

УДК 519.6

## АВТОМАТИЧЕСКАЯ ЛОКАЛЬНАЯ ПЕРЕСТРОЙКА НЕРЕГУЛЯРНЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ СЕТОК ПРИ РАСЧЕТЕ ЗАДАЧ С СИЛЬНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

А. В. Сковпень, В. А. Быченков, И. И. Кузнецова  
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Описывается метод автоматической локальной перестройки лагранжевой сетки в счетных областях при проведении расчетов двумерных динамических задач. Для построения сетки используется фронтальный алгоритм построения нерегулярных четырехугольных сеток QMV. Алгоритм выполняется в автоматическом режиме и не модифицирует граничных узлов.

Приведен пример расчета с использованием локальной автоматической перестройки сетки. Расчет выполнен по программному комплексу СПРУТ. Серия проведенных расчетов подтверждает, что использование локальной перестройки сетки позволяет поддерживать целостность и геометрическое качество вычислительной сетки в автоматическом режиме.

### Введение

При моделировании течений с сильными сдвиговыми деформациями на подвижных сетках качество ячеек может ухудшаться и становиться неприемлемым для дальнейшего счета. Проблему можно решить "ручной" корректировкой сетки оператором, но это приводит к значительному увеличению времени расчета сложных задач. Возможно поддержание качества сетки посредством отказа от чисто лагранжева метода, т. е. допуская поток вещества сквозь ребра ячеек. Но при существенном изменении топологии счетных областей этот подход становится неэффективным.

Предлагается решать проблему поддержания геометрического качества сетки с помощью ее локальной автоматической перестройки и переинтерполяции физических величин ячеек и узлов в перестроенной подобласти. В процессе счета осуществляется постоянный контроль качества сетки. Если появляются локальные подобласти с сеткой неприемлемого качества, то сетка в них сглаживается, т. е. производится оптимизация положения узлов сетки без изменения ее топологии. Если это не помогает восстановить качество ячеек, то сетка в "плохих" подобластях удаляется и производится построе-

ние новой сетки для граничного контура такой подобласти. Для построения сетки используется алгоритм построения нерегулярных четырехугольных сеток QMV.

Использование нерегулярной сетки объясняется тем, что она, в отличие от регулярной, может быть автоматически построена для произвольного контура, что расширяет возможности проведения расчета в полностью автоматическом режиме, без вмешательства оператора.

Предлагаемый подход был успешно реализован и используется в нескольких методиках расчета задач механики сплошной среды. Пример расчета с использованием автоматической локальной перестройки сетки приводится в конце статьи.

### 1. Алгоритм построения сетки

Для полной перестройки сетки используется фронтальный алгоритм построения нерегулярных четырехугольных сеток QMV, предложенный в [1, 2]. Этот алгоритм заимствует базовую схему алгоритма Q-Morph [3], но имеет ряд следующих основных отличий:

1. Используется дополнительная процедура построения ячейки от активного ребра

фронта. Она применяется, когда построение новой ячейки с помощью основной процедуры не может быть выполнено. Дополнительная процедура основана на переборе всех возможных вариантов построения новой ячейки с использованием ребер, примыкающих к узлам активного ребра, в качестве боковых ребер новой ячейки.

2. Используется иная технология замыкания фронта. Для решения проблемы возникновения фронтов с нечетным количеством ребер используется подход, основанный на делении ячеек, замкнувших фронт. Ячейка делится на две или три ячейки в соответствии с несколькими шаблонами в зависимости от того, к каким ребрам ячейки прилегают образовавшиеся нечетные фронты.
3. Используется сглаживание (локальное — после построения каждой четырехугольной ячейки и окончательное — после построения сетки), основанное на минимизации дискретного аналога функционала Дирихле с регуляризатором [4, 5]. Эффективность этого метода была подтверждена многочисленными тестовыми расчетами, которые продемонстрировали, что сглаживание существенно влияет не только на геометрическое, но и на топологическое качество сетки.
4. Для алгоритма QMV был разработан метод топологической оптимизации, базирующийся на простейших топологических операциях и топологических операциях с наборами ячеек, ограниченными контуром из 6 ребер.

## 2. Локальная перестройка сетки

Процедура локальной перестройки сетки выполняется после каждого счетного шага. Минимальное действие этой процедуры — проверка качества сетки. Если сетка приемлемого качества, то никаких дальнейших действий не производится и расчет продолжается.

Вызов процедуры осуществляется для каждой счетной области. Счетной областью считается множество таких ячеек, что никакая из них не связана топологически с ячейками, не принадлежащими этой области. Счетная область может быть многосвязной и иметь внутренние границы.

Алгоритм локальной перестройки сетки состоит из следующих основных этапов:

1. Проверка меры качества  $M$  ячеек  $C_i$  счетной области  $\Omega$  (используемая мера качества описана в подразд. 2.1). Если не выявлены *плохие ячейки* с мерой качества ниже предельного значения  $M_{lim}$ , то осуществляется выход из процедуры перестройки сетки. Если выявлены плохие ячейки, то производится определение подобласти перестройки сетки  $\Omega_R$ . В эту подобласть включаются плохие ячейки — подмножество  $\Omega_r$  — и некоторое окружение этих ячеек — подмножество  $\Omega_r^+$ , ячейки, которые, как правило, являются *почти плотными*.

Дополнительно производится расширение подобласти перестройки в соответствии с критериями, изложенными в подразд. 2.2. Пусть  $\Omega_r$  — множество ячеек  $C_i$ , таких что  $M(C_i) < M_{lim}$ ;  $\Omega_r^+$  — связанное с  $\Omega_r$  множество ячеек, таких что  $M(C_i) < M_{lim}^+$ . Тогда  $\Omega_r' = \Omega_r \cup \Omega_r^+$  и  $\Omega_R = \Psi(\Omega_r')$ , где  $\Psi$  — функция дополнительного расширения подмножества ячеек.

2. Сглаживание сетки для ячеек подобласти  $\Omega_R$ . Используется барьерный вариационный метод сглаживания, основанный на минимизации дискретного аналога функционала Дирихле с регуляризатором [4, 5]. Этот метод может использоваться для *распутывания* сеток с вырожденными ячейками.
3. Повторная проверка качества ячеек подобласти и переопределение  $\Omega_R$ . Если плохих ячеек не стало и соответственно подобласть  $\Omega_R$  оказалась пустой, то производится переинтерполяция ячейечных и узловых физических величин для ячеек, координаты узлов которых были изменены, и продолжается дальнейший расчет задачи.
4. Формирование  $C_R$  — контура подобласти  $\Omega_R$ .  $C_R$  является связанным множеством граничных ребер  $\Omega_R$ . Ячейки  $\Omega_R$  удаляются из  $\Omega$ .
5. Корректировка контура  $C_R$  (подразд. 2.3). Корректируются только ребра, которые являются граничными в счетной области  $\Omega$ . В процессе корректировки производится разбиение слишком длинных и слияние слишком коротких ребер.
6. Построение с использованием алгоритма QMV новой сетки  $\Omega_R'$  для  $C_R$ .

7. Вклейка подобласти  $\Omega'_R$  в  $\Omega$ . При вклейке производится восстановление топологических связей между новыми и старыми ячейками.
8. Модификация сетки области  $\Omega$  (подразд. 2.4). Цель модификации сетки — топологическое разъединение слишком коротких внутренних ребер, соединяющих граничные узлы, и уничтожение сингулярностей на границе области. Модификация сетки области может проводиться до вызова алгоритма перестройки.
9. Сглаживание сетки для ячеек  $\Omega'_R$ , а также еще двух-трех слоев старых ячеек вокруг них. Этот этап не является обязательным, но зачастую он положительно влияет на качество сетки.
10. Переинтерполяция ячейечных и узловых физических величин для новых ячеек и ячеек, координаты узлов которых были изменены.

Сетка, построенная с помощью QMV, является полностью четырехугольной, если исходная граница состоит из четного числа ребер. При нечетном количестве ребер границы в построенной сетке появится как минимум один треугольник. Так как число ребер  $C_R$  может стать нечетным в результате корректировки этого контура, то в  $\Omega'_R$  и соответственно в  $\Omega$  может появиться треугольная ячейка. Если границы области локально пережаты, т. е., допустим, между границами можно построить один слой ячеек, то при построении возможно появление четырехугольных ячеек с углами, близкими к  $\pi$ . Такие ячейки непригодны для использования при моделировании, поэтому они трансформируются в треугольные ячейки.

**2.1. Мера качества ячеек.** Мера качества ячеек  $M$  используется для оценки необходимости перестройки сетки. В общем, мера качества может быть произвольной и различной для разных классов задач. В данной работе в качестве  $M$  использовалась совокупность критериев качества  $\mu_j$ . Для того чтобы ячейка  $C_i$  удовлетворяла некоторой мере качества  $M_{\text{lim}}$ , необходимо, чтобы она удовлетворяла каждому из критериев, входящих в  $M$ , т. е.  $M(C_i) \geq M_{\text{lim}}$  эквивалентно  $\mu_j(C_i) \geq \mu_{j,\text{lim}}$  для всех  $\mu_j, j = 1, \dots, 4$ . Соответственно  $M(C_i) < M_{\text{lim}}$ , если  $\mu_j(C_i) < \mu_{j,\text{lim}}$  для какого-либо  $\mu_j$ .

Критерии качества:

1. Мера качества  $\mu_1$  формы ячейки. В работах [6, 7] были предложены меры качества для треугольных и четырехугольных ячеек соответственно:

$$\mu_1(ABC) = 2\sqrt{3} \frac{\vec{AB} \times \vec{AC} \cdot \vec{n}}{|\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + |\vec{CA}|^2};$$

$$\mu_1(ABCD) = \min\{\mu_1(ABC), \mu_1(BCD), \mu_1(CDA), \mu_1(DAB)\},$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали треугольника  $ABC$ .

2. Мера качества  $\mu_2$ , основанная на оценке углов ячейки. Пусть  $i$ -й угол ячейки равен  $\alpha_i$ , идеальный угол для ячейки равен  $\alpha_I$ . Для четырехугольной ячейки  $\alpha_I = \pi/2$ , для треугольной —  $\alpha_I = \pi/3$ . Тогда

$$\mu_2 = \min_{i=1, \dots, n} \mu_{2i},$$

$$\text{где } \mu_{2i} = \begin{cases} \frac{\pi - \alpha_i}{\pi - \alpha_I}, & \alpha_i \geq \alpha_I; \\ \frac{\alpha_i}{\alpha_I}, & \alpha_i < \alpha_I; \end{cases}$$

$n$  — количество узлов ячейки.

3. Мера качества  $\mu_3$ , характеризующая вытянутость ячейки. Для треугольной ячейки  $\mu_3 = l_3/l_1$ , где  $l_i$  — длины ребер ячейки, отсортированные по длине,  $l_1 \geq l_2 \geq l_3$ . Для четырехугольной ячейки  $\mu_3 = (l_3 + l_4)/(l_1 + l_2)$ , где  $l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq l_4$ .

4. Критерий соответствия длин ребер ячейки заданному диапазону:

$$\mu_4 = \min_{i=1, \dots, n} \{\min(l_i/L_s, L_b/l_i)\}, \text{ где } l_i \text{ — длины ребер ячейки; } L_s, L_b \text{ — предельные значения длин ребер (минимальное и максимальное).}$$

**2.2. Дополнительное расширение подобласти перестройки сетки.** Выбор подобласти перестройки является важной частью алгоритма локальной перестройки сетки. С одной стороны, она не должна быть слишком большой, так как это приведет к избыточной переинтерполяции физических величин и, как следствие, к неоправданной потере точности

расчета. С другой стороны, слишком маленькая или локально пережатая подобласть перестройки отрицательно повлияет на качество новой сетки, которая будет построена в границах этой подобласти.

Дополнительное расширение подобласти перестройки сетки производится с целью сделать эту подобласть более *выпуклой* и расширить зауженные места.

*Основная процедура дополнительного расширения.* Производится расширение *своих* узких участков и захват *чужих* узких участков. Своими считаются ячейки, принадлежащие  $\Omega_R$ , чужими — ячейки, принадлежащие  $\Omega_S$ , где  $\Omega_S = \Omega \setminus \Omega_R$  (дополнение  $\Omega_R$  до  $\Omega$ ).

Пусть  $O^d(C_i)$  — множество ячеек, являющихся окружением ячейки  $C_i$  уровня  $d$  (или  $d$ -слойным окружением). Если  $d = 1$ , то это ячейки, соединенные с ячейкой  $C_i$  через узел или ребро; последующие слои определяются итерациями:  $O^{d+1}(C_i) = O^1(O^d(C_i))$ .

Первоначально  $\Omega_R = \Omega'_r$ . Далее расширение подобласти перестройки осуществляется таким образом, чтобы выполнялось условие *закрепленности*: для каждой ячейки  $C_i \in \Omega_R$  должна существовать такая ячейка  $C_j \in \Omega_R$ , что  $C_j \in O^d(C_i)$  и  $O^d(C_j) \subset \Omega_R$ ,  $d = D_1$ . Здесь  $D_1$  — показатель закрепленности ячейки  $C_i$ , параметр, позволяющий контролировать расширение  $\Omega_R$ . Обычно  $D_1$  берется в диапазоне  $2 \div 4$ . Например, если  $D_1 = 2$ , то минимальная *толщина* подобласти перестройки будет равна  $2D_1 + 1 = 5$  ячейкам.

При расширении подобласти  $\Omega_R$  в нее включаются ячейки  $C_k \in \Omega_S$ ,  $C_k \in O^1(C_i)$ , где  $C_i$  — ячейки  $\Omega_R$ , для которых  $d$  из условия закрепленности меньше  $D_1$  и является наименьшим для всех ячеек, принадлежащих  $\Omega_R$ , для которых  $d < D_1$ . Эта операция выполняется циклически, пока не останется ячеек, которые должны быть включены в  $\Omega_R$ . Такой подход минимизирует количество ячеек  $\Omega_S$ , которые включаются в  $\Omega_R$  при дополнительном расширении.

Аналогичный алгоритм используется для захвата чужих узких участков. Ячейки, принадлежащие  $\Omega_S$  и имеющие свой (для множества  $\Omega_S$ ) показатель закрепленности  $D_2 = 0$ , переносятся в  $\Omega_R$ .

*Расширение с целью ограничения отношения длин граничных ребер подобласти перестройки.* Пусть  $l_{\min}$ ,  $l_{\max}$  — соответственно минимальная

и максимальная длина граничных ребер контура  $C_R$  подобласти  $\Omega_R$ . Отношение  $l_{\max}/l_{\min}$  характеризует неоднородность границы подобласти. Обычно чем оно больше, тем ниже качество сетки, которая будет построена для такого контура.

С учетом этого фактора вводится ограничивающий параметр  $B_1$  и производится расширение контура таким образом, чтобы выполнялось условие  $B_1 \geq l_{\max}/l_{\min}$ . Но для того чтобы достичь выполнения этого условия, может потребоваться включение в подобласть перестройки слишком большого количества ячеек, что нежелательно. На данном этапе расширения  $\Omega_R$  указанное обстоятельство может учитываться.

*Расширение участков, примыкающих к границе области.* Участки  $\Omega_R$ , прилегающие к границе области  $\Omega$ , могут расширяться на несколько длин ближайших граничных ребер области  $\Omega$ . Обычно это положительно влияет на сетку вблизи границ.

**2.3. Корректировка граничного контура  $C_R$ .** Одним из критериев использования локальной перестройки является чрезмерное уменьшение или увеличение длины ребер. Для контроля за длиной граничных ребер используется корректировка граничного контура  $C_R$  перед построением внутри этого контура новой сетки. Операции корректировки допускаются только с ребрами, которые являются граничными для  $\Omega$ . Ребра, которые не являются граничными в счетной области  $\Omega$ , считаются фиксированными. Они будут использоваться для вклейки перестроенной области  $\Omega'_R$  в  $\Omega$ .

При корректировке контура  $C_R$  используются две операции:

1. Разбиение слишком длинных ребер с длиной  $l > L_b$ . Ребро разбивается вставкой узла  $N_I$  посередине, или положение  $N_I$  определяется с учетом длин соседних ребер и углов между разбиваемым и соседними ребрами.
2. Уничтожение слишком коротких ребер с длиной  $l < L_s$ . При уничтожении ребра его узлы сливаются в один узел  $N_M$ . Положение  $N_M$  также может определяться в некоторой зависимости от длин и положения соседних ребер.

Основными факторами при определении координат узлов  $N_I$  и  $N_M$  являются плавность распределения длин ребер по границе и сохранение

характерных изломов границы. Общий вид границы  $C_R$  должен измениться минимально. Желательно, чтобы некоторая интегральная характеристика отношений длин соседних ребер границы  $C_R$  также была наименьшей.

Возможно, для достижения этой цели операции разбиения и уничтожения целесообразно применять не к единичным ребрам, а к последовательностям ребер с неудовлетворительными длинами, заменяя цепочку таких ребер новыми, с плавным распределением их длин. Но при этом необходимо сводить к минимуму дисбаланс по объемам новых и старых ячеек. Такой дисбаланс может приводить к дисбалансу массы всей системы. При разбиении ребра такого дисбаланса не возникает, а при уничтожении ребра он может появиться. Дисбаланс системы по массе зависит от интенсивности деформации границ областей. Для большинства рассчитанных задач со значительными деформациями он находился на уровне  $\Delta M/M \approx 10^{-6} \div 10^{-3}$ . Чтобы решить эту проблему, можно использовать оптимизацию координаты узла  $N_M$  на основе функционала, учитывающего дисбаланс объемов.

**2.4. Модификация сетки области  $\Omega$  после использования локальной перестройки.** Если топология границ области изменяется значительно, могут возникнуть ситуации, когда

необходимо проводить операции топологического разъединения частей области или уничтожения сингулярностей на границе. Под сингулярностями подразумеваются тонкие клиновидные ячейки границы. Для модификации сетки области используются следующие операции:

1. Разъединение внутренних ребер, соединяющих граничные узлы, если  $l < L_s$ , где  $l$  — длина ребра. Операция продемонстрирована на рис. 1,а.
2. Трансформация и уничтожение ячеек с характерным размером\*  $l_h < L_s$  (рис. 1,б,в). После разъединения ребер производится их уничтожение операцией корректировки граничного контура в соответствии с подразд. 2.3. Разъединение ребра, после которого ячейка с характерным размером  $l_h < L_s$  и короткое граничное ребро уничтожаются, демонстрируется на рис. 1,б. На рис. 1,в показана трансформация ячейки с последующим уничтожением ячейки и короткого граничного ребра.

\*Для треугольной ячейки ее характерный размер — это минимальная длина высоты, которая может быть построена внутри ячейки. Для четырехугольной ячейки  $l_h = \min_{i=1, \dots, n} \{\max(h_1(E_i), h_2(E_i))\}$ , где  $h_1(E_i)$  и  $h_2(E_i)$  — длины высот, построенных к ребру  $E_i$  из противоположащих ему узлов. Высоты, которые лежат вне ячейки, не учитываются.

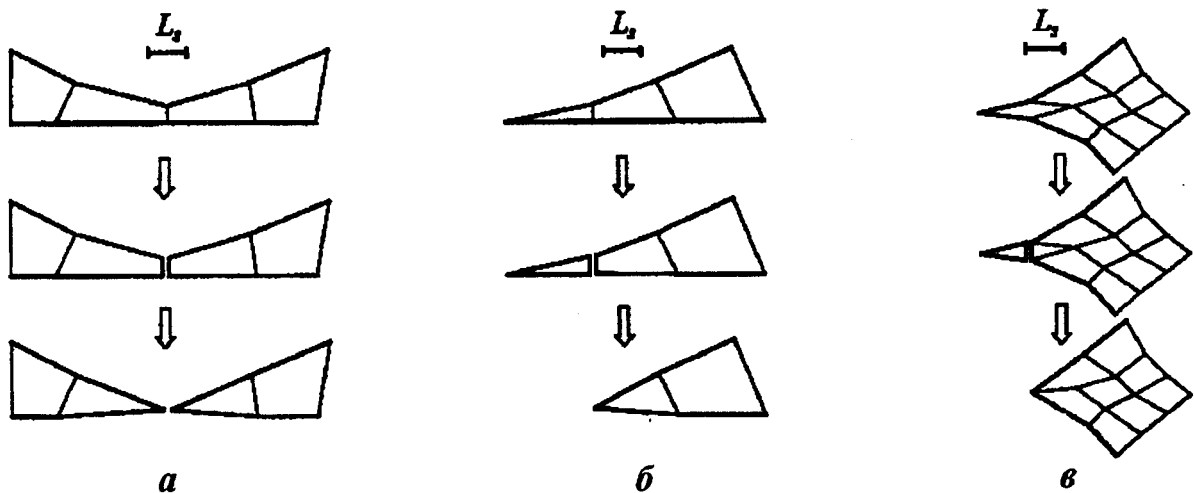


Рис. 1. Операции модификации сетки области: а — разъединение коротких внутренних ребер; б, в — трансформация и уничтожение ячеек с характерным размером  $l_h < L_s$

### 3. Программная реализация

Предложенный метод автоматической локальной перестройки сетки реализован в виде программ, образующих динамически подключаемую библиотеку, что позволяет организовать поддержку геометрического качества сетки в различных программных комплексах.

В библиотеку включены функции построения сетки по заданному граничному контуру, контроля качества сетки и локальной перестройки сетки. При перестройке сетки вызывающая программа получает информацию о всех удаленных, измененных и новых узлах и ячейках, а также информацию о пересечениях новых и старых ячеек, необходимую для переинтерполяции физических величин.

При подключении библиотеки в вызывающей программе нет необходимости объявлять дополнительные типы данных — для передачи данных между счетной программой и библиотекой используются массивы вещественных и целых чисел.

### 4. Пример использования локальной автоматической перестройки сетки

На рис. 2 показаны результаты расчета двумерной задачи пробивания урановым цилиндром алюминиевой преграды. Толщина преграды 10 мм, ее радиус 100 мм, диаметр пробойника 20 мм, скорость пробойника 500 м/с.

В процессе расчета было выполнено 18 локальных перестроек сетки, из них в двух случаях выполнено только сглаживание. Всего было сделано ~ 2000 счетных шагов. Расчет проводился в осесимметричной постановке; для большей демонстративности на рисунках ниже оси симметрии сетка построена зеркально.

Расчет проводился по программе СПРУТ (РФЯЦ-ВНИИТФ) [8], основанной на явной лагранжевой разностной схеме. В программе используется модель упругопластического течения с динамическим пределом прочности, учетом разрушения, пористости и трещиноватости.

На рис. 3 приводится сетка области алюминиевой преграды  $\Omega_b$  до и после локальной перестройки на два различных момента времени. Узлы, обозначенные кружками, были добавлены в границу области (см. разд. 2, п. 5 алгоритма). На рис. 4 показано, что в результате модифика-

ции сетки области (см. п. 8 алгоритма) произошел топологический разрыв области.

Расчет проводился со следующими значениями мер качества ячеек:

$$\begin{aligned} \mu_{1,\text{lim}} &= 0,2; & \mu_{2,\text{lim}} &= 0 \text{ (отключена);} \\ \mu_{3,\text{lim}} &= 0,1; & \mu_{4,\text{lim}} &= 1,0; \\ L_s &= 0,025; & L_b &= 0,17; \\ \mu_{1,\text{lim}}^+ &= 0,35; & \mu_{2,\text{lim}}^+ &= 0 \text{ (отключена);} \\ \mu_{3,\text{lim}}^+ &= 0,115; & \mu_{4,\text{lim}}^+ &= 1,15. \end{aligned}$$

До топологического разрыва области  $\Omega_b$  дисбаланс по массе отсутствовал, после разрыва в результате уничтожения нескольких ячеек масса преграды уменьшилась. Дисбаланс по массе области  $\Omega_b$  составил  $\Delta M/M = 1,21 \cdot 10^{-4}$ .

Коэффициент использования перестройки сетки для области  $\Omega_b$  равен  $K_r = 0,07\%$ , что эквивалентно пересчету 7% количества ячеек области на каждом 100-м шаге,  $K_r = \frac{\sum_{s=1}^S n_c^r(s)}{\sum_{s=1}^S n_c(s)}$ , где  $n_c^r(s)$  — количество перестроенных ячеек на шаге  $s$ ;  $n_c(s)$  — количество ячеек области на шаге  $s$ ;  $S$  — количество счетных шагов.

### Заключение

Использование локальной перестройки сетки позволяет поддерживать целостность и геометрическое качество вычислительной сетки в автоматическом режиме. Это существенно расширяет класс задач моделирования и уменьшает время, необходимое для проведения расчетов сложных систем с сильными деформациями.

Авторы выражают благодарность В. А. Гаранже, М. Ю. Козманову, А. Д. Гаджиеву, С. Н. Барабанову, Э. М. Вазиеву, И. В. Павлову, С. Н. Мельниковой.

### Список литературы

1. Сковпень А. В. Усовершенствованный алгоритм построения нерегулярных четырехугольных сеток. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2004.

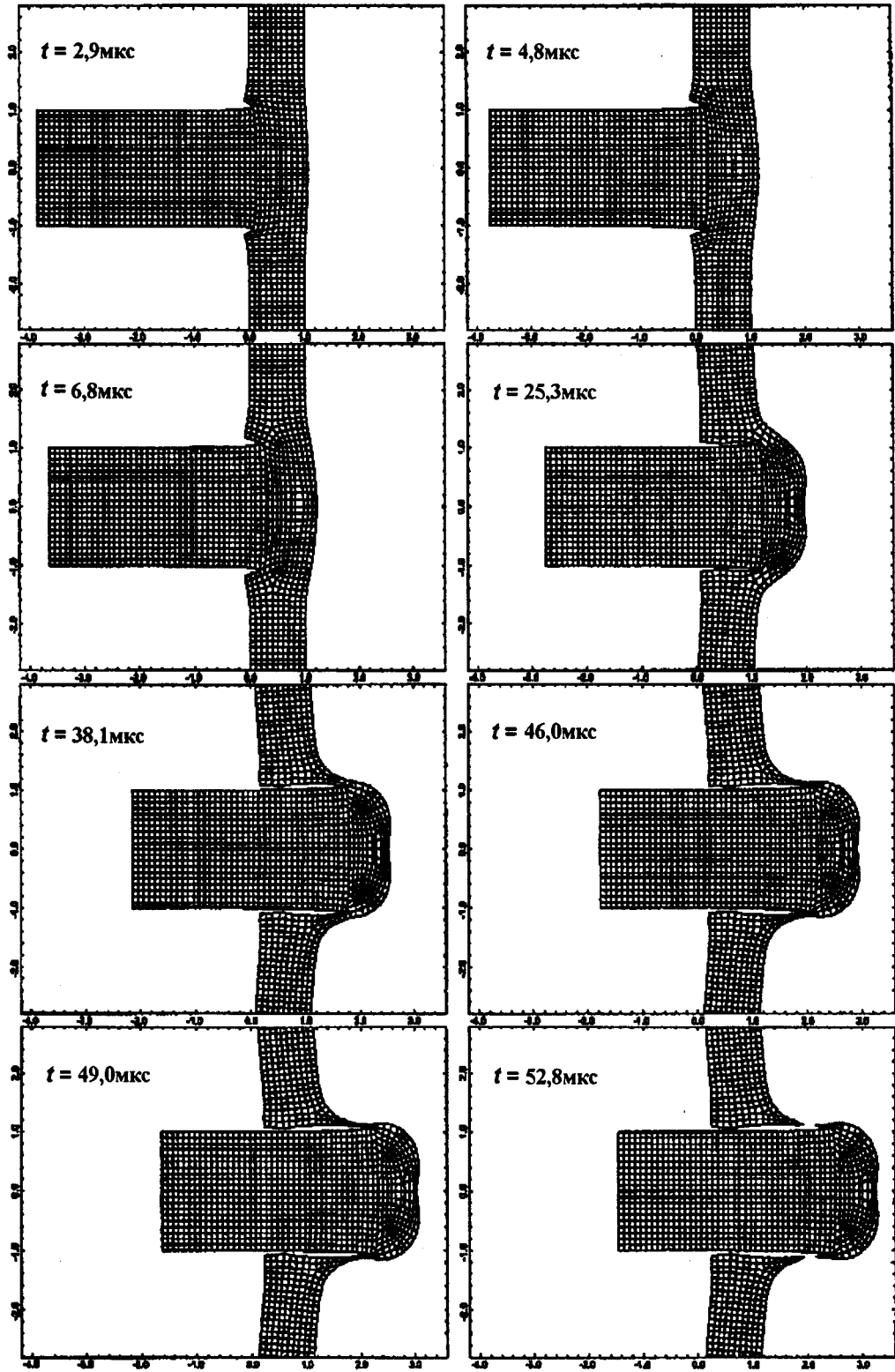


Рис. 2. Расчет задачи пробивания преграды с использованием локальной перестройки сетки

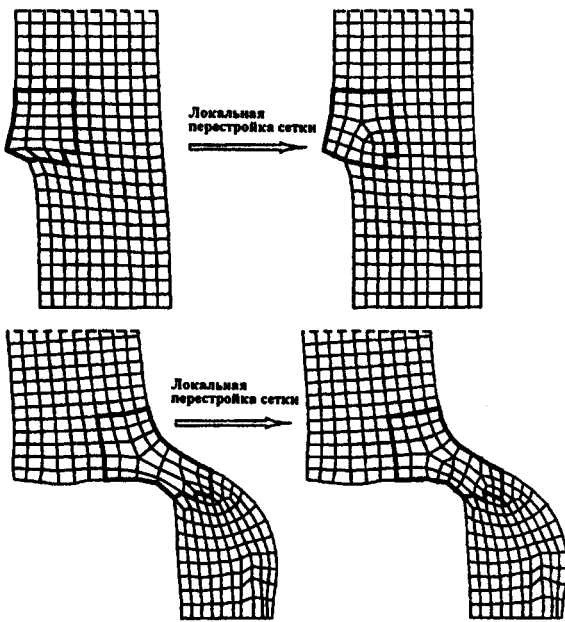


Рис. 3. Примеры локальной перестройки сетки

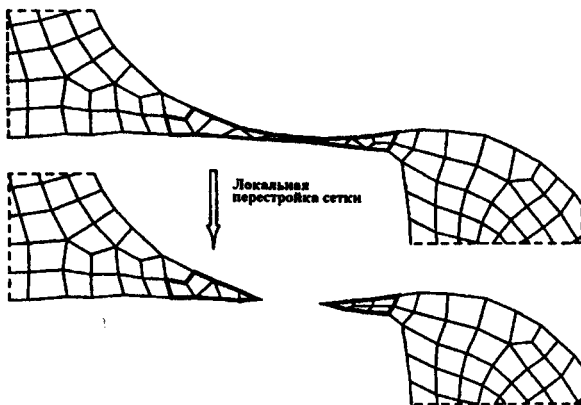


Рис. 4. Пример локальной перестройки сетки с образованием топологического разрыва области

2. Сковпень А. В. Реализация фронтального алгоритма построения нерегулярных четырехугольных сеток // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 1. С. 9–30.
3. Owen S. J., Staten M. L., Canann S. A., Saigal S. Advancing front quadrilateral meshing using triangle transformations // Proc. 7th Int. Meshing Round Table. Dearborn, Michigan. October 26–28, 1998. P. 409–428.
4. Иваненко С. А., Чарухчян А. А. Криволинейные сетки из выпуклых четырехугольников // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1988. Т. 28, № 10. С. 1498–1506.
5. Гаранжа В. А., Капорин И. Е. Регуляризация барьерного вариационного метода построения расчетных сеток // Там же. 1999. Т. 39, № 9. С. 1489–1503.
6. Lo S. H. A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1985. Vol. 21. P. 1403–1426.
7. Canann S. A., Tristano J. R., Staten M. L. An approach to combined Laplacian and optimization-based smoothing for triangular, quadrilateral and tetrahedral meshes // 7th Int. Meshing Round Table. Dearborn, Michigan. October 26–28, 1998.
8. Быченко В. А., Гаджиева В. В. Метод СПРУТ расчета двумерных неустановившихся течений разрушаемых сред // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1978. Вып. 2. С. 17–22.