

УДК 519.6

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ПО РАЗМЕРУ РАЗНОСТНОГО ШАБЛОНА

С. И. Скрышник, Н. М. Рудько, Р. А. Королев, В. В. Ляпин, А. В. Попов  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Описан метод численного решения двумерных уравнений газовой динамики с теплопроводностью, основанный на использовании переменного по размеру разностного шаблона. Данный метод позволяет отслеживать контактную границу между веществами вдоль всех пространственных направлений. Приведены постановка и результаты тестовых расчетов двумерных задач газовой динамики и теплопроводности, выполненных по программе, реализующей данную методику.

### Введение

Система дифференциальных уравнений в операторной форме, описывающая движение некоторого объема теплопроводного газа, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad} (P + PV); \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \text{div} \vec{U}; \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{P + PV}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\rho} \text{div} (\kappa \text{grad} T) + f. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{U}$  — вектор массовой скорости;  $t$  — время;  $\rho$  — плотность;  $P$  — давление;  $PV$  — искусственная вязкость;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  $T$  — температура;  $f$  — функция источника энергии.

Система уравнений (1) замыкается уравнениями состояния

$$P = P(\rho, T); \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T); \quad \kappa = \kappa(\rho, T) \quad (2)$$

и соответствующими начальными и граничными условиями.

Для решения системы уравнений (1), (2) применяется метод расщепления по физическим процессам, т. е. отдельно решается система уравнений газовой динамики и уравнение теплопроводности.

### Решение уравнений газовой динамики

Численное решение двумерных уравнений газовой динамики осуществляется методом расщепления по пространственным направлениям как в криволинейной системе координат [1], определяемой опорной линией, так и в декартовой системе координат на лагранжево-эйлеровой расчетной сетке (рис. 1).

Расчет радиального (вдоль оси  $Y$ ) пространственного направления проводится лагранжевым методом.

Рассмотрим столбец расчетной сетки (рис. 2). В нем могут присутствовать *чистые* ячейки, содержащие одно вещество (на рис. 2 это ячейки с номерами  $i-4$ ,  $i-3$ ,  $i-2$ ,  $i+1$ ,  $i+2$ ), и *смешанные*

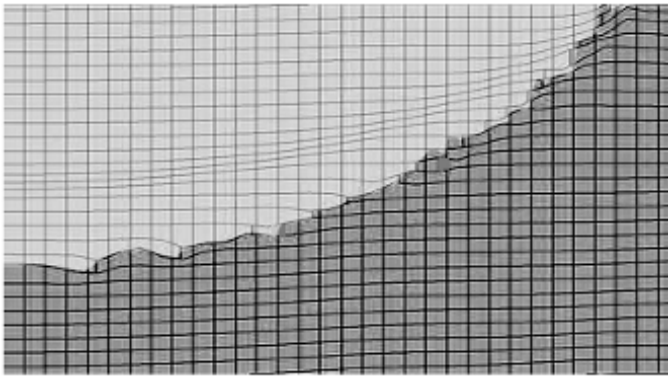


Рис. 1. Расчетная сетка

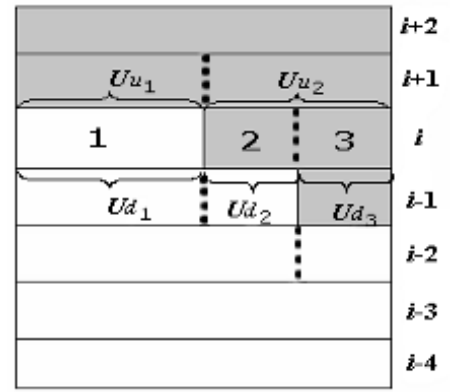


Рис. 2. Расчет скорости на контактных границах

ячейки, содержащие несколько веществ (ячейки с номерами  $i - 1, i$ ). При этом каждый компонент (вещество) смешанной ячейки расчетной сетки имеет свои координаты, плотность, температуру, давление, энергию и т. д. На контактных границах (КГ) смешанных ячеек также могут отличаться значения скорости.

Вдоль линии КГ между веществами производится разбиение соседних ячеек на подъячейки (на рис. 2 обозначено пунктиром). Таким образом выделяется каждая КГ между веществами. Это позволяет рассчитывать движение каждой КГ в смешанных ячейках расчетной сетки по уравнениям, аналогичным тем, которые используются для расчета границы между чистыми ячейками. При этом размер разностного шаблона зависит от количества компонентов (веществ) в данной и соседних ячейках расчетной сетки.

Рассмотрим уравнение для полного давления в ячейке (или в компоненте смешанной ячейки):

$$\bar{P}_i^{\nu+1} = P_i^{\nu+1} + PV_i^{\nu+1}. \quad (3)$$

Здесь  $\bar{P}$  — полное давление;  $P$  — материальное давление;  $PV$  — искусственная вязкость;  $\nu$  — номер итерации.

Выразим материальное давление в следующем виде:

$$P_i^{\nu+1} = P_i^\nu + \Pi_i^\nu \left( \frac{1}{\rho_i^{\nu+1}} - \frac{1}{\rho_i^\nu} \right), \quad (4)$$

где  $\Pi_i^\nu = \left( \frac{\partial P}{\partial (1/\rho)} \right)_i^\nu = \left( -\rho^2 \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_i^\nu$ .

Искусственную вязкость представим в виде квадратичной вязкости:

$$PV_i^{\nu+1} = A\rho_i^n \left( \tilde{U}u_i^n - \tilde{U}d_i^n \right) \left( \tilde{U}u_i^{\nu+1} - \tilde{U}d_i^{\nu+1} \right) = \Omega_i^n \left( \tilde{U}u_i^{\nu+1} - \tilde{U}d_i^{\nu+1} \right). \quad (5)$$

Здесь  $A$  — константа ( $A = 2,0$ );  $\Omega_i^n = \begin{cases} A\rho_i^n \left( \tilde{U}u_i^n - \tilde{U}d_i^n \right), & \tilde{U}u_i^n < \tilde{U}d_i^n; \\ 0, & \tilde{U}u_i^n \geq \tilde{U}d_i^n; \end{cases}$   $\tilde{U}u_i^n, \tilde{U}d_i^n$  — скорости на верхней и нижней гранях ячейки (компонента) соответственно.

Подставим в уравнение (3) выражения для материального давления (4) и искусственной вязкости (5). Получим следующее уравнение для полного давления в ячейке (в компоненте):

$$\bar{P}_i^{\nu+1} = P_i^\nu + \Pi_i^\nu \left( \frac{1}{\rho_i^{\nu+1}} - \frac{1}{\rho_i^\nu} \right) + \Omega_i^n \left( \tilde{U}u_i - \tilde{U}d_i \right)^{\nu+1}. \quad (6)$$

Подставим в (6) выражение для плотности  $\rho_i^{\nu+1}$  (из уравнения неразрывности) и выражения для скоростей  $\tilde{U}u_i$ ,  $\tilde{U}d_i$  (из уравнения движения) через полное давление. Тогда после несложных преобразований получим систему линейных уравнений относительно полных давлений в ячейках (компонентах):

$$\begin{aligned}
 & Du_i^n (\Pi_i^\nu Gu_i^n + \Omega_i^n) \sum_{ju} \left( Su_{i,ju}^n \bar{P}_{i,ju}^{\nu+1} \right) + \\
 & + \left[ 1 - Du_i^n Su_i^n (\Pi_i^\nu Gu_i^n + \Omega_i^n) - Dd_i^n Sd_i^n (\Pi_i^\nu Gd_i^n + \Omega_i^n) \right] \bar{P}_i^{\nu+1} - \\
 & - Du_i^n (\Pi_i^\nu Gu_i^n + \Omega_i^n) \sum_{juc} \left( Su_{i,juc}^n \bar{P}_{i,juc}^{\nu+1} \right) - \\
 & - Dd_i^n (\Pi_i^\nu Gd_i^n + \Omega_i^n) \sum_{jdc} \left( Sd_{i,jdc}^n \bar{P}_{i,jdc}^{\nu+1} \right) + \\
 & + Dd_i^n (\Pi_i^\nu Gd_i^n + \Omega_i^n) \sum_{jd} \left( Sd_{i,jd}^n \bar{P}_{i,jd}^{\nu+1} \right) = \\
 & = P_i^\nu + \Pi_i^\nu \left( \frac{1}{\rho_i^n} - \frac{1}{\rho_i^\nu} \right) + \tilde{U}u_i^n (\Pi_i^\nu Gu_i^n + \Omega_i^n) - \tilde{U}d_i^n (\Pi_i^\nu Gd_i^n + \Omega_i^n). \tag{7}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$Du_i^n = \frac{\tau}{Mu_i^n}; \quad Dd_i^n = \frac{\tau}{Md_i^n}; \quad Gu_i^n = \frac{\tau Su_i^n}{M_i}; \quad Gd_i^n = \frac{\tau Sd_i^n}{M_i};$$

$\tau$  — временной шаг;  $Mu_i^n$  — полусумма масс сверху и снизу верхней грани  $i$ -й ячейки (компонента),  $Md_i^n$  — полусумма масс сверху и снизу нижней грани этой ячейки (компонента);  $M_i$  — масса данной ячейки (компонента);  $Su_i^n$ ,  $Sd_i^n$  — площади граней ячеек (компонентов) соответственно сверху и снизу  $i$ -й ячейки;  $Su_{i,j}^n$  — площадь совместной грани ячейки  $i$  и компоненты с номером  $j$  для верхней границы,  $Sd_{i,j}^n$  — площадь совместной грани ячейки  $i$  и компоненты с номером  $j$  для нижней границы;  $ju$  и  $juc$  — количество подъячеек соответственно сверху и снизу, через которые рассчитывается скорость верхней границы данной ячейки (компонента);  $jdc$  и  $jd$  — количество подъячеек соответственно сверху и снизу, через которые рассчитывается скорость нижней границы данной ячейки (компонента).

Систему линейных уравнений (7) можно представить в следующем виде:

$$A^\nu \bar{\mathbf{P}}^{\nu+1} = \mathbf{b}^\nu, \tag{8}$$

где  $A^\nu$  — квадратная слабо заполненная матрица, размерность которой равна общему количеству чистых ячеек и компонентов (подъячеек) смешанных ячеек расчетной сетки;  $\bar{\mathbf{P}}^{\nu+1}$  — искомый вектор полных давлений;  $\mathbf{b}^\nu$  — вектор правой части, элементы которого определяются по формуле

$$b_i^\nu = P_i^\nu + \Pi_i^\nu \left( \frac{1}{\rho_i^n} - \frac{1}{\rho_i^\nu} \right) + \tilde{U}u_i^n (\Pi_i^\nu Gu_i^n + \Omega_i^n) - \tilde{U}d_i^n (\Pi_i^\nu Gd_i^n + \Omega_i^n). \tag{9}$$

Следует отметить, что размерность матрицы  $A$  (соответственно и векторов  $\bar{\mathbf{P}}$  и  $\mathbf{b}$ ) может изменяться на временных шагах, так как может изменяться количество компонентов смешанных ячеек.

Для решения системы линейных уравнений (8), (9) используются итерационные решатели. По полученным значениям полных давлений в ячейках (в компонентах) рассчитываем новые значения скорости, плотности, материального давления. Далее рассчитываются новые значения коэффициентов матрицы  $A$  и вектора  $\mathbf{b}$ . И так дальше, до сходимости итераций.

После этого по полученным значениям полных давлений и скоростей рассчитываются новые значения удельной внутренней энергии:

$$\varepsilon_i^{n+1/2} = \varepsilon_i^n - \frac{\tau}{M_i^n} \bar{P}_i^{n+1/2} (Su_i Uu_i^* - Sd_i Ud_i^*),$$

где  $Uu_i^* = \frac{1}{2} (\tilde{U}u_i^n + \tilde{U}u_i^{n+1/2})$ ;  $Ud_i^* = \frac{1}{2} (\tilde{U}d_i^n + \tilde{U}d_i^{n+1/2})$ .

Расчет углового направления (вдоль оси  $X$ ) осуществляется лагранжево-эйлеровым методом в два этапа.

Сначала лагранжевым методом проводится расчет движения вещества по формулам, аналогичным формулам для расчета радиального направления.

На втором этапе проводится пересчет термодинамических величин на исходную расчетную сетку с применением РРМ-метода [2].

После расчета углового направления осуществляется коррекция компонент вектора массовой скорости  $\vec{U} = (U, V)$ , обусловленная использованием криволинейной системы координат [1], по формулам

$$\frac{\partial U}{\partial t} = aV^2; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -aUV. \quad (10)$$

В декартовой системе координат коррекция компонент вектора массовой скорости (10) не производится.

На алгоритмическом языке Fortran-90 написана программа, реализующая вышеизложенную методику численного решения системы двумерных уравнений газовой динамики. Программа организована по блочному принципу и состоит из четырех основных блоков (подпрограмм). Первые два блока (подпрограммы) соответствуют расчету уравнений газовой динамики вдоль каждого из пространственных направлений. Третий блок соответствует коррекции компонент вектора массовой скорости согласно формулам (10). Четвертый блок состоит из решателя системы линейных уравнений (8).

Данная методика и реализующая ее программа численного решения двумерных уравнений газовой динамики были проверены на большой серии тестовых расчетов. Получено также хорошее согласие результатов численного моделирования с данными физических экспериментов.

Приведем результаты некоторых расчетов.

**Численное моделирование неустойчивости Рихтмайера—Мешкова [3, 4].** Начальная геометрия задачи и параметры веществ приведены соответственно на рис. 3 и в табл. 1. Задача считалась в двух постановках — с КГ в форме сопряженных окружностей (см. рис. 3,а) и в форме ступеньки (см. рис. 3,б).

Развитие неустойчивости на границе *воздух — фреон*, полученное в расчетах, приведено на рис. 4.

Были проведены также расчеты с КГ *воздух — фреон* в виде пины. Результаты всех расчетов хорошо согласуются с результатами физических экспериментов.

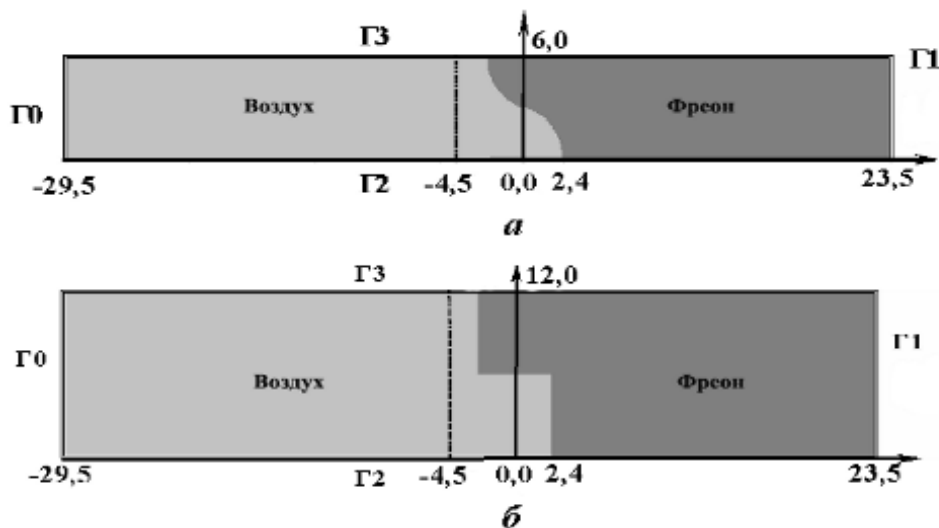


Рис. 3. Начальная геометрия задачи: а — КГ в форме сопряженных окружностей; б — КГ в форме ступеньки

Параметры веществ

Вещество		$\gamma$	$\rho_0 \cdot 10^3, \text{ г/см}^3$	$P \cdot 10^4, \text{ ГПа}$	$e, \text{ кДж/г}$	$U, \text{ км/с}$
Воздух	нач. сост.	1,405	1,205	1	0,20491	0
	за фронтом		2,116	2,254	0,26305	0,21171
Фреон	нач. сост.	1,138	5,13	1	0,14125	0

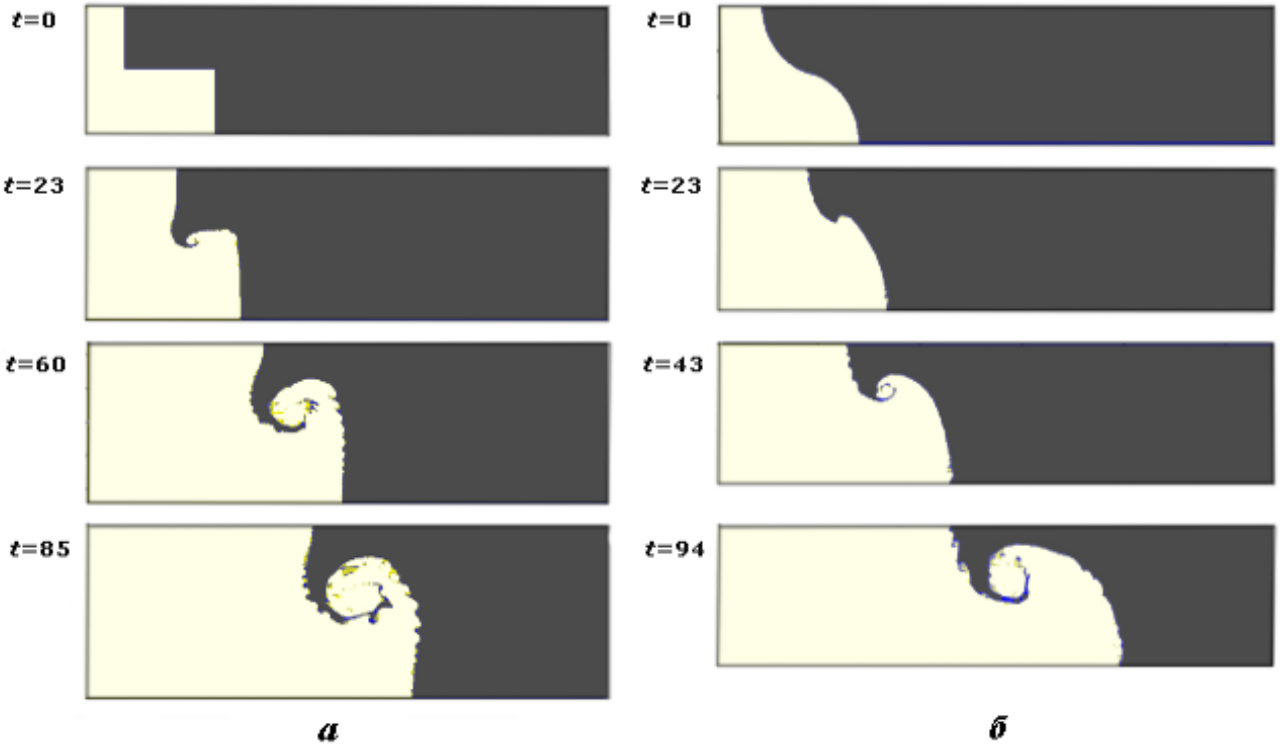


Рис. 4. Развитие неустойчивости на границе сред: *a* — начальная граница в форме ступеньки; *б* — начальная граница в форме сопряженных окружностей

**Задача о сходящихся ударных волнах (blast waves) [5].** Начальная постановка данной одномерной задачи описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 u(t, x)|_{t=0} &= 0; & \rho(t, x)|_{t=0} &= 1; \\
 e(t, x)|_{t=0} &= \begin{cases} 2\,500, & 0 \leq x \leq 0,1; \\ 0,025, & 0,1 < x < 0,9; \\ 250, & 0,9 \leq x \leq 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Во всех трех энергетических слоях уравнение состояния одинаковое и определяется формулой  $p = (\gamma - 1)\rho e$ ,  $\gamma = 1,4$ .

Наружные границы — жесткие стенки, т. е.

$$u(t, x)|_{x=0} = u(t, x)|_{x=1} = 0, \quad t > 0.$$

Расчеты проводились до момента времени  $t = 0,038$  с различным количеством расчетных точек:  $N = 250, 1\,000, 4\,000$ .

На рис. 5, 6 приведено сравнение профилей плотности и энергии с точным решением.

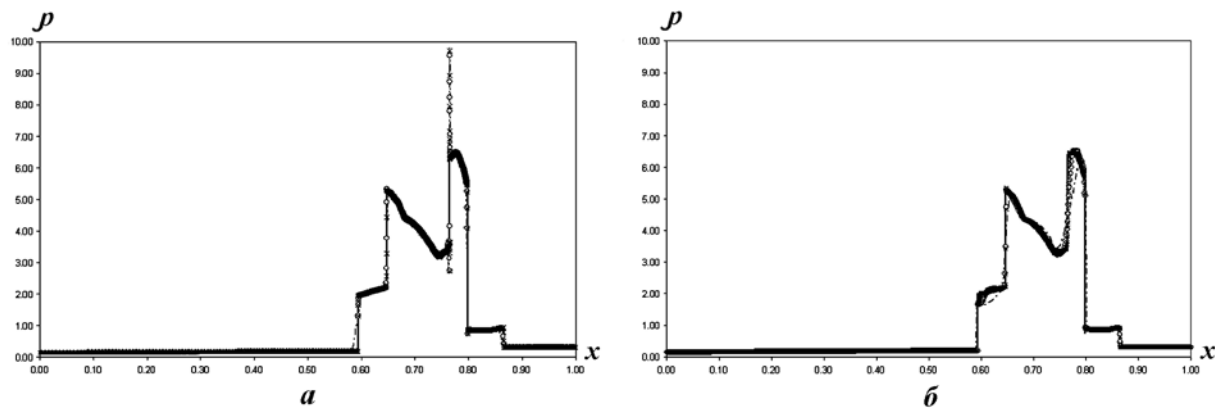


Рис. 5. Зависимость плотности от координаты: *a* — лагранжево направление; *б* — лагранжево-эйлерово направление; - · - · -  $N = 250$ ; - o - -  $N = 1000$ ; - x - -  $N = 4000$ ; — — точное решение

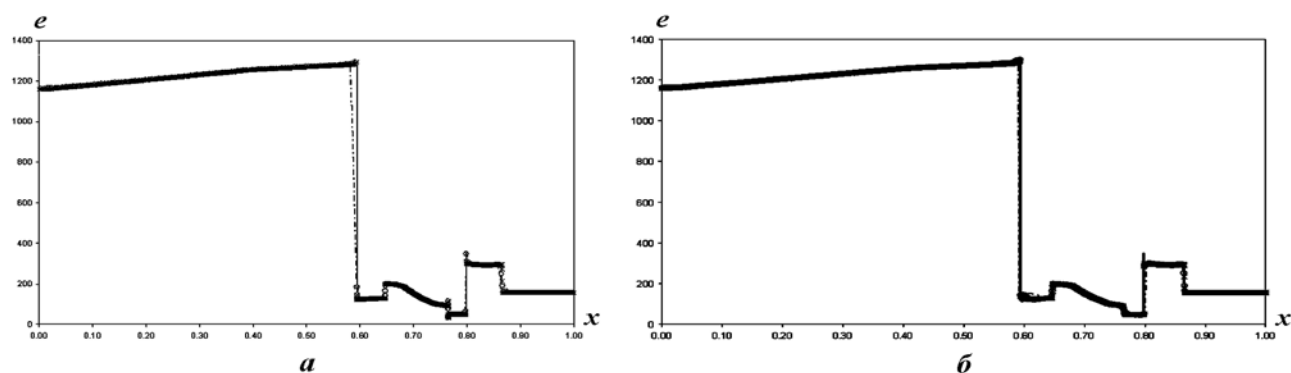


Рис. 6. Зависимость энергии от координаты: *a* — лагранжево направление; *б* — лагранжево-эйлерово направление; - · - · -  $N = 250$ ; - o - -  $N = 1000$ ; - x - -  $N = 4000$ ; — — точное решение

**Задача о разлете газового облака в вакуум [6].** Начальная геометрия задачи приведена на рис. 7.

Данная задача считалась в двух постановках: 1) стандартной — однообластной (рис. 7,*a*); 2) двухобластной (рис. 7,*б*) — для проверки методики отслеживания КГ.

На рис. 8, 9 приведены форма газового облака и распределение плотности на конечный момент расчета.

В табл. 2 приведено сравнение результатов численного решения данной задачи на различных сетках с ее точным решением. Здесь  $U_x, U_y$  — скорости движения газового облака соответственно вдоль осей  $X$  и  $Y$ ;  $R_x, R_y$  — размеры газового облака вдоль осей  $X, Y$ .

Таблица 2

**Сравнение значений величин на момент времени  $t = 30$**

Величина	Численное решение						Точное решение
	Сетка $16 \times 16$		Сетка $32 \times 32$		Сетка $64 \times 64$		
	Постановка 1	Постановка 2	Постановка 1	Постановка 2	Постановка 1	Постановка 2	
$U_x$	3,98	3,96	4,03	4,03	4,06	4,06	4,11
$U_y$	2,86	2,86	2,92	2,92	2,96	2,96	3,00
$R_x/R_y$	1,39	1,38	1,38	1,38	1,37	1,37	1,37

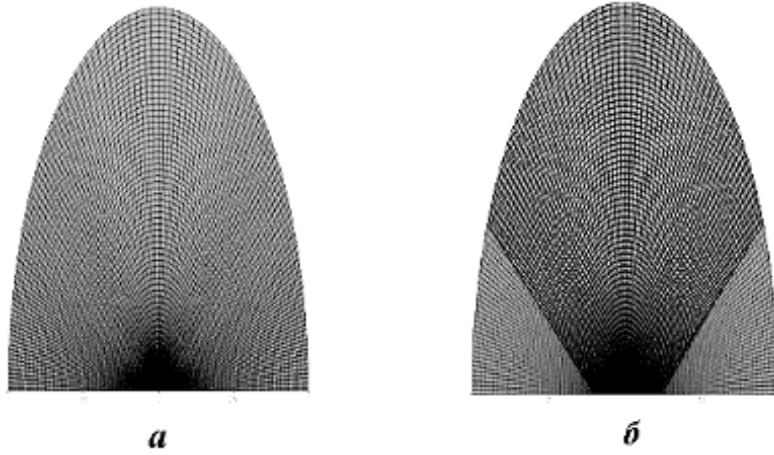


Рис. 7. Начальная геометрия задачи о разлете газового облака: *a* — в однообластной постановке; *б* — в двухобластной постановке

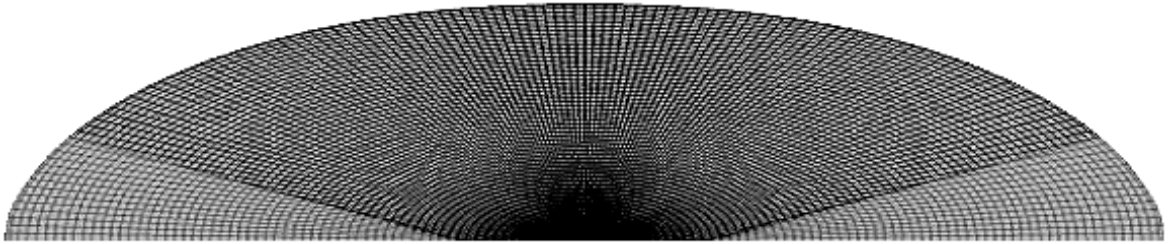


Рис. 8. Форма газового облака на конечный момент расчета

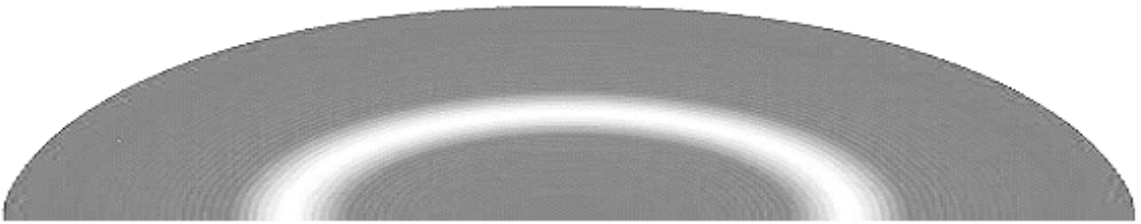


Рис. 9. Распределение плотности на конечный момент расчета

Видно, что с измельчением расчетной сетки значения численного решения по всем параметрам сходятся к точному решению задачи. Уже на сетке  $64 \times 64$  максимальная погрешность численного решения составила меньше 1,5 %.

### Решение уравнения теплопроводности

Для решения двумерного уравнения теплопроводности используется вспомогательная расчетная сетка (на рис. 10 обозначена пунктиром), которая согласована с основной расчетной сеткой (обозначена сплошной линией).

Уравнение для изменения энергии через потоки имеет следующий вид:

$$\mu_i (\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n) = Qu_i^{n+1} + Qd_i^{n+1} + \sum_{j=1}^J Ql_{ij}^{n+1} + \sum_{k=1}^K Qr_{ik}^{n+1}. \quad (11)$$

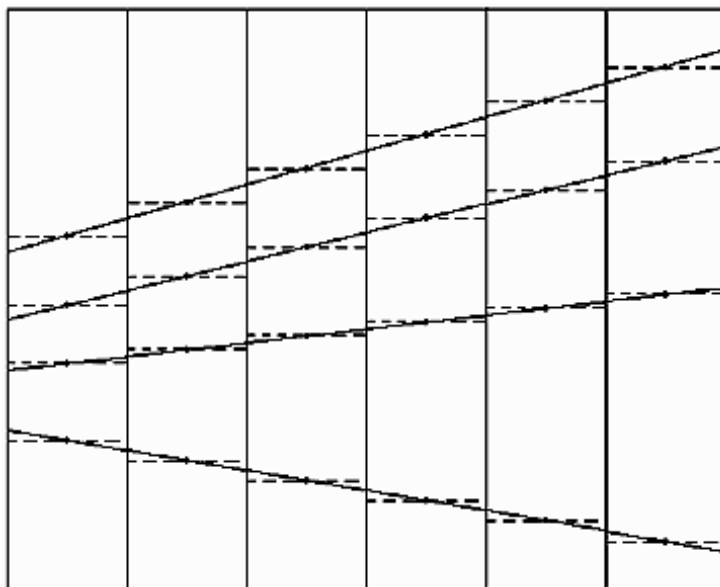


Рис. 10. Основная расчетная сетка (—) и вспомогательная (- - -)

Здесь  $\mu_i$  — масса  $i$ -й ячейки (компонента);  $Qu_i^{n+1}$ ,  $Qd_i^{n+1}$ ,  $Ql_{ij}^{n+1}$ ,  $Qr_{ik}^{n+1}$  — потоки энергии сверху, снизу, слева, справа соответственно.

Рассмотрим фрагмент расчетной сетки (рис. 11). Уравнение для потока энергии через верхнюю грань ячейки с номером  $i$  имеет следующий вид:

$$Qu_i^{n+1} = \frac{\tau S_{i,i+1} \chi_{i,i+1}^{n+1} (T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1})}{l_{i,i+1}}. \quad (12)$$

Здесь  $S_{i,i+1}$  — площадь общей грани ячеек  $i$  и  $i+1$ ;  $T_i^{n+1}$ ,  $T_{i+1}^{n+1}$  — температуры в центрах ячеек с номерами  $i$  и  $i+1$  соответственно;  $l_{i,i+1} = l_i + l_{i+1}$  — расстояние между центрами ячеек  $i$  и  $i+1$ , где  $l_i$ ,  $l_{i+1}$  — расстояния от центров этих ячеек до их совместной грани;  $\chi_{i,i+1}^{n+1}$  — коэффициент теплопроводности в центре общей грани ячеек  $i$  и  $i+1$ .

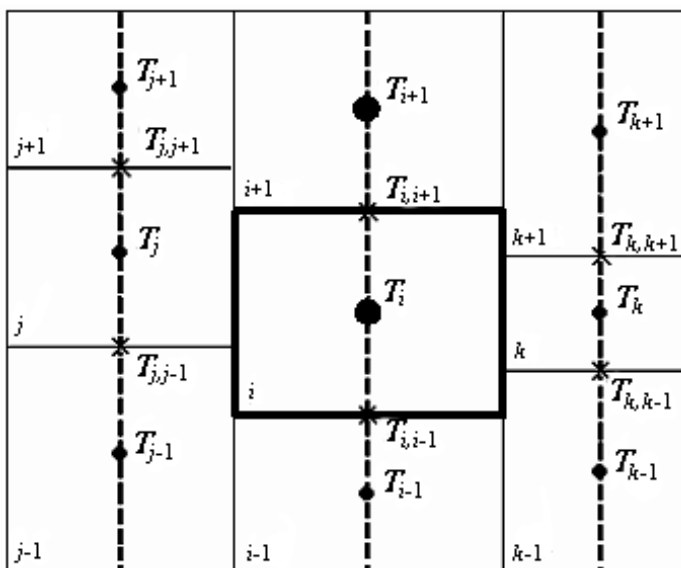


Рис. 11. Расчет потока через верхнюю грань ячейки



Сначала из условия равенства потоков энергии [7] находится температура в центрах совместных граней по формуле

$$T_{i,i+1}^{n+1} = \frac{\varkappa_i^{n+1} T_i^{n+1} l_{i+1} + \varkappa_{i+1}^{n+1} T_{i+1}^{n+1} l_i}{\varkappa_i^{n+1} l_{i+1} + \varkappa_{i+1}^{n+1} l_i} = \beta_{i,i+1} T_i^{n+1} + (1 - \beta_{i,i+1}) T_{i+1}^{n+1}, \quad (13)$$

где  $\beta_{i,i+1} = \frac{\varkappa_i^{n+1} l_{i+1}}{\varkappa_i^{n+1} l_{i+1} + \varkappa_{i+1}^{n+1} l_i}$ .

По найденным из (13) температурам из уравнений состояния находим значения коэффициентов теплопроводности:

$$\varkappa_i^* = \varkappa_i \left( \rho_i, T_{i,i+1}^{n+1} \right); \quad \varkappa_{i+1}^* = \varkappa_{i+1} \left( \rho_{i+1}, T_{i,i+1}^{n+1} \right). \quad (14)$$

После этого вычисляется коэффициент теплопроводности в центрах совместных граней:

$$\varkappa_{i,i+1}^{n+1} = \frac{1}{2} \frac{(\varkappa_i + \varkappa_i^*) (\varkappa_{i+1} + \varkappa_{i+1}^*) (l_i + l_{i+1})}{(\varkappa_i + \varkappa_i^*) l_{i+1} + (\varkappa_{i+1} + \varkappa_{i+1}^*) l_i}. \quad (15)$$

Для расчета потоков энергии через боковые границы ячеек применяется переменный разностный шаблон, размер которого зависит от степени неортогональности расчетной сетки [8].

Рассмотрим фрагмент расчетной сетки (рис. 12). В данном случае ячейка с номером  $i$  граничит с тремя ячейками справа:  $k - 1$ ,  $k$ ,  $k + 1$ . Для определенности рассмотрим расчет потока энергии из ячейки с номером  $k - 1$  в ячейку с номером  $i$ . Через центр их совместной грани (см. рис. 12) проведем перпендикуляр до пересечения с прямыми, соединяющими центры этих ячеек с центрами их граней. Температуры  $T_{i,k-1}$  и  $T_{k-1,i}$  находятся линейной интерполяцией по температурам в соответствующих центрах ячеек и граней.

Тогда уравнение для потока энергии из ячейки с номером  $k - 1$  в ячейку с номером  $i$  будет иметь следующий вид:

$$Q_{i,k-1}^{n+1} = \frac{\tau S_{i,k-1} \varkappa_{i,k-1}^{n+1} (T_{k-1,i}^{n+1} - T_{i,k-1}^{n+1})}{l_{i,k-1}}. \quad (16)$$

Температура  $T_{i,k-1}^*$  и коэффициент теплопроводности  $\varkappa_{i,k-1}^{n+1}$  в центре совместной грани (рис. 13) находятся из условия равенства потоков энергии по формулам, аналогичным (13)–(15).

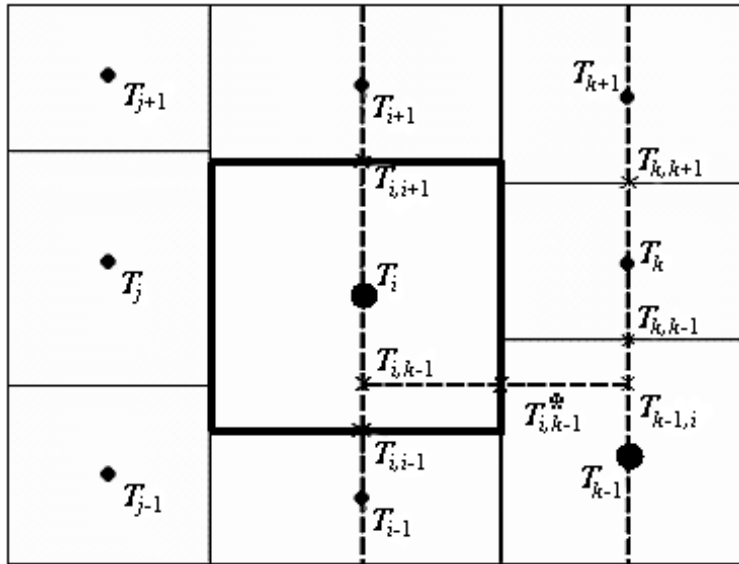


Рис. 12. Расчет потока через боковые грани ячейки

Для определения потоков энергии через верхнюю и нижнюю грани в случае смешанных ячеек рассмотрим рис. 13. Здесь ячейка с номером  $i$  состоит из двух компонентов (вещств). Так как каждый компонент смешанной ячейки имеет свои термодинамические параметры (в том числе температуру и энергию), расчет потоков энергии в каждый компонент смешанных ячеек осуществляется, как для чистых ячеек. Например, для расчета потока энергии через верхнюю грань компонента  $i_1$  (см. рис. 13) ячейки с номером  $i$  через середину этой грани проводим перпендикуляр до пересечения с прямой, соединяющей центр соседней ячейки и точку на ее ближайшей грани, где определена температура по формуле, аналогичной (13). Значение температуры  $T_{j,i+1}$  находится линейной интерполяцией по температурам  $T_{j,i+1}^*$  (на левой грани ячейки), найденной ранее по формуле (13), и  $T_{i+1}$ . Температура  $T^*$  и коэффициент теплопроводности в центре совместной грани находятся из условия равенства потоков энергии, как для чистых ячеек.

Таким образом, выражения для потоков энергии как для чистых ячеек расчетной сетки, так и для компонентов смешанных ячеек имеют одинаковый вид.

Подставив полученные выражения для потоков энергии (12), (16) в уравнение (11) и представив удельную внутреннюю энергию в виде

$$\varepsilon_i^{\nu+1} = \varepsilon_i^\nu + \varphi_i^\nu (T_i^{\nu+1} - T_i^\nu), \quad \varphi_i^\nu = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_i^\nu,$$

после несложных преобразований получим систему линейных уравнений относительно температур:

$$a_{i,i}^\nu T_i^{\nu+1} + a_{i,i+1}^\nu T_{i+1}^{\nu+1} + a_{i,i-1}^\nu T_{i-1}^{\nu+1} + \sum_{j_i} a_{ij_i}^\nu T_{j_i}^{\nu+1} + \sum_{k_i} a_{ik_i}^\nu T_{k_i}^{\nu+1} = \varepsilon_i^n - \varepsilon_i^\nu + \varphi_i^\nu T_i^\nu. \quad (17)$$

Введем обозначение

$$b_i^\nu = \varepsilon_i^n - \varepsilon_i^\nu + \varphi_i^\nu T_i^\nu. \quad (18)$$

Тогда систему уравнений (17) можно представить в следующем виде:

$$A^\nu \mathbf{T}^{\nu+1} = \mathbf{b}^\nu. \quad (19)$$

Здесь  $A^\nu$  — квадратная слабо заполненная матрица, размерность которой равна общему количеству чистых ячеек и компонентов смешанных ячеек расчетной сетки;  $\mathbf{T}^{\nu+1}$  — искомый вектор температур;  $\mathbf{b}^\nu$  — вектор правой части, элементы которого вычисляются по формуле (18).

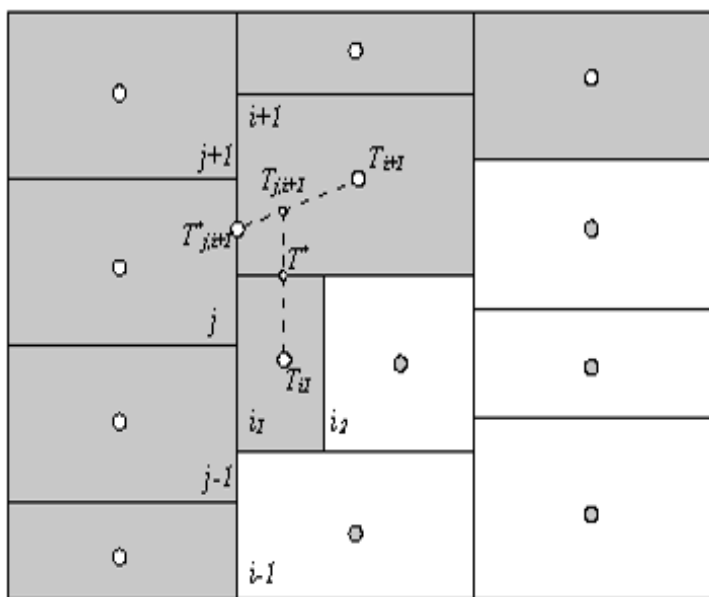


Рис. 13. Расчет потоков через грань компонента смешанной ячейки

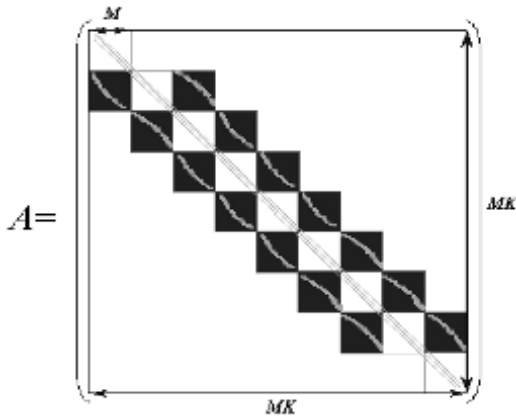


Рис. 14. Структура матрицы  $A$

Данная методика и реализующая ее программа численного решения двумерного нелинейного уравнения теплопроводности были оттестированы на большой серии расчетов задач, имеющих точное решение. Приведем некоторые из них.

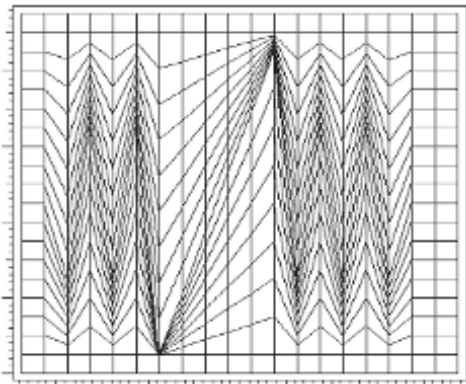


Рис. 15. Неортогональная расчетная сетка

Структура матрицы  $A$  имеет ленточный вид (рис. 14). В центре — три диагонали, а справа и слева от них — *ленты*, максимальный размер которых равен  $M$ , где  $M$  — количество ячеек в одном столбце расчетной сетки. Для ортогональной расчетной сетки размер разностного шаблона равен пяти. Максимальный размер разностного шаблона равен  $2M + 3$ .

Программа, реализующая данную методику численного решения двумерного уравнения теплопроводности, написана на языке Fortran-90 и состоит из двух основных частей: подпрограммы расчета коэффициентов системы линейных уравнений (19) и решателя полученной системы линейных уравнений.

**Задача о бегущей тепловой волне.** Постановка задачи и точное решение взяты из [9].

Так как в реальных расчетах из-за принадлежности методики к лагранжеву типу сетка может сильно искажаться, то, чтобы в полной мере проверить методику, расчеты данной задачи проводились на сильно неортогональной расчетной сетке (рис. 15).

На рис. 16,*а* приведено сравнение точного и численного решений, на рис. 16,*б* — распределение температуры на конечный момент времени.

Видно, что с измельчением расчетной сетки численное решение сходится к точному решению задачи и даже при такой сильно неортогональной расчетной сетке выполняется полная симметрия распространения тепловой волны.

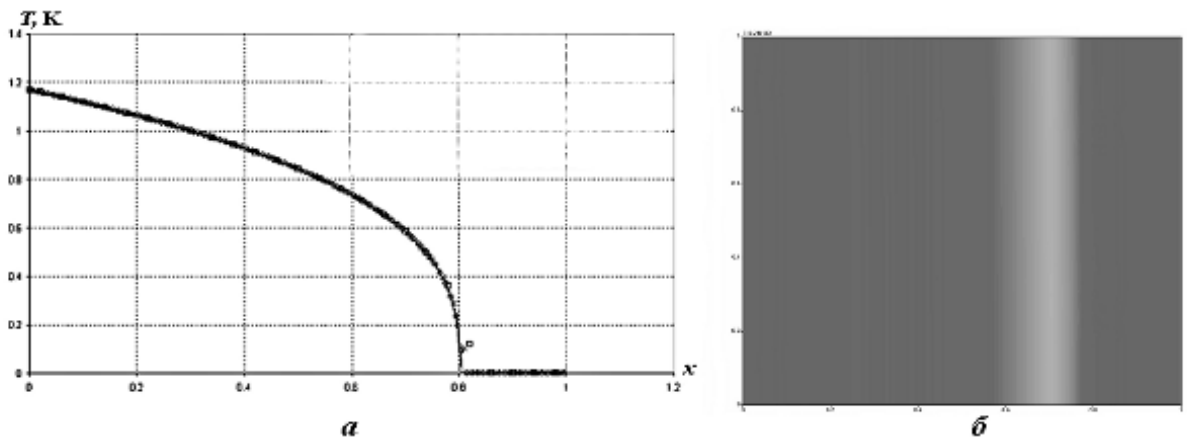


Рис. 16. Результаты расчетов на конечный момент времени: *а* — профиль температуры:  $\square$  — на сетке  $25 \times 25$ ;  $\times$  — на сетке  $50 \times 50$ ;  $\circ$  — на сетке  $100 \times 100$ ; — — — аналитическое решение; *б* — распределение температуры

Интегральная погрешность численных расчетов в зависимости от степени подробности расчетной сетки вычислялась по формуле

$$\xi = \frac{\sum_i |T_i^c - T_i^a| M_i}{\sum_i T_i^a M_i} \cdot 100 \%$$

Здесь  $T_i^c, T_i^a$  — соответственно расчетное и точное значения температуры ячейки с номером  $i$ ;  $M_i$  — масса ячейки с номером  $i$ .

На момент времени  $t = 0,2$  погрешность  $\xi$  для сетки  $25 \times 25$  составила 0,7%, для сетки  $50 \times 50$  — 0,34%, для сетки  $100 \times 100$  — 0,12%.

**Трехобластная задача Ю. А. Бондаренко (рис. 17).** Постановка задачи и точное решение взяты из [9].

На рис. 18 приведено распределение температуры на момент окончания расчета.

На рис. 19 приведено сравнение численного и точного значений температур на двух границах раздела веществ (см. рис. 17). Видно, что при измельчении расчетной сетки численное решение сходится к точному решению задачи.



Рис. 17. Геометрия задачи

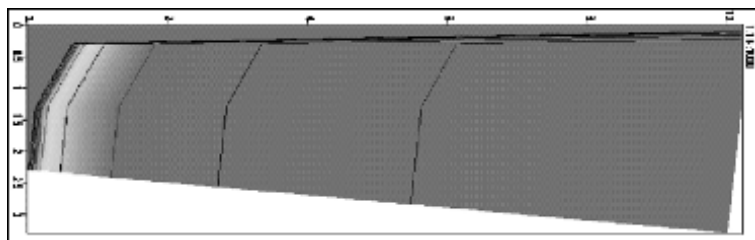


Рис. 18. Распределение температуры на конечный момент времени

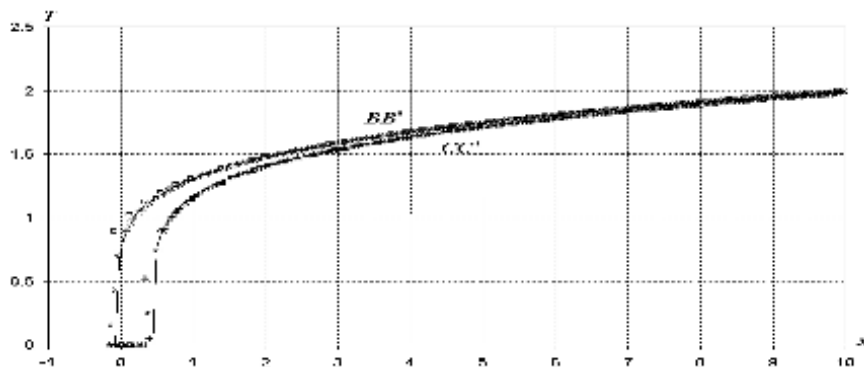


Рис. 19. Сравнение численного и точного решений задачи: — — аналитическое решение на границах  $BB'$  и  $CC'$ ; численное решение на  $BB'$ :  $-\square-$  — сетка  $60 \times 50$ ;  $-\diamond-$  — сетка  $120 \times 100$ ;  $-\times-$  — сетка  $240 \times 200$ ; численное решение на  $CC'$ :  $-\Delta-$  — сетка  $60 \times 50$ ;  $-\ast-$  — сетка  $120 \times 100$ ;  $-\+-$  — сетка  $240 \times 200$

## Заключение

Разработана методика численного решения двумерных уравнений газовой динамики с теплопроводностью и создана программа, реализующая эту методику.

Основные положения методики:

- для аппроксимации уравнений газовой динамики и уравнения теплопроводности применяются неявные разностные схемы;
- при получении конечно-разностных уравнений используется переменный разностный шаблон, размер которого зависит от степени неортогональности расчетной сетки и количества компонентов в смешанных ячейках;
- решение двумерных уравнений газовой динамики и уравнения теплопроводности сводится к решению систем линейных уравнений: для газовой динамики — относительно полных давлений, для теплопроводности — относительно температуры;
- решение уравнений газовой динамики и уравнения теплопроводности в смешанных ячейках (содержащих несколько веществ) аналогично решению этих уравнений в чистых ячейках (содержащих одно вещество) расчетной сетки.

Результаты тестовых расчетов показали, что данная методика обеспечивает хорошую точность расчетов.

## Список литературы

1. *Воронин Б. Л., Скрышник С. И., Софронов И. Д.* Эйлерово-лагранжева методика численного решения трехмерных нестационарных задач газовой динамики с теплопроводностью // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1988. Вып. 3. С. 3–8.
2. *Corella P., Woodward P.* The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54. P. 174–201.
3. *Richtmyer R. D.* Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids // Commun Pure and Appl. Math. 1960. Vol. XIII. P. 297–319.
4. *Мешков Е. Е.* Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемых ударной волной // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1969. № 5. С. 151–158.
5. *Woodward P., Corella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54, No 1. P. 115–173.
6. *Немчинов И. В.* Разлет трехосного газового эллипсоида в регулярном режиме // ПММ. 1965. Вып. 1. С. 134–142.
7. *Дмитриев Н. А., Софронов И. Д., Тихомиров Б. П.* Методика расчета многообластных высокотемпературных задач газовой динамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1983. Вып. 3. С. 3–8.
8. *Рудько Н. М., Скрышник С. И.* Методика и программа численного решения трехмерного (двумерного) уравнения теплопроводности по полностью неявной разностной схеме на переменном пространственном шаблоне // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 3. С. 74–79.
9. *Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Горев В. В. и др.* Описание набора тестов для методик и программ, предназначенных для решения двумерных задач теплопроводности // Там же. 1992. Вып. 2. С. 14–20.