

УДК 519.6

## МЕТОДИКА ТИМ-2D ДЛЯ РАСЧЕТА ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ МНОГОУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ СВЯЗЕЙ В УЗЛАХ

С. С. Соколов, А. А. Воропинов, И. Г. Новиков, А. И. Панов, И. В. Соболев, А. А. Пушкарев  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассматривается методика ТИМ-2D, предназначенная для расчета двумерных задач механики сплошных сред на многоугольных нерегулярных лагранжевых сетках. Методика позволяет проводить расчеты на сетках с произвольным количеством *связей* в узлах (примыкающих к узлу ячеек и ребер). Для всех типов сеток используется единый счетный алгоритм. Расчет начальных данных и решение уравнений механики сплошных сред выполняются в цилиндрической или двумерной декартовой системе координат. Для расчета задач газодинамики, упругопластичности и магнитной гидродинамики используются явные конечно-разностные схемы; кинематические величины хранятся в узлах счетной сетки, термодинамические величины — в центрах ячеек. Для расчета задач теплопроводности используется неявная конечно-разностная схема.

### Введение

Методика ТИМ-2D предназначена для расчета двумерных задач механики сплошных сред на многоугольных неструктурированных лагранжевых сетках. Она позволяет проводить расчеты на сетках с произвольным количеством *связей* в узлах (примыкающих к узлу ячеек и ребер). Методика ТИМ-2D, с одной стороны, базируется на методиках ДМК-УП [1] и ДМК-ТП [2], с другой стороны, она является адаптацией методики ТИМ [3] на двумерный случай. Для всех типов сеток используется единый счетный алгоритм. Уравнения механики сплошных сред решаются в цилиндрической или двумерной декартовой системе координат.

В методике ТИМ-2D можно проводить расчеты на сетках, состоящих из произвольных несамопересекающихся ячеек. В ТИМ-2D реализована коррекция счетной сетки методом наложения на узлы *дифференцируемых связей*, с помощью которой можно поддерживать ячейки определенной формы и требуемого качества на протяжении всего расчета [4]. Приемлемыми для аппроксимации уравнений движения и энергии являются несколько основных типов счетных сеток:

- содержащих *звездные* ячейки<sup>1</sup>;
- с выпуклыми углами, образованными двумя ребрами ячейки с общим узлом (ячейки — выпуклые многоугольники);
- с произвольными несамопересекающимися ячейками.

Для расчета задач газодинамики и упругопластичности используются явные конечно-разностные схемы. Кинематические величины хранятся в узлах счетной сетки, термодинамические величины — в центрах ячеек. Для численного решения уравнения теплопроводности используется полностью неявная разностная схема. Аппроксимация пространственных производных осуществляется с использованием дифференцирования разрывных функций в обобщенном смысле. Получаемая при этом система разностных уравнений имеет симметричную и положительно определенную матрицу. Это позволяет применять для ее решения итерационный метод сопряженных градиентов с использованием различных предобуславливателей.

<sup>1</sup>Ячейка называется *звездной*, если все ее узлы находятся в прямой видимости из ее центра

При решении сложных двумерных задач начальную геометрию системы часто приходится разбивать на счетные области. Такое разбиение иногда бывает необходимо для более точного описания взаимодействия тел на выделенной линии скольжения (контактной границе). Методика ТИМ-2D позволяет проводить расчеты в многообластной постановке. При этом предполагается, что разные счетные области (тела) могут взаимодействовать друг с другом вдоль контактных границ [1].

Как известно, для всех многомерных методик, использующих лагранжевы координаты, одна из проблем — это поддержание приемлемой счетной сетки. В процессе счета ячейки могут вытягиваться в одном из направлений, что приводит к нарушению аппроксимации решения, либо ячейки могут сильно сжиматься, что приводит к уменьшению счетного шага. Поэтому для успешного применения методики ТИМ-2D в численных экспериментах она оснащена аппаратом локальных перестроек многоугольных сеток с произвольным числом соседства ячеек в узлах.

## 1. Дифференциальные уравнения движения

При рассмотрении газодинамических и упругопластических течений будем ограничиваться классом задач в рамках сплошной сжимаемой среды. Уравнения, описывающие движения сплошной сжимаемой среды, отражают основные законы сохранения механики [5, 6] (сохранения массы, количества энергии, количества движения и его момента). Дифференциальные уравнения движения сплошной изотропной среды имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} \vec{U}; \\ \rho \frac{d\vec{U}}{dt} &= -\operatorname{grad} P + \operatorname{div} S + \rho \vec{g}; \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -P \frac{\operatorname{div} \vec{U}}{\rho} + \frac{1}{\rho} S_p(SD) + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \varkappa \operatorname{grad} T; \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{U}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $t$  — время;  $\rho$  — плотность вещества;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $P = P(\rho, \varepsilon)$  — давление;  $T$  — температура;  $\varkappa = \varkappa(T)$  — коэффициент теплопроводности;  $\vec{U}(u, v)$  — вектор скорости;  $\vec{r}(x, y)$  — радиус-вектор;  $\vec{g}(x, y)$  — ускорение силы тяжести;  $S$  — девиатор тензора напряжений;  $D$  — тензор скоростей деформации;  $S_p(SD)$  — первый инвариант тензора  $SD$ .

Для замыкания системы дифференциальных уравнений сплошной сжимаемой среды используются уравнение состояния среды и уравнения физических и кинематических соотношений между компонентами тензора напряжений, компонентами тензора деформаций и тензора скоростей деформаций.

Девиатор тензора напряжений имеет вид  $S = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & 0 \\ S_{xy} & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & S_{\theta\theta} \end{pmatrix}$ , где  $S_{xx} = \sigma_{xx} + p$ ;

$S_{yy} = \sigma_{yy} + p$ ;  $S_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} + p$ ;  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{\theta\theta}$  — компоненты тензора напряжений  $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & S_{xy} & 0 \\ S_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix}$ ;

$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{\theta\theta})$  — давление (гидростатическая составляющая тензора напряжений);

$S_p(SD) = S_{xx}\dot{\varepsilon}_{xx} + S_{yy}\dot{\varepsilon}_{yy} + S_{\theta\theta}\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} + 2S_{xy}\dot{\varepsilon}_{xy}$ .

Если для описания среды задается газодинамическая модель, то  $S = 0$ ; если используется упругопластическая модель, то  $S = S^{yp}$ , где  $S^{yp}$  — девиатор тензора упругопластических напряжений.

Компоненты тензора скоростей деформации  $D = \dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & 0 \\ \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} \end{pmatrix}$  в декартовой системе координат определяются как

$$\dot{\epsilon}_{x_i x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (2)$$

где  $U_i, U_j$  — компоненты вектора скорости;  $x_i, x_j$  — компоненты радиуса-вектора.

Компоненты тензора скоростей деформаций для осесимметричных деформаций вычисляются следующим образом:  $\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ;  $\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \frac{v}{y}$ ;  $\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ .

В случае плоских деформаций  $\dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \epsilon_{\theta\theta} = 0$ ;  $\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ;  $\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ .

Компоненты тензора скоростей вращения определяются как  $\dot{\omega}_{x_i x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$ .

Дифференциальная форма закона Гука записывается в следующем виде [7]:

$$\dot{S}_{xx} = 2G \left( \dot{\epsilon}_{xx} - \frac{1}{3} \dot{V} \right) + R_{xx}; \quad \dot{S}_{yy} = 2G \left( \dot{\epsilon}_{yy} - \frac{1}{3} \dot{V} \right) + R_{yy}; \quad \dot{S}_{\theta\theta} = 2G \left( \dot{\epsilon}_{\theta\theta} - \frac{1}{3} \dot{V} \right); \quad \dot{S}_{xy} = G \dot{\epsilon}_{xy} + R_{xy},$$

где  $G$  — модуль сдвига,  $R_{ij}$  — поправка на (малый) поворот [7] среды (как твердого тела),  $V$  — объем ячейки.

Условие текучести Мизеса:  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - \frac{2}{3} (Y^0)^2 \leq 0$ , где  $Y^0$  — предел текучести материала;  $S_1, S_2, S_3$  — главные девиаторные напряжения.

Для определения девиаторной составляющей тензора напряжения в области упругих деформаций используется закон Гука в дифференциальной форме:  $\frac{\delta S^{yp}}{\delta t} = 2G \left( D - \frac{1}{3} S_p D \right)$ , где модуль сдвига  $G$  может быть как константой (для идеально-пластических сред), так и некоторой функцией (для сред с упрочнением и разупрочнением);  $\frac{\delta}{\delta t}$  — производная (Яумана) по времени вдоль направления движения [7]. В области пластических деформаций для корректировки девиатора тензора напряжений используется условие текучести Мизеса:  $\frac{2}{3} \left( S_{ij}^{yp} S_{ij}^{yp} \right) = Y^2$ , где предел текучести  $Y$  может быть как константой (для идеально-пластических сред), так и некоторой функцией (для материалов с упрочнением и разупрочнением).

Если для описания материала используется упруговязкопластическая модель, то  $P = P(\rho, \epsilon) + p^B$ ,  $S = S^{yp} + S^B$ , где  $p^B = \frac{1}{3} \mu_1 S_p D$  — вязкое давление;  $S^B = \mu_2 \left( D - \frac{1}{3} S_p D \right)$  — девиатор тензора вязких напряжений;  $\mu_1, \mu_2$  — коэффициенты первой и второй динамической вязкости.

Для *размазывания* ударных волн используется комбинация квадратичной и линейной вязкостей:  $q = q_l + q_{kv}$ ,

$$q_l = \begin{cases} 0 & \text{при } \operatorname{div} \vec{U} \geq 0; \\ c_{зв} h \left| \operatorname{div} \vec{U} \right| \rho a_l & \text{при } \operatorname{div} \vec{U} < 0; \end{cases} \quad q_{kv} = \begin{cases} 0 & \text{при } \operatorname{div} \vec{U} \geq 0; \\ a_{kv} h^2 \rho \left( \left| \operatorname{div} \vec{U} \right| \right)^2 & \text{при } \operatorname{div} \vec{U} < 0, \end{cases}$$

где  $h$  — характерный линейный размер ячейки;  $c_{зв}$  — скорость звука;  $a_l$  и  $a_{kv}$  — коэффициенты линейной и квадратичной вязкостей соответственно.

## 2. Конечно-разностная аппроксимация

Область интегрирования разбивается на ячейки в виде многоугольников. Разностная схема, используемая в методике для аппроксимации дифференциальных уравнений механики сплошной (в газодинамическом и упругопластическом приближении) среды, строится аналогично схеме Неймана. Каждый узел разностной сетки (вершина многоугольника) описывается координатами и имеет скорость, которая считается постоянной в окрестности узла. Масса, удельная внутренняя энергия, плотность вещества, тензор напряжений, тензор скоростей деформаций, искусственная вязкость относятся к ячейкам сетки и считаются постоянными внутри них.

Для построения разностной схемы в осесимметричной области  $L$  рассматривается сечение области интегрирования плоскостью  $Oxr$  ( $Ox$  — ось вращения). Область  $L$  покрывается нерегулярной многоугольной лагранжевой сеткой. Вершины многоугольников являются узлами сетки, в них определены векторные величины  $\vec{r} = (x, r)$  и  $\vec{u} = (u, v)$ . Элементами рассматриваемых сеток (ячейками) являются несамопересекающиеся многоугольники [4].

Аппроксимация уравнений движения, энергии и уравнений для вычисления компонент тензора скоростей деформаций в цилиндрических координатах строится с помощью интегроинтерполяционного метода, описанного в [1]. Для получения пространственной аппроксимации этих уравнений производится интегрирование их по элементу пространства, полученному вращением плоской фигуры на один радиан вокруг оси симметрии.

Для построения разностной схемы в случае плоских деформаций в области  $L$  рассматривается сечение области интегрирования плоскостью  $Oxy$ . Аналогично осесимметричному случаю область интегрирования  $L$  покрывается многоугольной лагранжевой сеткой. Интегрирование проводится по плоской фигуре в плоскости  $Oxy$  с использованием формул Гаусса—Остроградского.

При построении конечно-разностных соотношений считается, что:

- 1) давление, плотность, дивергенция тензора напряжений, вязкость, тензор скоростей деформаций определены внутри многоугольников и постоянны внутри них;
- 2) каждой ячейке соответствует масса вещества, заключенная в ее объеме;
- 3) узлы характеризуются координатами и вектором скорости;
- 4) каждому узлу приписывается некая масса, которая состоит из частей масс ячеек, примыкающих к данному узлу, и в процессе счета не меняется;
- 5) ускорения постоянны внутри фигуры, ограничивающей объем узла;
- 6) при движении стороны ячеек остаются прямолинейными.

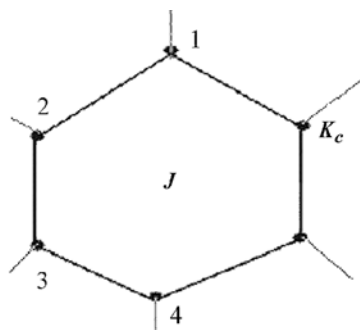
**Конечно-разностные формулы для расчета компонент тензора скоростей деформаций.** Рассмотрим  $K_c$ -угольную ячейку (рис. 1). В узлах ячейки (вершинах многоугольника) определены скорости  $\vec{u} = (u, v)$ .

Проинтегрируем уравнение (2) по объему ячейки с использованием предположений 1—6.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{x_i x_j} &= \frac{1}{V} \iiint_V \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_{x_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{x_j}}{\partial x_i} \right) dV = \frac{1}{2V} \iint_C (U_{x_i} \vec{j} + U_{x_j} \vec{i}) \vec{n} dC = \\ &= \frac{1}{2V} \sum_{\xi=1}^{K_c} \iint_{C^\xi} (U_{x_i} \vec{j} + U_{x_j} \vec{i}) \vec{n} dC = \frac{1}{2V} \sum_{\xi=1}^{K_c} \left( \iint_{C^\xi} U_{x_i} \vec{j} \vec{n} dC + \iint_{C^\xi} U_{x_j} \vec{i} \vec{n} dC \right), \end{aligned}$$

где  $\dot{\epsilon}_{x_i x_j}$  — компоненты тензора скоростей деформации;  $V, C$  — объем и поверхность ячейки соответственно;  $C^\xi$  — поверхность вращения грани ячейки;  $\vec{n}$  — вектор нормали к поверхности;  $\vec{i}, \vec{j}$  — орты вдоль координатных осей.

В результате для осесимметричного случая получим



$$(\dot{\epsilon}_{xx}^n)^\alpha = \frac{1}{4V^n} \sum_{i=1}^{K_c} (u_i + u_{i+1})^\alpha (r_i^2 - r_{i+1}^2)^n;$$

$$(\dot{\epsilon}_{rr}^n)^\alpha = -\frac{1}{4V^n} \sum_{i=1}^{K_c} \left[ (v_i + v_{i+1})^\alpha (r_i + r_{i+1})^n (x_i - x_{i+1})^n + \frac{4}{K_c} B^n v_i^\alpha \right];$$

$$\begin{aligned} (\dot{\epsilon}_{rx}^n)^\alpha &= \frac{1}{8V^n} \sum_{i=1}^{K_c} \left[ (v_i + v_{i+1})^\alpha (r_i^2 - r_{i+1}^2)^n - (u_i + u_{i+1})^\alpha \times \right. \\ &\quad \left. \times (r_i + r_{i+1})^n (x_i - x_{i+1})^n - \frac{4}{K_c} B^n u_i^\alpha \right]; \end{aligned}$$

$$(\dot{\epsilon}_{\theta\theta}^n)^\alpha = \frac{B^n}{K_c V^n} \sum_{i=1}^{K_c} v_i^\alpha,$$

Рис. 1. Нерегулярная многоугольная ( $K_c$ -угольная) ячейка

где  $x_i, r_i$  — координаты, а  $u_i, v_i$  — компоненты вектора скорости вдоль осей  $Ox$  и  $Or$  соответственно;  $B$  и  $V$  — площадь и объем ячейки;  $K_c$  — количество узлов в ячейке. Индексами  $n$  и  $\alpha$  обозначены величины, относящиеся соответственно к моментам времени  $t^n$  и  $t^\alpha$ . Для получения консервативной конечно-разностной схемы необходимо положить  $\alpha = n + 1/2$ .

В случае задачи с плоской деформацией компоненты тензора скоростей деформаций определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (\dot{\varepsilon}_{xx}^n)^\alpha &= \frac{1}{2B^n} \sum_{i=1}^{K_c} (u_i + u_{i+1})^\alpha (y_i - y_{i+1})^n; & (\dot{\varepsilon}_{yy}^n)^\alpha &= \frac{1}{2B^n} \sum_{i=1}^{K_c} (v_i + v_{i+1})^\alpha (x_i - x_{i+1})^n; \\ (\dot{\varepsilon}_{yx}^n)^\alpha &= \frac{1}{4B^n} \sum_{i=1}^{K_c} (v_i + v_{i+1})^\alpha (y_i - y_{i+1})^n + (u_i + u_{i+1})^\alpha (x_i - x_{i+1})^n; & (\dot{\varepsilon}_{zz}^n)^\alpha &= 0, \end{aligned}$$

где  $x_i, y_i$  — координаты, а  $u_i, v_i$  — компоненты вектора скорости вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

По аналогии с вычислением компонент тензора скоростей деформации можно определить компоненты тензора скоростей вращения.

**Аппроксимация уравнения движения.** Для аппроксимации уравнения движения рассмотрим отдельно случаи плоской и осесимметричной деформаций. Для этого рассмотрим фрагмент разностной нерегулярной многоугольной сетки (рис. 2) в окрестности узла  $i_0$ , для которого будет определен вектор ускорения. Точки  $i_0, i_1, i_2, \dots, i_K$  являются вершинами многоугольных ячеек, прилегающих к узлу  $i_0$ . Точки  $a_1, a_2, \dots, a_K$  соответственно являются серединами отрезков  $i_0 i_1, i_0 i_2, \dots, i_0 i_K$  для случая плоской деформации и серединами поверхностей вращения для случая осесимметричных деформаций. Узлу  $i_0$  со стороны каждой прилегающей к нему ячейки приписывается масса вещества  $m_{c_j}/K_{c_j}$ .

Проинтегрируем уравнение движения по объему, относящемуся к узлу  $i_0$ . В результате получим следующие конечно-разностные уравнения для вычисления ускорений в узлах сетки:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i_0}^n &= \frac{1}{4m_{i_0}} \sum_{j=1}^K \left[ (\sigma_{xx}^{c_j} - \sigma_{xx}^{c_{j+1}})^n (r_{i_j}^2 - r_{i_0}^2)^n - (\sigma_{xr}^{c_j} - \sigma_{xr}^{c_{j+1}})^n (r_{i_0} + r_{i_j})^n (x_{i_j} - x_{i_0})^n + \frac{B_{c_j}^n}{K_{c_j}} (\sigma_{xr}^{c_j})^n \right] + g_x; \\ \dot{v}_{i_0}^n &= \frac{1}{4m_{i_0}} \sum_{j=1}^K \left[ (\sigma_{xr}^{c_j} - \sigma_{xr}^{c_{j+1}})^n (r_{i_j}^2 - r_{i_0}^2)^n - (\sigma_{rr}^{c_j} - \sigma_{rr}^{c_{j+1}})^n (r_{i_0} + r_{i_j})^n (x_{i_j} - x_{i_0})^n + \frac{B_{c_j}^n}{K_{c_j}} (2\sigma_{rr}^{c_j} + \sigma_{xx}^{c_j})^n \right], \end{aligned}$$

где  $m_{i_0}$  — масса узла  $i_0$ ;  $\sigma_{xix_j}^{c_j}$  — значения компонент тензора напряжений с учетом вязкости в ячейке  $c_j$ , прилегающей к узлу  $i_0$ ;  $n$  — номер счетного шага по времени;  $K$  — количество ячеек, примыкающих к узлу нерегулярной сетки.

После того как найдены ускорения, вычисляются скорости на новый момент времени, затем значения координат узлов сетки на новый момент времени:

$$u_{i_0}^{n+1/2} = u_{i_0}^{n-1/2} + \dot{u}_{i_0}^n \tau^n; \quad v_{i_0}^{n+1/2} = v_{i_0}^{n-1/2} + \dot{v}_{i_0}^n \tau^n; \quad x_{i_0}^{n+1} = x_{i_0}^n + u_{i_0}^{n+1/2} \tau^n; \quad r_{i_0}^{n+1} = r_{i_0}^n + v_{i_0}^{n+1/2} \tau^n$$

( $\tau^n$  — счетный шаг по времени).

В случае задач с плоской деформацией в результате интегрирования, используя указанные выше предположения 1–6, получим следующие конечно-разностные уравнения для вычисления ускорения в узлах сетки:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i_0}^n &= \frac{1}{2\bar{m}_{i_0}} \sum_{j=1}^K \left[ (\sigma_{xx}^{c_j} - \sigma_{xx}^{c_{j+1}})^n (y_{i_j} - y_{i_0})^n - (\sigma_{xy}^{c_j} - \sigma_{xy}^{c_{j+1}})^n (x_{i_j} - x_{i_0})^n \right] + g_x; \\ \dot{v}_{i_0}^n &= \frac{1}{2\bar{m}_{i_0}} \sum_{j=1}^K \left[ (\sigma_{xy}^{c_j} - \sigma_{xy}^{c_{j+1}})^n (y_{i_j} - y_{i_0})^n - (\sigma_{yy}^{c_j} - \sigma_{yy}^{c_{j+1}})^n (x_{i_j} - x_{i_0})^n \right] + g_y, \end{aligned}$$

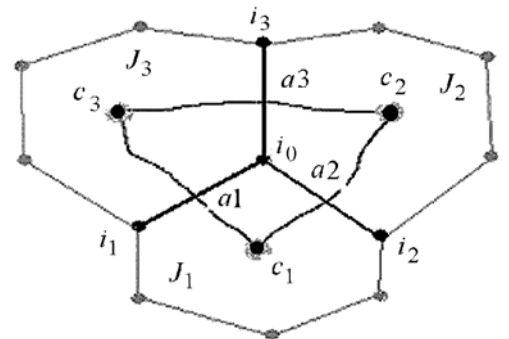


Рис. 2. Фрагмент нерегулярной многоугольной сетки

где  $\overline{m}_{i_0}$  — масса узла  $i_0$  в плоском случае.

Аналогичным образом вычисляются скорость движения вещества и координаты узлов сетки на новый момент времени:

$$u_{i_0}^{n+1/2} = u_{i_0}^{n-1/2} + \dot{u}_{i_0}^n \tau^n; \quad v_{i_0}^{n+1/2} = v_{i_0}^{n-1/2} + \dot{v}_{i_0}^n \tau^n; \quad x_{i_0}^{n+1} = x_{i_0}^n + u_{i_0}^{n+1/2} \tau^n; \quad y_{i_0}^{n+1} = y_{i_0}^n + v_{i_0}^{n+1/2} \tau^n.$$

Согласованные (по временному шагу) операторы дивергенции напряжений и скоростей позволяют получить консервативную конечно-разностную схему. Но стоит отметить, что в осесимметричном случае такая схема не дает сохранения одномерности движения при сферическом сжатии оболочек. Для сохранения сферической симметрии в одномерном движении рассмотренная выше конечно-разностная схема была модифицирована [1] (для осесимметричного случая):

$$d\dot{u}_{i_0}^n = \frac{1}{2\overline{m}_{i_0}} \sum_{j=1}^K \left[ (\sigma_{xx}^{c_j} - \sigma_{xx}^{c_{j+1}})^n (r_{i_j} - r_{i_0})^n - (\sigma_{xr}^{c_j} - \sigma_{xr}^{c_{j+1}})^n (x_{i_j} - x_{i_0})^n + \frac{B_{c_j}^n B_{c_j}^n}{K_{c_j} V_{c_j}} (\sigma_{xr}^{c_j})^n \right] + g_x;$$

$$d\dot{v}_{i_0}^n = \frac{1}{2\overline{m}_{i_0}} \sum_{j=1}^K \left[ (\sigma_{xr}^{c_j} - \sigma_{xr}^{c_{j+1}})^n (r_{i_j} - r_{i_0})^n - (\sigma_{rr}^{c_j} - \sigma_{rr}^{c_{j+1}})^n (x_{i_j} - x_{i_0})^n + \frac{B_{c_j}^n B_{c_j}^n}{K_{c_j} V_{c_j}} (2\sigma_{rr}^{c_j} + \sigma_{xx}^{c_j})^n \right],$$

где  $\overline{m}_{i_0}$  — масса узла  $i_0$  в плоском случае;  $B_{c_j}$  — площадь ячейки  $c_j$ ;  $V_{c_j}$  — объем ячейки  $c_j$ .

Тогда ускорение в узле будет определяться следующим образом:

$$\ddot{u}_{i_0}^n = d\dot{u}_{i_0}^n \frac{uu}{dd}, \quad \ddot{v}_{i_0}^n = d\dot{v}_{i_0}^n \frac{uu}{dd}, \quad uu = \sqrt{\dot{u}_{i_0}^n \dot{u}_{i_0}^n + \dot{v}_{i_0}^n \dot{v}_{i_0}^n}, \quad dd = \sqrt{d\dot{u}_{i_0}^n d\dot{u}_{i_0}^n + d\dot{v}_{i_0}^n d\dot{v}_{i_0}^n}.$$

Такая модификация конечно-разностной схемы для уравнения движения позволяет сохранять одномерность движения в сферически-симметричных течениях и обеспечивает хорошие консервативные свойства схемы.

Аналогичная схема используется при расчете задач с осевой симметрией по методике ДМК-УП [1]. Расчеты осесимметричных движений могут проводиться как по консервативной схеме, так и по модифицированной.

**Аппроксимация уравнения энергии.** Для вычисления компонент девиатора тензора напряжений на новый момент времени используются следующие конечно-разностные формулы:

$$(S_{xx}^{n+1})^{yp} = (S_{xx}^n)^{yp} + 2G^n \tau^n \left( \dot{\epsilon}_{xx} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+1/2} + R_{xx}^{n+1/2} \tau^n;$$

$$(S_{yy}^{n+1})^{yp} = (S_{yy}^n)^{yp} + 2G^n \tau^n \left( \dot{\epsilon}_{yy} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+1/2} + R_{yy}^{n+1/2} \tau^n;$$

$$(S_{xy}^{n+1})^{yp} = (S_{xy}^n)^{yp} + 2G^n \tau^n \left( \dot{\epsilon}_{xy} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+1/2} + R_{xy}^{n+1/2} \tau^n;$$

$$(S_{\theta\theta}^{n+1})^{yp} = (S_{\theta\theta}^n)^{yp} + 2G^n \tau^n \left( \dot{\epsilon}_{\theta\theta} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right)^{n+1/2},$$

где  $R_{x_i x_j}$  — поправки компонент девиатора тензора напряжений на поворот среды в ячейке как твердого тела [7];  $\dot{\epsilon}_{x_i x_j}$  — компоненты тензора скоростей деформации;  $G^n$  — модуль сдвига.

Если  $J^2 = \frac{3}{2} (S_{x_i x_j}^{n+1})^{yp} (S_{x_i x_j}^n)^{yp} > (Y^{n+1})^2$ , то в соответствии с законом Мизеса осуществляем корректировку компонент девиатора тензора напряжений:  $(S_{x_i x_j}^{n+1})^{yp} = (S_{x_i x_j}^n)^{yp} \cdot Y^{n+1}/J$ , где  $Y^{n+1}$  — предел текучести вещества в ячейке. Затем вычисляем компоненты тензора вязких напряжений:  $S_{xx}^B = \mu \left( \dot{\epsilon}_{xx} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right)$ ;  $S_{yy}^B = \mu \left( \dot{\epsilon}_{yy} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right)$ ;  $S_{\theta\theta}^B = \mu \left( \dot{\epsilon}_{\theta\theta} - \frac{1}{3} \frac{\dot{V}}{V} \right)$ ;  $S_{xy}^B = \mu \dot{\epsilon}_{xy}$ ;  $p^B =$

$= \frac{1}{3} \mu_1 \frac{\dot{V}}{V}$  и находим значения компонент девиатора тензора напряжений на  $(n+1)$ -й момент времени:  $S_{x_i x_j}^{n+1} = (S_{x_i x_j}^{n+1})^{yn} + (S_{x_i x_j}^{n+1})^b$ . После этого вычисляем приращение энергии сдвиговых деформаций  $\Delta E_{сд}^n = \frac{1}{\rho^n} (S_{xx}^n \dot{\varepsilon}_{xx}^{n+1/2} + S_{yy}^n \dot{\varepsilon}_{yy}^{n+1/2} + S_{\theta\theta}^n \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{n+1/2} + 2S_{xy}^n \dot{\varepsilon}_{xy}^{n+1/2}) \tau^n$  и энергию упругих сдвиговых деформаций  $E_{упр}^n = \frac{S_{x_i x_j}^{yn} S_{x_i x_j}^{yn}}{4\rho^n G^n}$ .

Для вычисления давления на  $(n+1)$ -й момент времени необходимо определить плотность и внутреннюю энергию на этот момент времени:

$$\rho^{n+1} = \frac{m^n}{V^{n+1}}; \quad E^{n+1} = E^n - \frac{P^n + q^n}{\rho^n} \operatorname{div}(u^{n+1/2}) \tau + \Delta E_{сд}^n; \quad E_r^{n+1} = E^{n+1} - E_{упр}^n; \quad P^\alpha = P(\rho^{n+1}, E_r^{n+1});$$

$$E^\alpha = E^{n+1} - \frac{P^\alpha + q^{n+1}}{2\rho^{n+1}} \operatorname{div}(u^{n+1}) \tau + \frac{P^n + q^n}{2\rho^n} \operatorname{div}(u^{n+1/2}) \tau + 0,5 (\Delta E_{сд}^{n+1} - \Delta E_{сд}^n);$$

$$E_r^\alpha = E^\alpha - E_{упр}^{n+1}; \quad P^{n+1} = P(\rho^{n+1}, E_r^\alpha) + P^b.$$

Шаг по времени  $\tau$  определяется в соответствии с условием устойчивости типа Куранта [8]:  $\tau = \frac{a_{Кур} h}{c^*} \sqrt{1 - \frac{2}{3} \frac{\mu_1^2}{(c^*)^2 \rho^2 a_{Кур}^2 h^2}}$ . Здесь  $a_{Кур} = 0,7$ ;  $h$  — характерный линейный размер ячейки;  $c^* = \sqrt{c_{зв}^2 + \frac{4}{3} \frac{G}{\rho}} + 2 \sqrt{\frac{q}{\rho}} c_{зв} = \left( \frac{dP^r}{d\rho} \right)_{dS=0}$  — скорость звука.

**Аппроксимация уравнения теплопроводности.** В результате расщепления уравнения энергии системы (1) процесс перераспределения внутренней энергии за счет теплопроводности описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial \varepsilon(T)}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \kappa \operatorname{grad} T,$$

где  $\kappa = \kappa(T)$  — коэффициент теплопроводности.

Разностная аппроксимация уравнения теплопроводности осуществляется в несколько этапов.

*Построение вспомогательной сетки.* Предположим, что счетная область  $D \subset R^2$  покрыта счетной сеткой  $\Omega = \{\Omega_i: i \in I\}$ . Ячейками сетки  $\Omega$  могут быть произвольные несамопересекающиеся многоугольники. Сетку  $\Omega$  будем называть исходной сеткой. Наряду с исходной сеткой  $\Omega = \{\Omega_i: i \in I\}$  рассмотрим вспомогательную узловую сетку  $\omega = \{\omega_j: j \in J\}$  такую, что каждая ее ячейка  $\omega_j$  содержит только  $j$ -й узел сетки  $\Omega$ .

Для построения узловых ячеек сначала каждая ячейка  $\Omega_i$  разбивается на прилегающие к ее вершинам части, как показано на рис. 3. Видно, что частью исходной ячейки, прилегающей к вершине  $A$ , является криволинейный четырехугольник  $BC_1AC_2$ , образованный линиями  $BC_1$ ,  $C_1A$ ,  $AC_2$  и  $C_2B$ . Точка  $A$  — вершина ячейки; точка  $B$  — внутренняя точка (например центр) ячейки; точки  $C_1$  и  $C_2$  — внутренние точки (например середины) прилегающих к вершине  $A$  ребер. Узловая ячейка  $\omega_j$ , содержащая узел  $j$ , строится путем объединения всех примыкающих к данному узлу четырехугольников, полученных описанным выше способом (рис. 4).

Обозначим через  $\omega_j^{i_1 i_2}$  часть узловой ячейки  $\omega_j$ , лежащую только в ячейках  $\Omega_{i_1}$  и  $\Omega_{i_2}$ . Способ построения подобластей  $\omega_j^{i_1 i_2}$  показан на рис. 5. Разбиение исходной области  $D$  на подобласти  $\omega_j^{i_1 i_2}$  обозначим через  $\omega'$ , т. е.  $\omega' = \{\omega_j^{i_1 i_2}: j \in J, i_1 \in I, i_2 \in I\}$ . С каждой областью  $\omega_j^{i_1 i_2}$  свяжем

вектор  $\vec{\omega}_j^{i_1 i_2} = \int_j^{C_j^{i_1 i_2}} \vec{n} dl$ , получающийся интегрированием нормали (направленной из ячейки  $\Omega_{i_1}$  в ячейку  $\Omega_{i_2}$ ) по части ребра, разделяющего ячейки  $\Omega_{i_1}$  и  $\Omega_{i_2}$ .

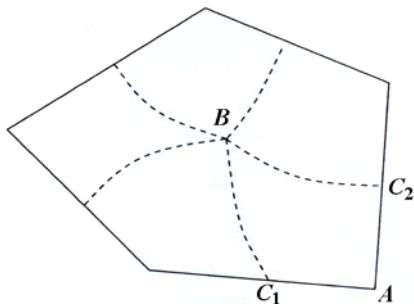


Рис. 3. Разбиение ячейки  $\Omega_i$  на прилегающие к ее вершинам части

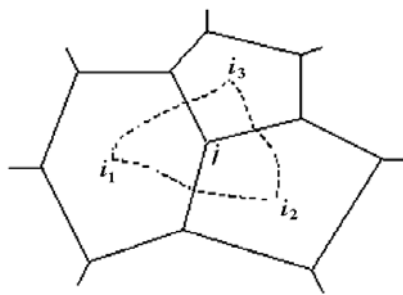


Рис. 4. Узловая ячейка  $\omega_j$

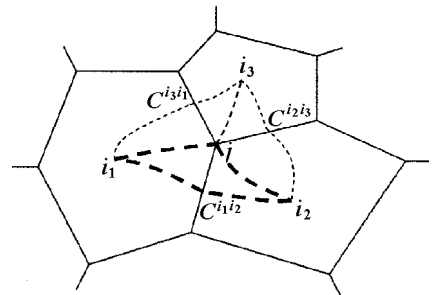


Рис. 5. Подобласть  $\omega_j^{i1i2}$  узловой ячейки  $\omega_j$

*Аппроксимация производных первого порядка.* Предполагается, что искомая функция является кусочно-постоянной на сетке  $\Omega$  и принадлежит образу проектора

$$\Pi: u \rightarrow \Pi u = \sum_{i \in I} \frac{\langle u, \chi(\Omega_i) \rangle}{\langle 1, \chi(\Omega_i) \rangle} \chi(\Omega_i),$$

где  $\chi(\Omega_i) = \chi(x, y, \Omega_i) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega_i \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_i \end{cases}$  — характеристическая функция множества  $\Omega_i$ ;  $\langle u, \varphi \rangle = \int_{R^2} u(x, y) \varphi(x, y) dx dy$  — функционал, порожденный функцией  $u$ . Также предполагается, что разностный градиент является кусочно-постоянной вектор-функцией на разбиении  $\omega'$  и принадлежит образу оператора

$$\text{Grad}_{\Omega}: u \rightarrow \pi \text{grad } \Pi u.$$

Здесь  $\text{grad}$  — дифференциальный оператор в пространстве обобщенных функций;  $\pi$  — линейный оператор, переводящий обобщенные функции, сосредоточенные на ребрах исходной сетки, в кусочно-постоянные на  $\omega'$  функции.

Обозначим через  $\omega_j' = \{\omega_j^k: k \in K_j\}$  множество подобластей узловой ячейки  $\omega_j$ , составленных из областей разбиения  $\omega'$ , и определим оператор  $\pi$  следующим образом:

$$\pi: \vec{u} \rightarrow \pi \vec{u} = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_j} A_j^k \langle \vec{u}, \chi(\omega_j^k) \rangle \chi(\omega_j^k),$$

где  $A_j^k$  — произвольные симметричные положительно определенные матрицы размерностью  $2 \times 2$ . Построенный таким образом оператор  $\pi$  удовлетворяет следующим свойствам.

*Свойство 1.* Пусть  $K = \sum_{j \in J} K_j \chi(\omega_j)$  — кусочно-постоянная на узловых ячейках функция. Тогда функция  $K$  и оператор  $\pi$  коммутируют, т. е.  $K \pi \vec{u} = \pi K \vec{u}$ .

*Свойство 2.* Оператор  $\pi$  — симметричный, т. е.  $\int_{R^2} (\pi \vec{u}, \vec{v}) dx dy = \int_{R^2} (\vec{u}, \pi \vec{v}) dx dy$ .

*Свойство 3.* Оператор  $\pi$  — неотрицательно определенный, т. е.  $\int_{R^2} (\pi \vec{u}, \vec{u}) dx dy \geq 0$ .

*Аппроксимация дифференциального оператора второго порядка.* Аппроксимация дифференциального оператора второго порядка

$$\Lambda(u) = -\text{div } k \text{ grad } u \tag{3}$$

осуществляется следующим образом:

1) функция  $u$  заменяется кусочно-постоянной функцией  $U = \Pi u = \sum_{i \in I} U_i \chi(\Omega_i)$ ;

2) производные  $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$  заменяются разностными производными  $\frac{D_\Omega U}{D x_\alpha} = (\pi \text{grad } U)_\alpha$ ;



- 3) коэффициент диффузии  $k$  заменяется кусочно-постоянной функцией  $K = \sum_{j \in J} K_j \chi(\omega_j)$ , где  $K_j$  получаются при помощи полугармонического усреднения  $k$  в узлы счетной сетки;
- 4) дифференциальный оператор  $\text{div}$  заменяется разностным:  $\text{Div} = \Pi \text{div}$ .

В результате получается разностный оператор второго порядка  $L(U) = -\Pi \text{div} K \pi \text{grad} U = -\text{Div}_{\omega'} K \text{Grad}_{\Omega} U$ , аппроксимирующий дифференциальный оператор (3).

Из свойств 1–3 следуют:

*Свойство 4.* Разностный оператор  $L = -\text{Div}_{\omega'} K \text{Grad}_{\Omega}$  является симметричным оператором, т. е.  $\langle -\text{Div}_{\omega'} K \text{Grad}_{\Omega} u, v \rangle = \langle u, -\text{Div}_{\omega'} K \text{Grad}_{\Omega} v \rangle$ .

*Свойство 5.* Разностный оператор  $L = -\text{Div}_{\omega'} K \text{Grad}_{\Omega}$  является неотрицательно определенным оператором, т. е.  $\langle -\text{Div}_{\omega'} K \text{Grad}_{\Omega} u, u \rangle \geq 0$ .

### 3. Тестовые расчеты

Тестирование методики ТИМ-2D проводилось на ряде тестовых задач из работы [9].

**Адиабатический разлет в вакуум осесимметричного эллипсоида.** Рассматривается задача об адиабатическом разлете в вакуум газового облака [9]. Газовое облако в начальный момент времени имеет форму осесимметричного эллипсоида с центром в начале координат и осью симметрии  $Ox$  с полуосями  $A_x = 1$ ,  $A_y = 2$  (рис. 6,а). Для описания газа используется уравнение состояния  $P = (\gamma - 1) \rho E$ ,  $\gamma = 1,4$ . В начальный момент задано распределение величин по следующим законам: плотность  $\rho_0 = (1 - \eta^2)^{1/(\gamma-1)}$ ; энергия  $E_0 = (1 - \eta^2) / (\gamma - 1)$ ; скорость равна нулю. Здесь  $\eta^2 = \frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2}$ . На осях  $Ox$  и  $Oy$  — условие симметрии, на внешней границе эллипсоида давление равно нулю.

Расчеты проводились на сетке с центром  $(0, 0)$  в трех вариантах. В базовом расчете в начальный момент времени бралось 15 точек по радиусу и 10 по углу. В последующих (втором и третьем) расчетах бралось соответственно 30 и 60 точек по радиусу, 10 и 60 по углу для четырехугольной сетки; 20 и 60 точек по радиусу, 20 и 30 по углу для шестиугольной сетки. В лагранжевой постановке счет велся до момента времени  $t = 30$ . Начальная расстановка точек для базового расчета приведена на рис. 6,б,в.

В табл. 1 приведены значения величин, соответствующие аналитическому решению и полученные в расчетах на момент времени  $t = 30$ , со следующими обозначениями [9]:  $U$ ,  $W$  — скорости вдоль полуосей, в скобках указаны  $U_{\text{точное}} = 4,11$ ,  $W_{\text{точное}} = 3$ ;  $S = A_x/A_y$  (точное значение 1,37) — соотношение полуосей;  $\Delta f = (f_{\text{числ}} - f_{\text{точн}}) / f_{\text{точн}} \cdot 100\%$  — погрешности указанных величин по отношению к их точным значениям;  $E_{\text{полн}}$ ,  $E_{\text{внутр}}$  — полная и внутренняя энергии;  $Dis = (E_{\text{полн}}|_{t=30} - E_{\text{полн}}|_{t=0}) / E_{\text{полн}}|_{t=0} \cdot 100\%$  — дисбаланс энергии.

На рис. 7 изображено состояние счетной сетки на момент времени  $t = 30$  в базовом расчете. Расчеты показали, что с увеличением количества точек результаты приближаются к аналитическому решению.

Таблица 1

#### Контрольные величины, подлежащие проверке

Номер расчета, тип сетки	Кол-во точек	$U$ (4,11)	$\Delta U$	$W$ (3,0)	$\Delta W$	$S$ (1,37)	$\Delta S$	$E_{\text{полн}}$ ( $t = 30$ )	$E_{\text{внутр}}$ ( $t = 30$ )	$Dis$
1, шестиуг.	15 × 10	3,82	7,05	2,74	8,66	1,383	0,94	2,7019	0,0192	0,86
1, четырехуг.	15 × 10	3,83	6,81	2,86	4,66	1,356	1,02	2,7297	0,0190	0,00
2, шестиуг.	20 × 20	4,03	1,94	2,91	3,00	1,375	0,36	2,7099	0,0190	0,1
2, четырехуг.	30 × 10	3,85	6,30	2,90	3,01	1,361	0,65	2,7227	0,0191	0,00
3, шестиуг.	30 × 60	4,10	0,24	2,93	2,33	1,385	1,1	2,7027	0,0191	0,2
3, четырехуг.	60 × 60	4,05	1,46	2,96	1,33	1,368	0,14	2,6998	0,0191	0,00

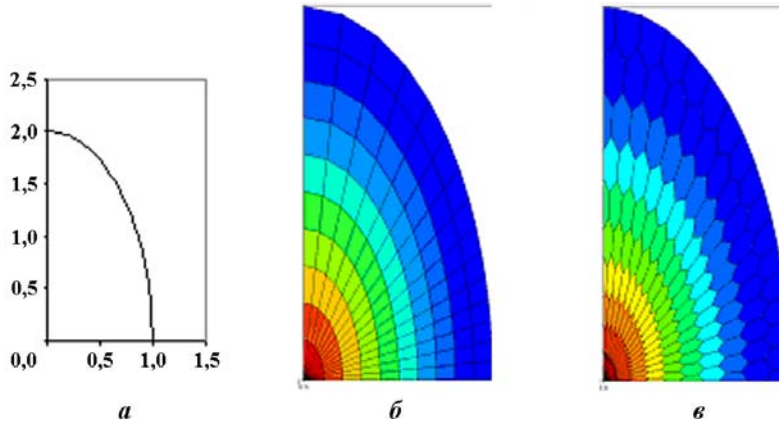


Рис. 6. Начальная геометрия (а) и вид начальной сетки (б — четырехугольной; в — шестиугольной) для базового расчета

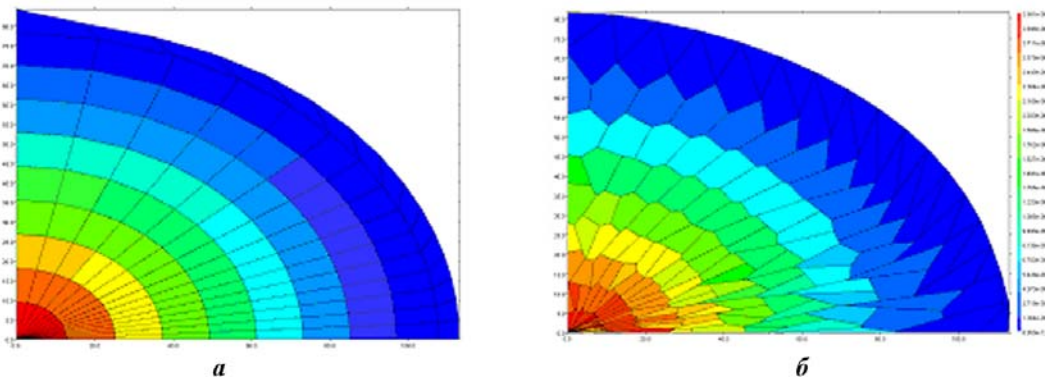


Рис. 7. Состояние сетки с распределением давления на момент времени  $t = 30$  для базового расчета  $15 \times 10$ : а — четырехугольная сетка; б — шестиугольная сетка

**Обжатие эллипсоида равномерным давлением.** Целью данного теста является проверка *безавостности* методики. В начальный момент времени физическая область представляет собой эллипсоид с полуосями  $a = 1$ ,  $b = 1,516$ , заполненный идеальным газом с уравнением состояния  $P = (\gamma - 1) \rho E$ ,  $\gamma = 4/3$  и начальной плотностью  $\rho_0 = 200$  [9]. Уравнение границы области в плоскости  $Oxy$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (рис. 8,а). На внешней границе  $\Gamma_0$  задается условие

$$P_{\Gamma_0}(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 5; \\ 5 & \text{при } t > 5. \end{cases}$$

Расчеты проводились с центром системы в точке  $(0, 0)$  на двух типах сеток: шестиугольной и четырехугольной. Число точек бралось равным 10 по радиусу и 10 по углу. В лагранжевой постановке счет велся до времени  $t = 50$ . Начальная расстановка точек приведена на рис. 8,б,в.

Опишем качественное поведение формы счетной области с течением времени. При временах, близких к  $t = 9$  (рис. 9,а) эллипсоид превращается в диск. Затем происходит отражение ударных волн от плоскости  $x=0$ , приводящее при значениях  $t > 14$  к возникновению струи вдоль оси симметрии  $Ox$  (см. рис. 9,б). Форма счетной области на момент времени  $t = 50$  изображена на рис. 10.

Сравнение результатов расчета на неструктурированных четырехугольных и шестиугольных сетках показало удовлетворительное их совпадение как по форме, так и по размерам газового облака на различные моменты времени. Данная модельная задача показала безавостность проведения расчетов с большими сдвиговыми деформациями по методике ТИМ-2D с использованием метода дифференцируемых связей для коррекции счетной сетки как на шестиугольных, так и на четырехугольных лагранжевых сетках.

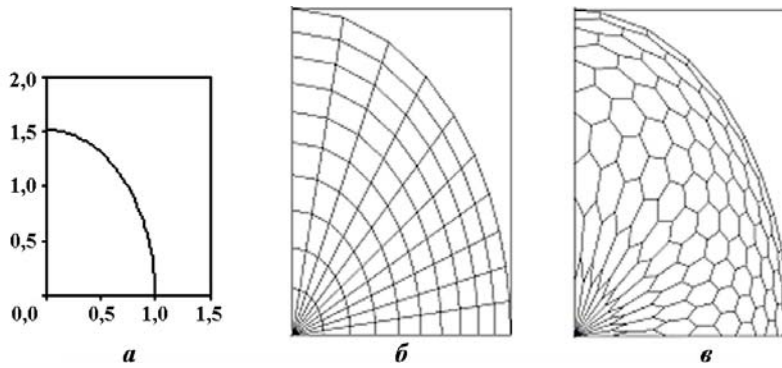


Рис. 8. Начальная геометрия эллипсоида (а) и начальная расстановка точек в расчетах на четырехугольной (б) и шестиугольной (в) сетках

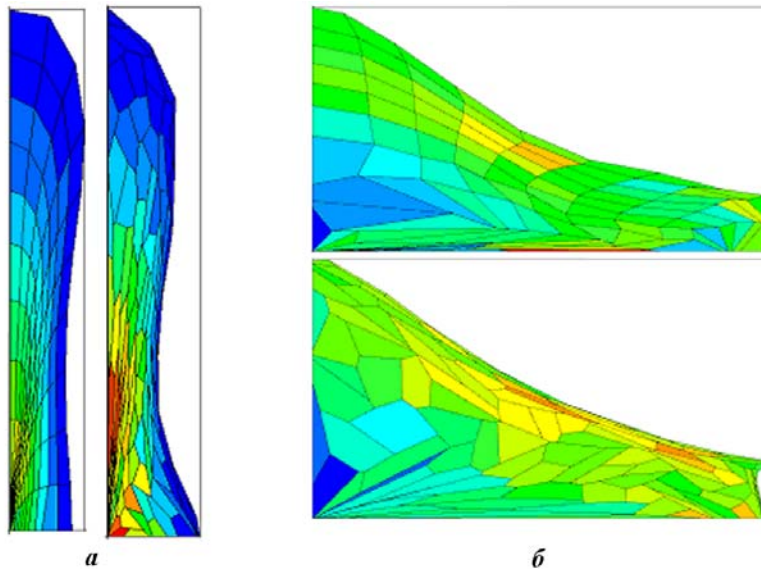


Рис. 9. Состояние счетной сетки на моменты времени  $t = 9$  (а) и  $t = 15$  (б)

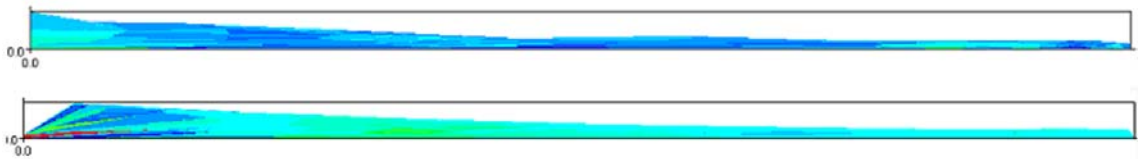


Рис. 10. Форма счетной области на момент времени  $t = 50$

**Задача о плоской волне напряжения.** Рассмотрим плоскую упругопластическую задачу о деформации полупространства с точным решением [10]. Имеется цилиндр, образованный вращением плоской области  $ABCD$  вокруг оси  $Ox$ , заполненный идеальным газом с уравнением состояния  $P = (\gamma - 1) \rho E$  и показателем адиабаты  $\gamma = 3$  [1]. Начальные условия: плотность  $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$ ; энергия  $E_0 = P_0 = S_{x,y_j} = 0$ ; скорость равна нулю; модуль сдвига  $G = 15 \text{ ГПа}$ ; предел текучести  $Y_0 = 1 \text{ ГПа}$ . На левой границе задается постоянное по времени давление  $P_{\text{гр}} = 5 \text{ ГПа}$ , все другие границы — жесткие стенки. Размеры области  $0,5 \times 1,5 \text{ см}$ .

Расчет проводился на четырехугольной сетке в двухобластной постановке. Размер первой области  $0,5 \times 0,5 \text{ см}$ , второй —  $0,5 \times 1,0 \text{ см}$ . Данная задача считалась с числом точек по оси  $Ox$ , равным 50. Число точек по оси  $Oy$  —  $N = 5$ .

На рис. 11 приведены результаты расчета и аналитическое решение на момент времени  $t = 2,4 \text{ мкс}$ . Как и в аналитическом решении, в расчетах получено расщепление ударной волны на две: впереди

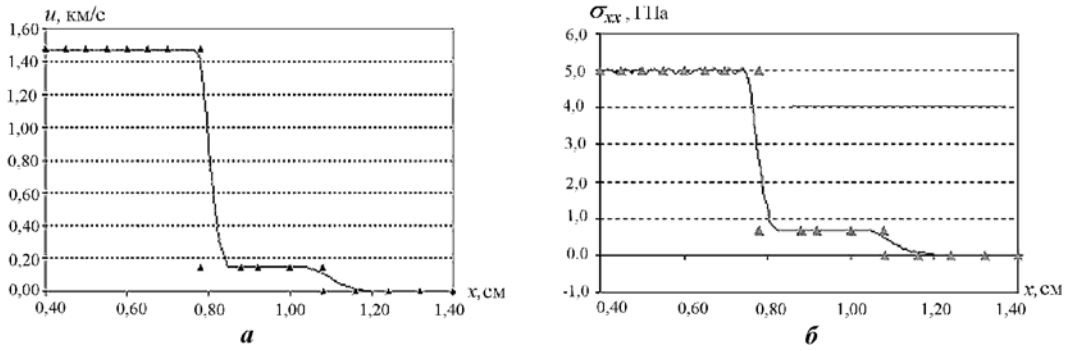


Рис. 11. Профили скоростей (а) и напряжений (б) на момент времени  $t = 2,4$  мкс:  $\blacktriangle$  — аналитическое решение; — — численное решение

распространяется упругая волна со скоростью  $D_{\text{упр}} = 4,5$  км/с, а за ней — пластическая волна со скоростью  $D_{\text{пл}} = 3,25$  км/с. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с аналитическим решением. Наблюдается хорошая сходимость численного решения к аналитическому при увеличении числа точек.

**Задача о движении защемленной по краям тонкостенной пластины.** Цель теста — проверка описания свободных границ и расчета тонких слоев при упругих колебаниях. Рассматривается движение защемленной по краям тонкостенной узкой пластины (рис. 12) при импульсной нагрузке (в ее центральной части задана начальная скорость  $V_z$ , нормальная к плоскости пластины) [11]. Начальная геометрия полосы: длина  $L = 25,4$  см; ширина  $b = 3,05$  см; толщина  $h = 0,3175$  см. На поверхности длиной  $l = 0,2L = 5,08$  см по всей ширине полосы  $b$  задавались  $V_z = -132$  м/с и  $V_z = -127$  м/с. Вещество — алюминиевый сплав с уравнением состояния в форме Ми—Грюнайзена. Параметры модели материала:  $\rho_0 = 2,79$  г/см<sup>3</sup>;  $c_0 = 4,63$  км/с;  $n = 3,5$ ;  $\Gamma = 2,14$ ;  $Y_0 = 0,285$  ГПа;  $\nu = 0,3$  ( $E = 71,7$  ГПа). Задача имеет плоскость симметрии  $Oxz$ . В расчетах использовалась сжимаемая идеальнопластическая модель вещества без учета разрушения и упрочнения материала.

Расчеты по методике ТИМ-2D в приближении упругопластической среды проводились на равномерной расчетной сетке размером  $120 \times 5$ . Результаты расчетов сравниваются с результатами экспериментов и расчетов, приведенных в [11–13]. Сравнение проводилось по временной зависимости вертикального смещения центра пластины  $d(t)$  (рис. 13). Результаты сравнительных расчетов, выполненных по методике ТИМ-2D, хорошо согласуются с результатами расчетов, выполненных по другим методикам, и с экспериментальными данными: максимальное различие составляет 12% и не превышает  $d$  в экспериментальных данных и расчетах авторов работ [11–13].

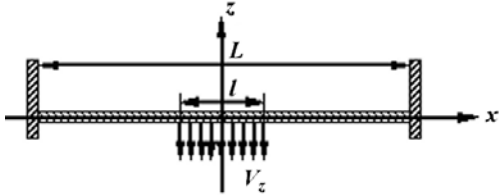


Рис. 12. Геометрия задачи о полосе

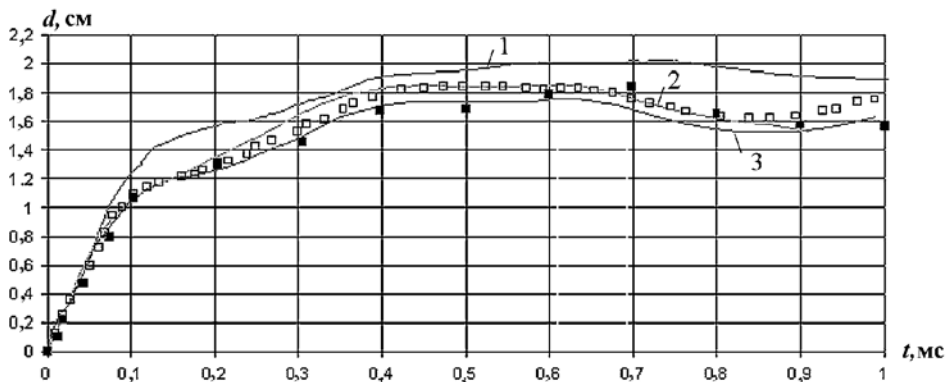


Рис. 13. Вертикальное смещение центра пластины:  $\blacksquare$ ,  $\square$  — экспериментальные данные [11], взятые из [13] ( $V_z = 132$  м/с) и [12] ( $V_z = 127$  м/с) соответственно; 1, 3 — результаты расчетов, взятые из [13] ( $V_z = 132$  м/с) и [12] ( $V_z = 127$  м/с) соответственно; 2 — ТИМ-2D ( $V_z = 127$  м/с)

**"Стержень Тейлора".** Цель теста — проверка описания свободных и контактных границ при скоростном нагружении; проверка описания свойств материала при больших деформациях. Этот тест [14] является уже традиционной задачей для тестирования методик, предназначенных для описания упругопластических течений. Рассматривается нормальный удар сплошного цилиндра (*стержня Тейлора*) по жесткой стенке. Начальные длина и диаметр стержня —  $L_0 = 10$  см,  $d = 2$  см; имеются две конструктивные кольцевые проточки шириной 0,5 см и глубиной 0,25 см, расположенные на расстоянии 0,5 см друг от друга (рис. 14,а). Вещество — сталь с уравнением состояния в форме Ми–Грюнайзена. Параметры модели материала:  $\rho_0 = 7,85$  г/см<sup>3</sup>;  $c_0 = 4,67$  км/с;  $n = 5$ ;  $\Gamma = 2$ ;  $Y_0 = 0,7$  ГПа;  $\nu = 0,28$ . Начальные условия: время  $t = 0$ ; плотность  $\rho_0 = 7,85$  г/см<sup>3</sup>; энергия  $E_0 = 0$ . Скорость  $V_0$  и конечная длина стержня  $L_f$  приведены в табл. 2. Задача имеет осевую симметрию ( $Ox$  — ось симметрии) и решается в приближении упругопластической сплошной среды. В расчетах использовалась сжимаемая идеальнопластическая модель вещества. Плита из броневой стали в расчетах моделировалась жесткой стенкой.

Расчеты по методикам ДМК-УП [1] и ТИМ-2D проводились на нерегулярной шестиугольной сетке размером  $90 \times 20$ . Результаты расчетов сравниваются с результатами двух серий экспериментов — исследования удара цилиндра из стали по плите из броневой стали с различной начальной скоростью удара — и результатами расчетов по методике МИМОЗА [15]. Сравнение с экспериментом проводилось по конечной длине стержня  $L_f$  (традиционный параметр, см. например, [16]) (см. табл. 2) и конечной форме стержня. На рис. 14 представлена конечная форма стержня при  $V_0 = 0,235$  км/с. Видно, что результаты расчета по методике ТИМ-2D хорошо согласуются с результатами, полученными по другим методикам, и с экспериментом.

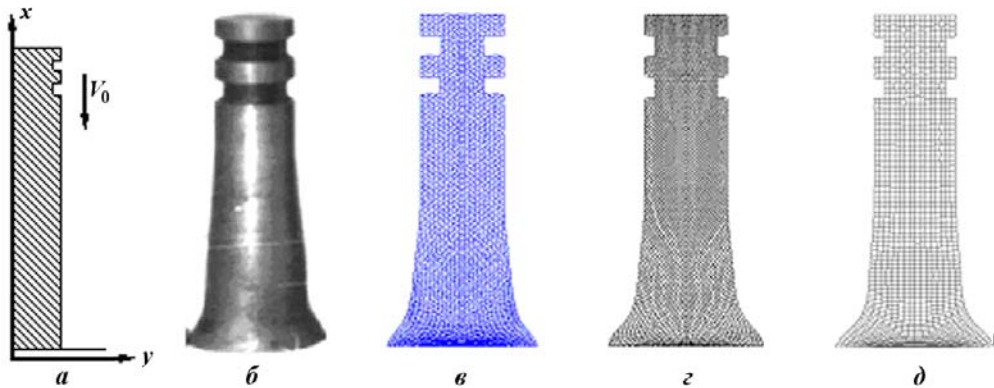


Рис. 14. Начальная геометрия (а) и конечная форма стержня (сталь,  $V_0 = 0,235$  км/с): б — эксперимент; в — расчет по методике ДМК-УП; з — расчет по методике ТИМ-2D; д — расчет по методике МИМОЗА

Таблица 2

**Сравнение расчетных данных по конечной длине стержня**

$V_0$ , км/с	$L_f$ , см			
	Эксперимент	МИМОЗА	ДМК-УП	ТИМ-2D
0,120	9,35	9,37	9,36	9,354
0,235	8,0	7,99	7,99	7,985

**Сходящаяся сферическая тепловая волна.** Цель теста — проверка влияния неравномерности счетной сетки на сохранение сферичности тепловой волны при схождении ее к центру. Используется следующая постановка задачи. На внешней поверхности шара радиусом  $R = 4$  поддерживается постоянная температура  $T = 1$ , одинаковая во всех точках границы. Коэффициент теплопроводности зависит от температуры по закону  $\kappa(T) = T^3$ . Шар заполнен идеальным газом плотностью  $\rho = 1$  с нулевой начальной температурой.

В расчетах использовалась неравномерная счетная сетка, показанная на рис. 15. На рис. 15–17 представлены распределения температуры на моменты времени  $t = 7$  и  $t = 9,6$ . На рис. 17 дано

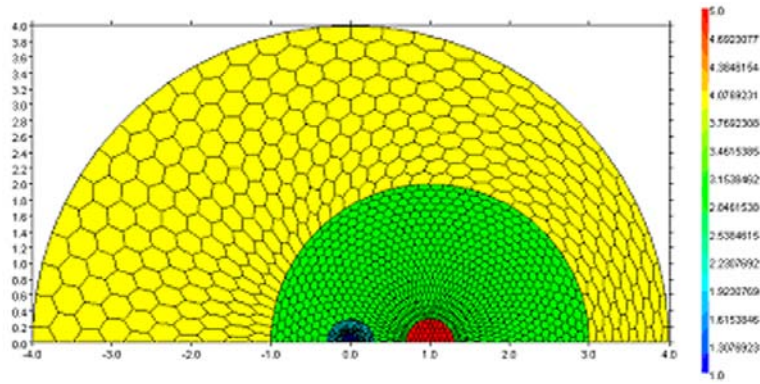


Рис. 15. Геометрия задачи о сходящейся сферической тепловой волне с разбиением на подобласти

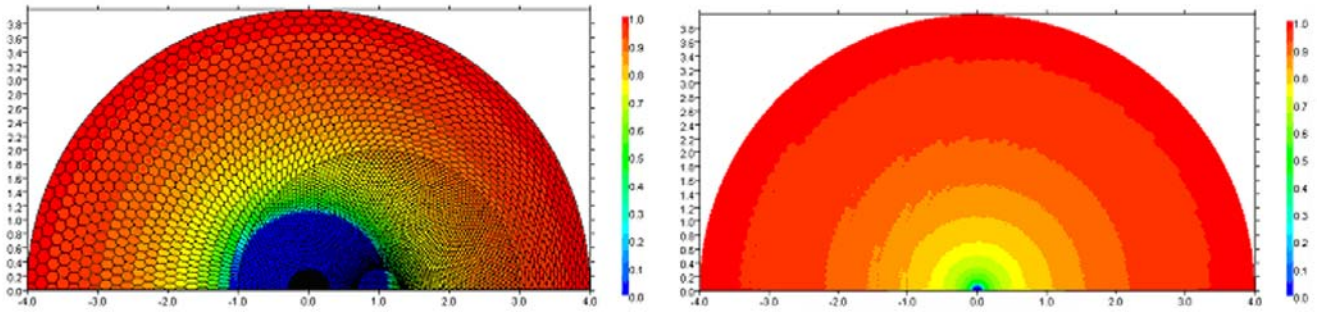


Рис. 16. Задача о сходящейся сферической тепловой волне (закраска по температуре на моменты времени  $t = 7$  и  $t = 9,6$ )

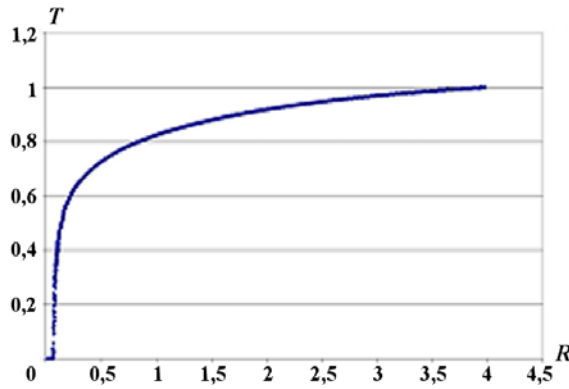


Рис. 17. Распределение температуры по радиусу на момент времени  $t = 9,6$

распределение температуры по радиусу на момент времени  $t = 9,6$ , выведенное по всем ячейкам счетной сетки. Видно, что, несмотря на сгущение счетной сетки к точке, отличной от центра области, тепловая волна сходится в центр.

**Плоская тепловая волна.** Цель теста — проверка влияния неравномерности счетной сетки на движение плоской тепловой волны. В качестве расчетной области взят шар радиусом  $R = 10$  со счетной сеткой, показанной на рис. 18. На границе счетной области поддерживается температура

$$T(t, x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-10 + t - x}, & x < -10 + t; \\ 0, & x \geq -10 + t, \end{cases} \quad \text{соответствующая аналитическому решению о бегущей}$$

тепловой волне, распространяющейся слева направо по области. Коэффициент теплопроводности

зависит от температуры по закону  $\kappa(T) = 3T^3$ . Начальная температура равняется нулю. Во всех областях используется уравнение состояния для идеального газа.

На рис. 19 представлено распределение температуры в зависимости от координаты  $x$  на момент времени  $t = 18$ , выведенное для всех счетных ячеек. Несмотря на то, что двумерная счетная сетка совершенно не адаптирована для одномерного распространения тепловой волны, видно, что численное и аналитическое решения достаточно хорошо согласуются между собой.

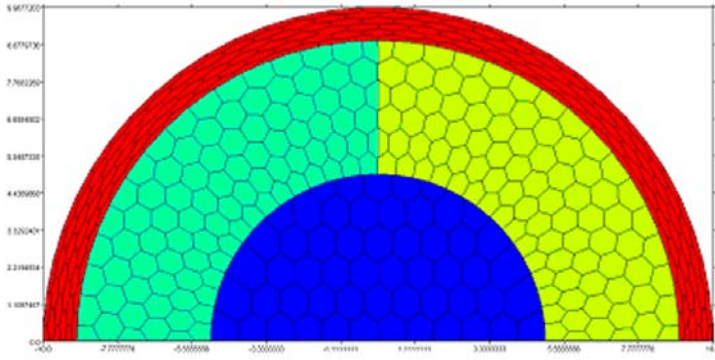


Рис. 18. Геометрия задачи о плоской тепловой волне

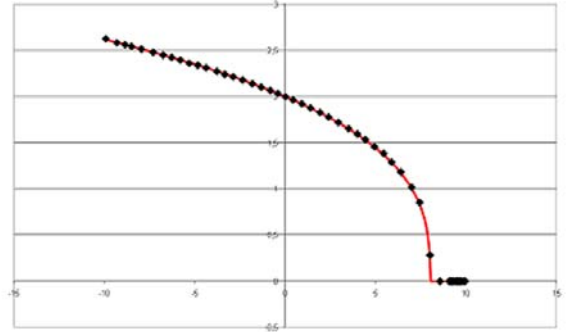


Рис. 19. Распределение температуры в зависимости от  $x$ -координаты на момент времени  $t = 18$ : — — аналитическое решение; • — численное решение

### Заключение

В работе представлены основные положения методики ТИМ-2D, предназначенной для расчета двумерных задач механики сплошных сред на многоугольных нерегулярных лагранжевых сетках с произвольным количеством связей в узлах. Практический интерес к использованию неструктурированных лагранжевых сеток особенно проявляется при решении задач со сложными течениями и формами геометрических тел, имеющих локальные мелкомасштабные подобласти, в которых применение многоугольных ячеек позволяет строить сетку с заданными свойствами. Для всех типов сеток используется единый счетный алгоритм, позволяющий проводить расчеты на комбинированных сетках в одной счетной области. Проведенные по методике ТИМ-2D модельные и тестовые расчеты на многоугольных нерегулярных лагранжевых сетках с произвольным количеством связей в узлах подтвердили ее дееспособность.

### Список литературы

1. Соколов С. С. Метод расчета двумерных нестационарных упругопластических течений на нерегулярных многоугольных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 62–80.
2. Панов А. И. Методика решения уравнения теплопроводности на нерегулярной сетке // Там же. С. 27–40.
3. Соколов С. С., Панов А. И., Воропинов А. А. и др. Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Там же. 2005. Вып. 3. С. 37–52.
4. Новиков И. Г., Панов А. И., Соколов С. С. Способ коррекции нерегулярной лагранжевой сетки методом наложения дифференцируемых связей // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2005. Т. 45, № 8. С. 1487–1500.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970. Т. 1–2.
6. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: МГУ, 1990.

7. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1976. С. 212—263.
  8. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
  9. Бондаренко Ю. А., Воронин Л. В., Делов В. И. и др. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 2. С. 3—17.
  10. Садовский В. М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Физматлит, 1997.
  11. Witmer E. A., Balmer H. A., Leech J. W., Pian Th. H. H. Large dynamic deformations of beams, rings, plates, and shells // AIAA J. 1963. Vol. 1, No 3. P. 1848—1857.
  12. Belytschko T., Lin J. I. Chen-Shyh Tsay explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells // Comp. Methods in Appl. Mechanics and Eng. 1984. Vol. 42. P. 22.
  13. MSC/DYTRAN. Example Problem Manual. Ver. 2.3. The MacNeal-Swendler Corporation, 1995.
  14. Новиков А. Б., Глушак С. А. Сопротивление металлов пластической деформации при высокоскоростном сжатии // Хим. физика. 2000. Т. 19. С. 65—69.
  15. Бабанов А. В., Змушко В. В., Рыбаченко П. В. Применение адаптивных сеток для решения задач механики сплошной среды (детонация, упругопластика) // Сб. докл. науч.-тех. конф. «Молодежь в науке». Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003. С. 79—83.
  16. Jones S. E., Drinkard J. A., Rule W. K., Wilson L. L. An elementary theory for the Taylor impact test // Int. J. Impact Eng. 1998. Vol. 21, No 1—2. P. 1—13.
-