивости

Заключение

Предложен и опробован неявный конечно-объемный метод РОМБ для численного решения двумерных уравнений газовой динамики на нерегулярных сетках из треугольных и четырехугольных ячеек. Метод является обобщением регулярной схемы РОМБ [14] на случай нерегулярных сеток и удовлетворяет требованию предельного перехода, когда сетка становится регулярной.

Проведенные численные расчеты показывают дееспособность методики и демонстрируют эффективность использования нерегулярных сеток.

Список литературы

1. Бисярин А. Ю., Грибов В. М., Зубов А. Д. и др. Комплекс ТИГР для расчета двумерных задач математической физики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1984. Вып. 3(17). С. 34–41.
2. Софронов И. Д., Винокуров О. А., Змушко В. В. и др. Комплекс программ МИМОЗА-99 // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 37–41.
3. Софронов И. Д., Делов В. И., Дмитриева Л. В. и др. Методика Д для расчета многомерных задач механики сплошной среды в переменных Лагранжа на регулярной сетке // Там же. 1999. Вып. 4. С. 42–50.
4. Сучков В. А., Шнитко А. С. Методика и комплекс программы ГРАД для решения нестационарных задач механики сплошной среды // Тез. III совмест. конф. по вычислительной математике. США, Лос-Аламос, 1995 г. С. 123–134.
5. Софронов И. Д., Воронин Б. Л., Скрыпник С. И. и др. Методика и комплексы программ РАМЗЕС, РАМЗЕС-КП // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 27–31.
6. Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф., Шанин А. А. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 4. С. 566.
7. Быченков В. А., Гаджиева В. В. Метод СПРУТ расчета двумерных неустановившихся течений разрушаемых сред // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1978. Вып. 2(2). С. 17–22
8. Аврорин Е. Н., Анучина Н. Н., Гаджиева В. В., Елсуков В. П., Мордвинов Б. П. Численное моделирование взаимодействия пылевидных частиц кометы с космическим алгоритмом // ФГВ. 1996. Т. 32, № 2. С. 117–123
9. Анучина Н. Н., Волков В. И., Еськов Н. С. Численный метод расчета контактных границ с большими деформациями. // V Забабахинские науч. чтения. Снежинск, 21–25 сентября 1998 г.
10. Волков С. Г., Жогов Б. М., Софронов И. Д. Современное состояние методики МЕДУЗА // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 57–63.
11. Рассказова В. В., Софронов И. Д., Мотлохов В. М. и др. Методика решения многомерных задач механики сплошной среды на нерегулярных сетках // Там же. С. 51–56.
12. Соколов С. С., Панов А. И., Воропинов А. А. и др. Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Там же. 2005. Вып. 3. С. 37–52.
13. Сковпень А. В. Усовершенствованный алгоритм построения нерегулярных четырехугольных сеток. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2004.
14. Гаджиев А. Д., Кузьмин С. Ю., Лебедев С. Н., Писарев В. Н. Неявный конечно-разностный метод РОМБ для решения двумерных уравнений газовой динамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 4. С. 11–21.
15. Davis T. A. Algorithm 832: UMFPACK, an unsymmetric-pattern multifrontal method // ACM Trans. Math. Softw. 2004. Vol. 30(2). P. 196–199.
16. Dukowicz J. K., Meltz B. J. A. Vorticity errors in multidimensional Lagrangian codes // J. Comp. Phys. 1992. Vol. 99. P. 115.
17. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И. и др. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 2. С. 3–14.