

УДК 519.6

## АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ МНОГОГРАННОЙ СЕТКИ ДЛЯ МЕТОДИКИ ТИМ

А. А. Воропинов, С. С. Соколов  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Методика ТИМ предназначена для решения трехмерных задач механики сплошной среды на нерегулярных многогранных сетках, при этом она действенна на сетках произвольной структуры. В качестве начальной расчетной сетки для методики ТИМ в настоящее время используется сетка одного из двух основных типов: 1) листовая сетка, полученная из двумерной регулярной или нерегулярной сетки путем ее перемещения вдоль направления или путем вращения вокруг оси; 2) сетка Дирихле, алгоритм построения которой базируется на диаграмме Вороного.

### Введение

Методика ТИМ [1] предназначена для решения задач механики сплошной среды на нерегулярных многогранных сетках произвольной структуры [2].

Начальная счетная сетка для расчета задач по методике ТИМ может принадлежать к одному из следующих основных типов:

- 1) нерегулярная многогранная сетка, полученная полистовым образом из нерегулярной многоугольной сетки. Эта сетка может быть получена поворотом вокруг оси двумерной сетки, путем перемещения листа с двумерной сеткой вдоль некоторого направления, а также сочетанием этих двух способов [3, 4]. Во внутренних узлах этой сетки сходятся, как правило, шесть ячеек (рис. 1,а);
- 2) шестигранная сетка (в том числе матричная — *регулярная*), которая может быть описана структурой методики ТИМ *по граням* с произвольным соседством [2]. В узлах этой сетки сходятся восемь ячеек. Пример такой сетки приведен на рис. 1,б;
- 3) нерегулярная многогранная сетка на основе тел Вороного [5, 6] (внутренний узел окружают четыре ячейки — рис. 1,в);

Заметим, что существует большое количество работ, посвященных построению счетных сеток (например [7—14]), алгоритмы из которых можно также использовать в методике ТИМ.

Для построения сетки первого и второго типов, а также смешанной сетки (в одной части области шестигранные ячейки, в другой — восьмигранные) используется метод полистового построения [3]. Листовая структура сетки может нарушаться вблизи оси вращения из-за объединения ячеек из разных слоев [4].

В качестве исходной двумерной сетки, как правило, используется сетка методики ДМК [15]. Преобразование сетки из двумерной в трехмерную может быть выполнено как после расчета начальной стадии задачи по двумерной программе, так и сразу после построения начальной двумерной сетки. В качестве исходной сетки может использоваться не только регулярная или нерегулярная сетка методики ДМК. Для построения пространственной сетки, также может быть использован разрез с нерегулярной двумерной сеткой, созданный с помощью других методов и сохраненный в формате ЕФР [16].

Сетка третьего типа может быть построена при помощи диаграммы Вороного (такая сетка также называется сеткой Дирихле). Известно несколько алгоритмов построения таких сеток [17]. Наиболее простыми из них с точки зрения реализации являются инкрементные алгоритмы [18, 19]. Один из таких алгоритмов для трехмерного случая был реализован в рамках методики ТМК [20].

При построении сетки Дирихле тип ячеек зависит от способа первоначальной расстановки центров. В результате могут получаться ячейки

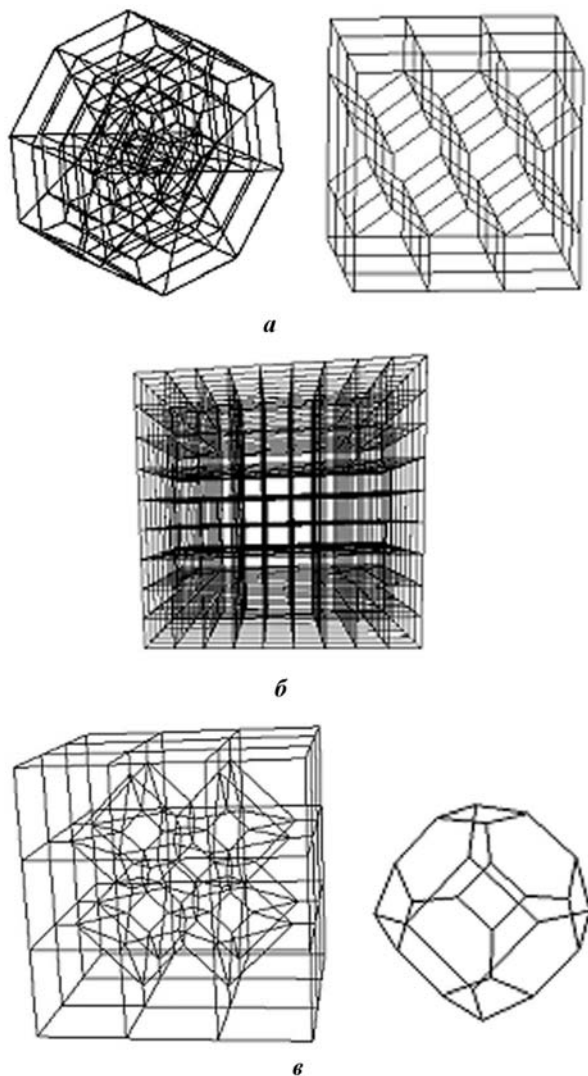


Рис. 1. Примеры сеток: *a* — полученные из двумерной сетки методики ДМК; *б* — шестигранная сетка; *в* — нерегулярная сетка на основе тел Вороного, справа — одна из внутренних ячеек полученной сетки

ки на основе кубов, тел Вороного и др. Если при этом используется универсальный алгоритм построения без определенной схемы расстановки центров, то в результирующей сетке количество ребер, сходящихся в узле, всегда равно 4. Это соответствует построению сетки на основе тел Вороного, однако при построении сеток на основе других тел данные алгоритмы могут приводить к возникновению коротких ребер и граней с малой площадью. Для повышения качества сетки такие элементы необходимо удалять.

Все эти методы успешно применяются в методике ТИМ для построения сетки для одной задачи в разных счетных областях.

## 1. Полистовое построение сетки

Основные особенности метода построения *листовой* трехмерной сетки заключаются в следующем:

1. Построение сетки возможно на основе несамопересекающейся двумерной сетки с произвольной структурой.
2. Сетка может быть построена вращением вокруг произвольного вектора либо путем перемещения двумерной сетки в пространстве вдоль заданного вектора.
3. Возможно построение сетки для нескольких счетных областей. Параметры построения сетки для разных счетных областей задаются независимо друг от друга.
4. В качестве базовой сетки может использоваться как начальная двумерная сетка, так и сетка после расчета начальной стадии по двумерной методике. При этом точность интерполяции величин прямо пропорциональна количеству выстраиваемых слоев.

**Способы построения.** Сетка может строиться несколькими способами:

1. *Транслирование в пространстве вдоль заданного направления.* Этот способ построения является наиболее простым. Исходная двумерная сетка транслируется вдоль направления, которое задается как отрезок прямой. При этом точка конца отрезка определяет положение последнего слоя узлов сетки относительно точки начала отрезка. При построении этим способом особенностей не возникает, сетка всегда получается незамкнутой. Поэтому необходимо задавать граничные условия на основаниях поверхности тела, которые используются для завершения алгоритмов построения.
2. *Вращение вокруг оси.* В данном случае задаются ось как уравнение прямой в пространстве и угол поворота, на который поворачивается последний слой узлов двумерной сетки. При этом, если в исходной сетке часть узлов лежит на оси вращения, возникает особенность типа *ось*. В случае, если вращение выполняется на угол  $2\pi$ , получается замкнутая сетка. Если угол вращения меньше  $2\pi$ , то сетка получается незамкнутой и необходимо задавать граничные условия на поверхностях, выбранных в качестве оснований тела для построения сетки.

3. *Сочетание вращения и трансляции.* Описанные способы построения можно сочетать в рамках построения единой сетки для тела сложной конфигурации. В этом случае геометрия задачи разбивается на ряд фрагментов, в каждом из которых сетка формируется одним из описанных выше способов. При этом можно говорить, что производится построение трехмерной сетки вдоль некоторой линии. Данный способ можно использовать для построения сеток геометрических тел типа трубопровод или в более сложных геометрических формах.

**Алгоритм полистового построения сетки.** Алгоритм полистового построения нерегулярной многогранной сетки на основе двумерной сетки базируется на том, что после формирования первого слоя сетки остальные слои могут быть получены дублированием первого слоя.

Алгоритм выполняется в несколько этапов:

1. Обработка двумерной сетки: подсчет количества ячеек, узлов, ребер. Выполнение отображения сетки в случае необходимости. Введение нумерации элементов двумерной сетки для ячеек, ребер и узлов.
2. Расчет структуры сетки: формирование связей *ячейки — грани* и *грани — узлы*. Этот этап можно разбить на 4 шага:
  - 1) определение количественных характеристик сетки: количества слоев ячеек и узлов; количества граней, лежащих "вдоль" слоя в расчете на 1 слой; количества граней, расположенных "перпендикулярно" к слою, и др. Эти количественные характеристики позволяют точно определить смещения в нумерации элементов сетки между различными слоями;
  - 2) расчет первого слоя сетки. При этом формируется нумерация элементов сетки для ячеек, граней и узлов. При введении этой нумерации устанавливается соответствие между элементами трехмерной и двумерной сеток (ячейками, гранями и ребрами, узлами);
  - 3) формирование всех остальных слоев дублированием первого слоя со сдвигом нумерации элементов;
  - 4) замыкание последнего слоя на первый в случае замкнутой сетки (построения сетки вращением вокруг оси на

угол  $2\pi$ ) либо создание дополнительного слоя граней и узлов в случае незамкнутой сетки.

3. Выполнение структурных перестроек трехмерной сетки, например объединение ячеек вдоль оси симметрии для устранения особенности, удаление узлов, в которых сходится два ребра, объединение соседних граней, разделяющих одну и ту же пару ячеек. Также на этом этапе выполняется удаление фиктивных граней и узлов, получающихся при вращении двумерной сетки вокруг оси или при объединении ячеек. Заметим, что при этом не производится уплотнения нумерации элементов сетки, чтобы не нарушить соответствия с двумерной сеткой, которое сохраняется благодаря смещениям в нумерации элементов. Удаленные элементы отмечаются специальным образом как *фиктивные* (например, для ячеек указывается количество граней, равное нулю).
4. Расчет геометрических и физических параметров задачи на сетке (координат, скоростей, плотностей, энергий и др.). При этом используется соответствие между элементами трехмерной и двумерной сеток.
5. Расчет масс ячеек и узлов, контроль пересчета по балансам интегральных величин.
6. Уплотнение нумерации элементов сетки для устранения *дыр*, возникших в результате структурных перестроек (см. п. 3).

**Выделение особенности на оси путем объединения ячеек и построение сеток с "переменным" количеством слоев.** При проведении некоторых расчетов на сетках, построенных путем вращения, вблизи оси может нарушаться симметрия решения (возникает так называемый *осевой эффект*). Одним из способов борьбы с этим дефектом сетки является устранение особенности путем уменьшения количества слоев вблизи оси. В рамках листового построения сетки такой способ наиболее просто реализуется путем объединения трехмерных ячеек из разных слоев, полученных из одной двумерной ячейки. В этом случае на оси может оставаться произвольное количество ячеек, вплоть до одной (т. е. на оси может вообще не остаться узлов).

Однако в случае объединения ячеек, лежащих вдоль оси, возникает другая проблема: полученные ячейки имеют большое количество граней. Опыт расчетов показал, что такие ячейки имеют много *степеней свободы*, т. е. могут силь-

но деформироваться при моделировании прохождения ударных волн. Это, в свою очередь, значительно повышает нагрузку на алгоритмы поддержания качества счетной сетки в процессе счета.

Указанный недостаток также может быть преодолен путем использования алгоритмов объединения ячеек, но уже для ячеек не непосредственно лежащих вдоль оси, а на небольшом расстоянии от нее. В результате получается сетка с *переменным* количеством слоев по радиальному направлению.

*Построение сетки с выделением особенности на оси.* Для демонстрации алгоритма выделения особенности на оси рассмотрим нерегулярную двумерную сетку, состоящую из 10 ячеек (рис. 2). Координата левого нижнего узла —  $(0, 0)$ .

Выполним построение трехмерной сетки вращением двумерной сетки вокруг оси  $Oy$  на угол  $\pi$ . При этом построим 8 слоев и зададим объединение ячеек, лежащих вдоль оси, в одну ячейку.

На рис. 3,а показана ячейка с номером 1 (полученная из двумерной ячейки с номером 1) до проведения операций объединения граней и удаления узлов, лежащих на оси. Вид этой ячейки после объединения граней представлен на рис. 3,б. На этом рисунке выделены узлы, в которых сходятся по 2 ребра. Окончательный вид ячейки после удаления узлов, лежащих на оси, в которых сходилось по 2 ребра, представлен на рис. 3,в (точками выделены узлы грани, лежащей в плоскости  $Oxy$ ).

Поверхность результирующей сетки показана на рис. 4,а, вид боковой поверхности до и после выделения особенности на оси — на рис. 4,б и 4,в соответственно.

*Построение сетки с переменным количеством слоев.* Для демонстрации сетки с переменным количеством слоев используется такая

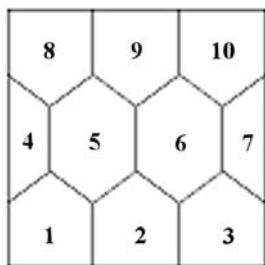


Рис. 2. Двумерная нерегулярная сетка с номерами ячеек

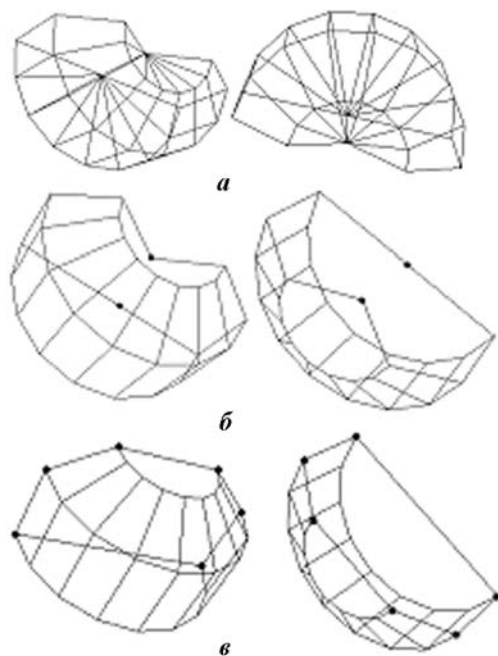


Рис. 3. Вид ячейки с номером 1 на различных этапах построения: а — без объединения граней и удаления узлов на оси; б — после объединения граней, но без удаления узлов на оси; в — окончательный вид

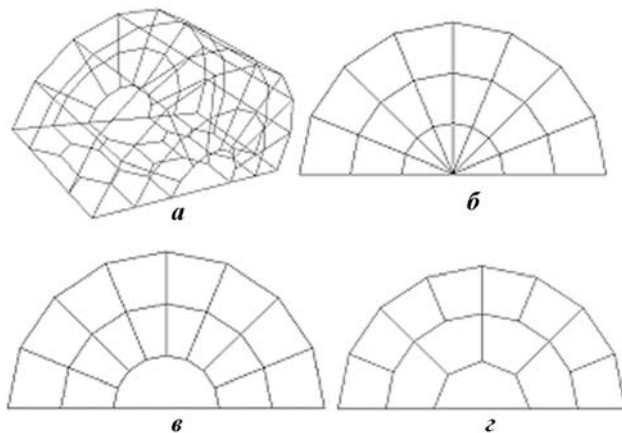


Рис. 4. Вид сетки: а — ребра поверхности сетки, полученной вращением на угол  $\pi$ ; б—г — боковая поверхность

же сетка, как и в предыдущем примере, но дополнительно для ячеек 2, 5 и 9 (см. рис. 2) задан шаг объединения 2 (объединяются ячейки из слоев 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8). Рассмотрим операции, производимые над сеткой, также на примере ячейки с номером 1.

На рис. 5 представлены ячейка с номером 1 и соседние с ней ячейки, полученные из двумерной ячейки с номером 2. На рис. 5,а выделены узлы,

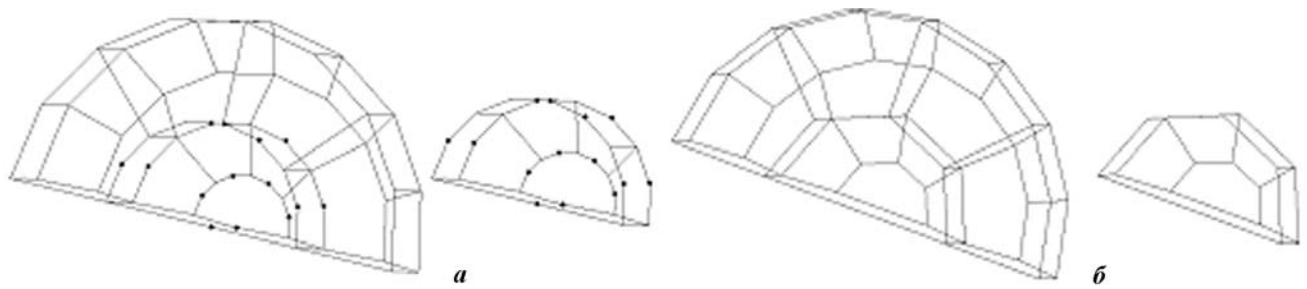


Рис. 5. Вид ячейки с номером 1 и соседних с ней ячеек, полученных из двумерной ячейки с номером 2: *а* — с выделением узлов, в которых сходятся по 2 ребра; *б* — после удаления этих узлов

в которых сходятся по 2 ребра. Вид ячейки после проведения операции удаления таких узлов представлен на рис. 5,б. Боковая поверхность результирующей сетки представлена на рис. 4,г.

**Время построения листовых трехмерных сеток.** Одной из немаловажных характеристик алгоритма, базирующегося на методе полистового построения, является время, необходимое для построения сетки. Приведем ряд замеров для построения сеток разных размеров (табл. 1). Построение сеток выполнялось на персональном компьютере Pentium D/930D/3 ГГц/4Гбайт в последовательном режиме. Трехмерная сетка строилась перемещением двумерной сетки в пространстве вдоль оси *Oz*. При построении сетки производился расчет масс (без расчета масс время построения даже самых больших сеток не превышает нескольких секунд). Структурные перестройки сетки не производились. В качестве начальных использовались три двумерные нерегулярные сетки из 1 000, 10 000 и 100 000 ячеек.

Заметим, что при построении сетки вращением вокруг оси с объединением ячеек время построения несколько увеличивается, поскольку дополнительно приходится обрабатывать ось и

последний слой сетки, а также выполнять уплотнение нумерации. Увеличение времени при этом обычно не превышает 10–30 %.

## 2. Построение сетки Дирихле

Алгоритм построения сетки Дирихле заключается в следующем.

На первом этапе в расчетную область "набрасывается"  $N$  точек — центров будущих ячеек.

На втором этапе для каждой точки  $I$ ,  $1 < I \leq N$ , находится ближайшая точка  $J_I$ ,  $1 \leq J_I < I$ . Далее выполняется непосредственное построение сетки Дирихле за  $N$  шагов.

На первом шаге формируется первая ячейка, заполняющая всю область, которая связывается с точкой  $I = 1$ . На каждом последующем  $J$ -м шаге в сетку добавляется очередная  $J$ -я точка (центр  $J$ -й ячейки) и сетка перестраивается. (Подробно алгоритм перестроения приведен в работе [20].)

В целом представляемый алгоритм аналогичен алгоритму из [20], однако в нем блок поиска ближайшей точки отделен от самого построения. Этот блок является наиболее дорогостоящим с точки зрения времени вычислений для сетки с большим количеством точек, а такая модификация позволяет достаточно просто распараллелить блок поиска ближайшей точки.

При построении сетки Дирихле тип ячеек зависит от способа первоначальной расстановки центров. При расстановке центров в вершинах и центрах кубической решетки получается сетка на основе тел Вороного (см. рис. 1,а). При расстановке центров в вершинах кубической решетки получается сетка, состоящая из кубов (см. рис. 1,б). Также при определенном расположении центров можно получить сетку, близкую к шестигранной, заполняющую шар и полый шар (рис. 6).

Таблица 1

Время построения трехмерных сеток, с

Количество ячеек результирующей сетки	Двумерная сетка		
	1 000 ячеек	10 000 ячеек	100 000 ячеек
10 000	0,109	0,141	—
50 000	0,468	0,500	—
100 000	0,938	0,969	1,375
500 000	4,672	4,718	5,126
1 000 000	9,438	9,437	9,813
5 000 000	46,938	47,188	47,328

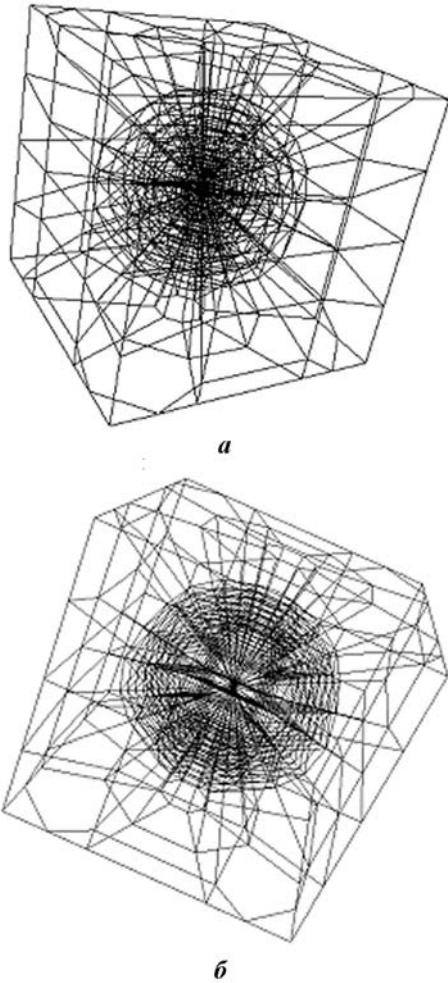


Рис. 6. Сетка, близкая к шестигранной, заполняющая шар (а) и полый шар (б) (без выполнения отсечений)

Ограничением данного метода построения является то, что первоначальное тело должно быть выпуклым многогранником (как правило, используется прямоугольный параллелепипед). Для получения сетки в других телах используются различные алгоритмы отсечений (в сочетании со специальной расстановкой центров будущих ячеек).

**Обработка сетки Дирихле.** При построении сетки Дирихле тип ячеек зависит от способа первоначальной расстановки центров. В результате могут получаться ячейки на основе кубов, тел Вороного и др. Надо заметить, что в общем случае в узлах сетки Дирихле сходится  $N + 1$  ребро, где  $N$  — размерность пространства. Такое ограничение накладывается на используемую сетку, например, в методике ТМК [20]. В сетке на основе тел Вороного, в узле сходятся четыре ребра, однако при построении сеток на

основе других тел выдерживание такого ограничения может приводить к возникновению коротких ребер и маленьких граней (на самом деле короткие ребра могут возникать и на внешних границах сетки на основе тел Вороного).

В методике ТИМ ограничений на количество ребер, сходящихся в узле, нет. Поэтому построение сетки по алгоритму [20] является первым этапом построения итоговой сетки для методики ТИМ.

На втором этапе полученная сетка Дирихле проверяется на наличие коротких ребер и маленьких граней элементов, и в случае их обнаружения они удаляются. В настоящее время используются два способа определения таких элементов:

1. Ребро (грань) удаляется, если его длина (площадь) меньше заданной величины. Данный подход является наиболее простым, однако плохо применяется для неравномерных по пространству сеток; в этом случае используется второй способ.
2. Ребро удаляется, если оно в заданное число раз меньше средней длины ребра для каждой из формирующих это ребро ячеек. То есть ребро более чем в  $N$  раз короче среднего ребра ячейки, причем это условие должно выполняться для всех ячеек, содержащих это ребро. Аналогичный алгоритм используется для грани.

Способ определения маленьких элементов сетки и необходимые характерные величины задаются в качестве начальных данных.

Недостатками данного алгоритма являются два обстоятельства: последовательность алгоритма и наличие поиска ближайшего центра построенных ячеек (при увеличении количества точек значительно возрастает время их построения). Эти обстоятельства приводят к тому, что скорость построения сетки Дирихле является довольно низкой, особенно в сравнении с рассмотренным выше листовым построением.

**Время построения сетки Дирихле.** Для исследования скорости построения сетки Дирихле выполнялось построение сетки на основе тел Вороного в кубе с ребром, равным 1. Количество центров вдоль осей бралось равным и варьировалось от 10 до 80. Расчеты проводились в последовательном режиме на той же ЭВМ, на которой выполнялось построение листовых сеток. Замеры времени построения приведены в табл. 2.

Таблица 2

**Время построения трехмерных сеток**

Количество центров	Количество ячеек результирующей сетки	Время построения трехмерной сетки, с
$10 \times 10 \times 10$	1 729	0,843
$25 \times 25 \times 25$	29 449	30,766
$50 \times 50 \times 50$	242 659	829,656
$65 \times 65 \times 65$	536 769	3 345,933
$80 \times 80 \times 80$	1 005 039	9 905,349

**Примеры построенных сеток**

**Трехмерные листовые сетки.** Для наглядности работы алгоритмов рассмотрим двумерную нерегулярную сетку, состоящую из 10 ячеек и 22 узлов (рис. 7,а). Эта сетка была использована для построения первого ряда трехмерных сеток. На рис. 7,б представлена сетка, полученная перемещением данной двумерной сетки в пространстве вдоль оси  $Oz$ . Сетка состоит из 8 слоев.

На рис. 8 представлен общий вид и вид одного слоя сеток, полученных вращением двумерной сетки вокруг осей  $Ox$  (см. рис. 8,а) и  $Oy$  (см. рис. 8,б). Обе сетки состоят из 8 слоев.

Для дальнейших примеров построения сеток использована регулярная сетка методики ДМК,

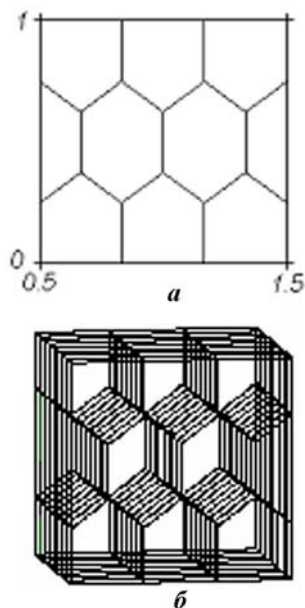


Рис. 7. Простейшая двумерная нерегулярная сетка (а) и трехмерная сетка, полученная перемещением двумерной сетки в пространстве вдоль оси  $Oz$  (б)

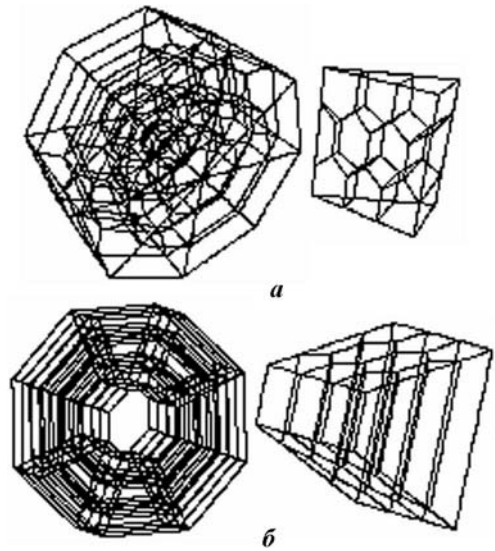


Рис. 8. Сетка, полученная вращением нерегулярной двумерной сетки: а — вокруг оси  $Ox$ ; б — вокруг оси  $Oy$

изображенная на рис. 9, состоящая из 30 ячеек (3 слоя по 10 ячеек) и 44 узлов (4 слоя по 11 узлов).

На рис. 10 представлены сетки, состоящие из 10 слоев, полученные перемещением данной двумерной сетки в пространстве вдоль оси  $Oz$ . На рис. 10,а представлена сетка, полученная перемещением начальной двумерной сетки, на рис. 10,б — с предварительным ее отображением относительно оси  $Ox$ .

На рис. 11 представлены сетки, полученные вращением двумерной сетки (см. рис. 9) вокруг оси  $Ox$ : состоящая из 5 слоев, полученная вращением на угол  $\pi$  (см. рис. 11,а), и из 10 слоев, полученная вращением на угол  $2\pi$  (см. рис. 11,б). На рис. 11,в показан один слой для этих двух сеток.

На рис. 12 представлены сетки, полученные сочетанием вращения и трансляции. Сетка на рис. 12,г получена из сетки, изображенной на рис. 12,в путем отображения относительно плоскости.



Рис. 9. Двумерная четырехугольная сетка

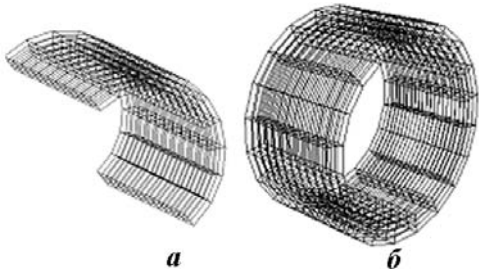


Рис. 10. Перемещение двумерной сетки в пространстве: без (а) и с предварительным отображением (б)

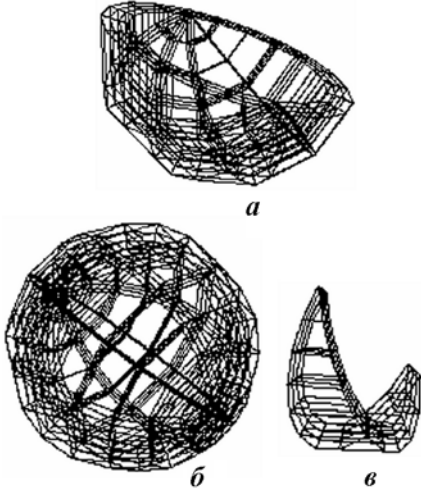


Рис. 11. Вращение двумерной четырехугольной сетки вокруг оси: а — на угол  $\pi$ ; б — на угол  $2\pi$ ; в — один слой сетки

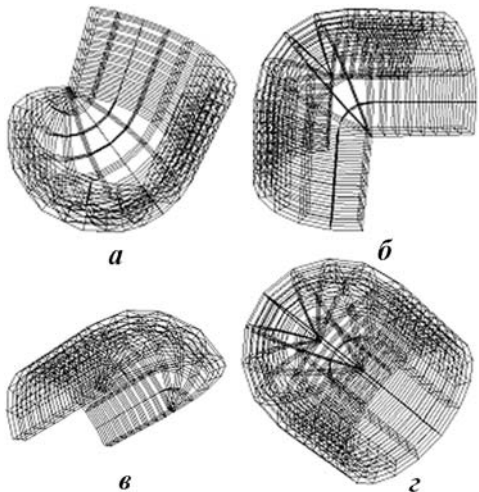


Рис. 12. Сочетание вращения двумерной четырехугольной сетки: а — вращение на угол  $\pi$  и перемещение; б — перемещение и вращение на угол  $\pi/2$  и еще одно перемещение; в — вращение на угол  $\pi/2$  и перемещение; г — случай в с отображением

Для примеров, изображенных на рис. 13, использована нерегулярная сетка ДМК более сложной структуры (см. рис. 13,а). Двумерная сетка состоит из 3 подобластей, для каждой из которых задана своя счетная сетка. На рис. 13,б представлена внешняя поверхность сетки, полученная вращением двумерной сетки вокруг оси  $Ox$  на угол  $\pi/2$  с предварительным отображением относительно оси  $Oy$ . Сетка состоит из 5 слоев. На рис. 13,в изображена поверхность сетки с такими же параметрами, но полученная вращением на угол  $2\pi$  (сетка состоит из 20 слоев). Рис. 13,г демонстрирует сетку для одного слоя ячеек, на этом рисунке хорошо видна линия, по которой выполнено отображение двумерной сетки.

Последний пример демонстрирует возможности методики по построению сетки для нескольких математических областей. В качестве начальной двумерной сетки был использован упрощенный фрагмент модельной задачи, в которой стальной пробойник ударяется о тонкий лист железа (рис. 14,а). Двумерная сетка состоит из двух математических областей. На рис. 14,б представлена трехмерная сетка, полученная вращением двумерной сетки вокруг оси  $Ox$ . Для сетки пробойника построено 8 слоев, для листа железа — 20. На рис. 14,в сетка для пробойни-

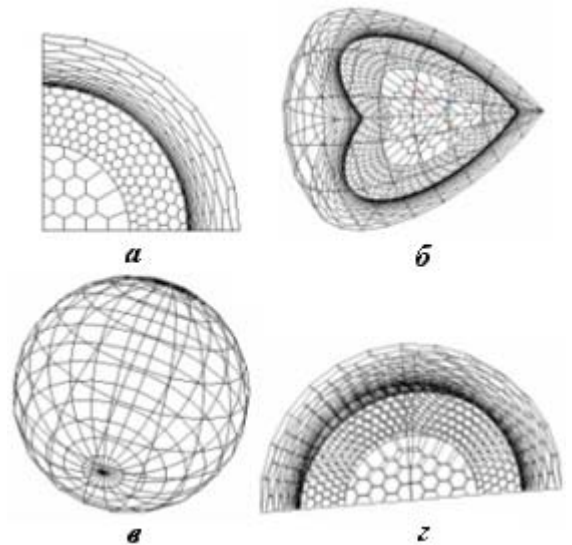


Рис. 13. Построение сетки из нерегулярной двумерной сетки поворотом вокруг оси с предварительным отображением: а — исходная двумерная сетка; б — поверхность сетки, полученной вращением на угол  $\pi/2$ ; в — поверхность сетки, полученной вращением на угол  $2\pi$ ; г — один слой сетки



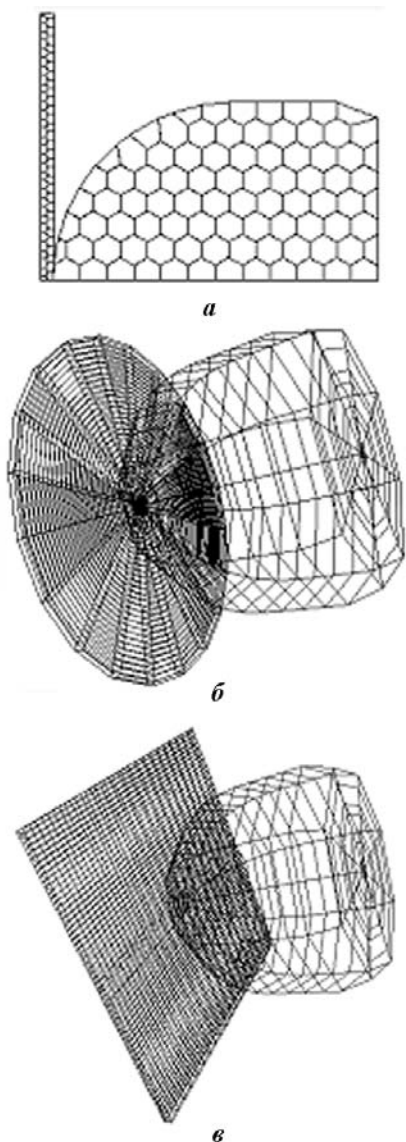


Рис. 14. Построение многообластной трехмерной сетки: *a* — исходная двумерная сетка; *б* — трехмерная сетка, сетка для области преграды построена вращением; *в* — сетка для области преграды построена перемещением

ка также построена вращением вокруг оси  $Ox$  и состоит из 8 слоев, а для сетки в слое железа выполнено отображение и перемещение в пространстве вдоль оси  $Oz$ .

**Листовая сетка с выделением особенности на оси.** На рис. 15 представлена начальная двумерная сетка и трехмерная сетка, полученная ее вращением на угол  $2\pi$  вокруг оси  $Ox$ , состоящая из 20 слоев, для задачи о взрыве в экспоненциальной атмосфере. На рис. 16 хорошо видно появление *осевого* эффекта при проведении трехмерного расчета на листовой сетке. На рис. 17

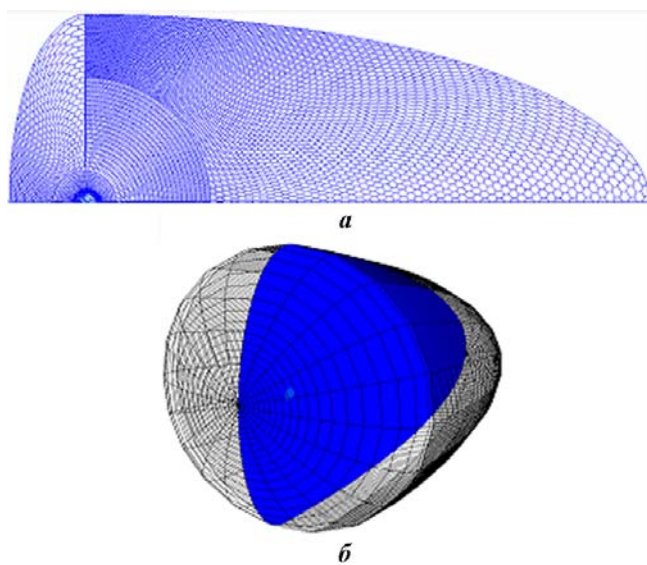


Рис. 15. Начальная двумерная сетка (*a*) и вид поверхности трехмерной сетки из 20 слоев (*б*)

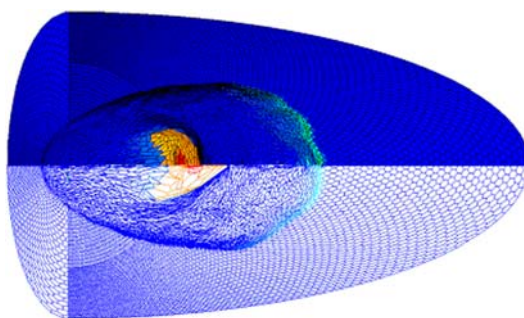


Рис. 16. Появление *осевого* эффекта: сверху от оси — расчет по двумерной методике ДМК, снизу — сечение сетки вдоль плоскости  $Oxu$  в расчете по методике ТИМ

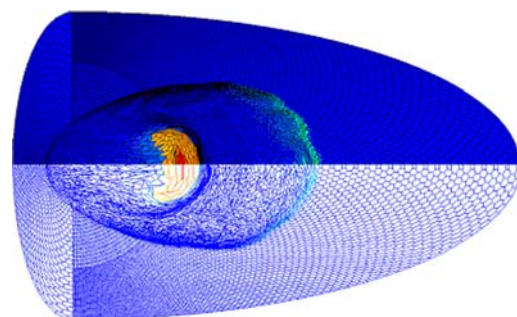


Рис. 17. Расчет на сетке с переменным количеством слоев: сверху от оси — расчет по методике ДМК, снизу — сечение сетки вдоль плоскости  $Oxu$  в расчете по методике ТИМ

представлен этот же расчет, но на сетке с выделенной особенностью путем объединения ячеек, близких к оси (сетка с переменным количеством слоев).

**Сетка Дирихле.** На рис. 18 представлена сетка на основе тел Вороного с расстановкой центров  $3 \times 3 \times 3$  в сфере единичного радиуса. На рисунке приведена первоначально полученная сетка в кубе, охватывающем заданную сферу, вид сетки после отсечения и вид одной из внутренних ячеек.

На рис. 19 представлен пример построения сетки в такой же области, но с расстановкой центров в вершинах кубической сетки. Количество центров  $5 \times 5 \times 5$ . В данной сетке при первоначальном построении образуются маленькие грани (площадью порядка  $10^{-7}$ ) и короткие ребра. Поэтому для улучшения качества сетки такие грани и ребра определяются и удаляются. Также заметим, что на границе области при отсечении сферой появляются шестигранные ячейки.

**Сетки различных типов в разных областях.** Реализована возможность построения в одной задаче сетки разных типов (в разных счетных областях).

На рис. 20 приведен пример двухобластной сетки: в левой части счетная область с шести-

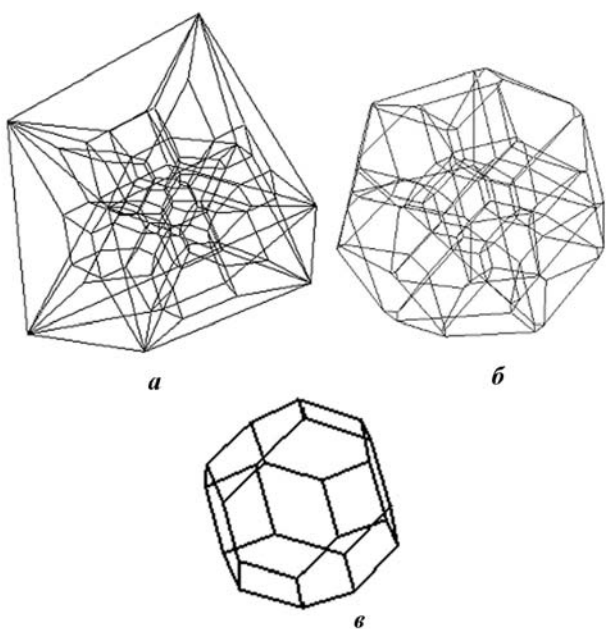


Рис. 18. Сетка Вороного в сфере с расстановкой центров  $3 \times 3 \times 3$ : *a* — сетка в кубе; *б* — после отсечения сферой; *в* — внутренняя ячейка

гранной сеткой, справа — с сеткой на основе тел Вороного.

На рис. 21 — двухобластная сетка в шаре.

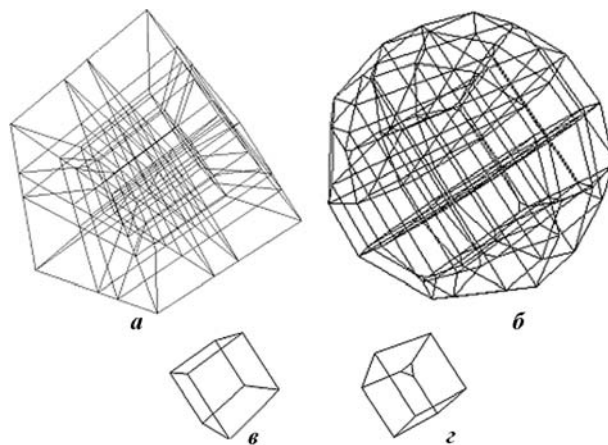


Рис. 19. Кубическая сетка в сфере с расстановкой центров  $5 \times 5 \times 5$ : *a* — сетка в кубе; *б* — после отсечения сферой; *в* — внутренняя ячейка; *г* — одна из граничных ячеек

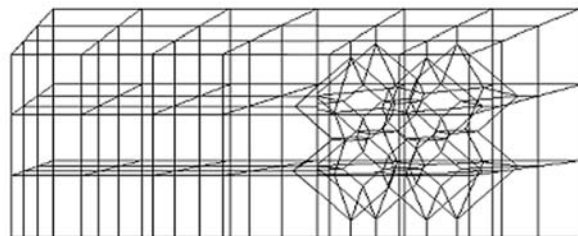


Рис. 20. Двухобластная сетка

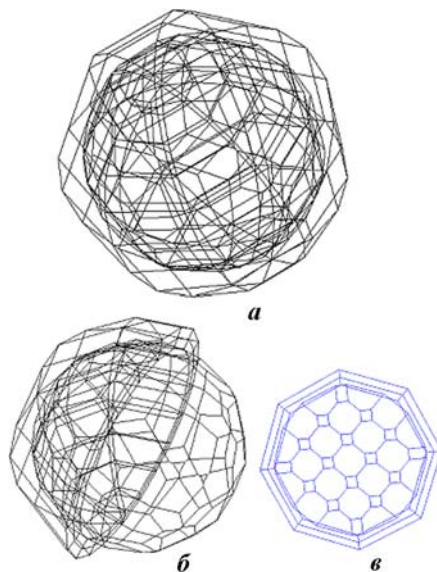


Рис. 21. Двухобластная сетка: *a* — ребра всех поверхностей; *б* — "половины" листовой области; *в* — сечение плоскостью  $x = 0$

## Заключение

В работе представлено описание двух алгоритмов построения нерегулярных многогранных сеток, используемых в методике ТИМ.

Первый алгоритм основан на полистовом заполнении тела и позволяет строить сетки для геометрических тел, имеющих некоторую симметрию. Листовая структура сетки может нарушаться вблизи оси вращения путем объединения ячеек. Этот метод позволяет строить сетки с достаточно высокой скоростью.

Второй подход в построении сеток основан на диаграмме Вороного. Алгоритм для данного метода ранее был разработан для методики ТМК [20], в данной работе предлагается его модификация, связанная с улучшением качества счетной сетки. Алгоритм основан на удалении коротких ребер и граней с малой площадью. Применение такого алгоритма возможно благодаря использованию в методике ТИМ произвольного количества связей в узлах. Этот метод позволяет строить сетки в областях сложной формы, но время построения значительно больше, чем у листового построения.

Описанные методы также используются в методике ТИМ совместно для построения единой счетной сетки в различных областях.

## Список литературы

1. Соколов С. С., Панов А. И., Воронинов А. А. и др. Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 37–52.
2. Воронинов А. А., Панов А. И., Соколов С. С. и др. Разработка универсального формата хранения нерегулярной сетки для методики ТИМ // "Молодежь в науке". Сб. докл. IV науч.-тех. конф. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. С. 31–36.
3. Воронинов А. А., Соколов С. С., Панов А. И. Методика построения многогранной листовой сетки на основе многоугольной нерегулярной сетки // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 4. С. 46–52.

4. Воронинов А. А. Развитие методики построения нерегулярной многогранной сетки на основе полистового заполнения // "Молодежь в науке". Сб. докл. IV науч.-тех. конф. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. С. 37–42.
5. Voronoi G. Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques. Deuxieme Memorie: Recherches sur les paralleloedres primitifs // J. reine und angew. Math. 1908. № 134. P. 198–287.
6. Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1952.
7. Handbook of Grid Generation / Ed. by J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999.
8. Knupp P. A method for hexahedral mesh shape optimization // Int. J. Meth. Eng. 2003. Vol. 58. P. 319–332.
9. Гасилова И. А. Алгоритм построения оптимальных трехмерных сеток в областях типа "трубопровод" // Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления: тр. Всерос. конф., Москва, 4–7 июля 2006 г. М.: Фолиум, 2006. С. 108–114.
10. Азаренок Б. Н. К вопросу о построении трехмерных гексаэдральных сеток // Там же. С. 100–107.
11. Сидоров А. Ф., Шабашова Т. И. Об одном методе расчета оптимальных разностных сеток для многомерных областей // Числ. мет. мех. спл. среды. 1981. Т. 12, № 5. С. 106–123.
12. Ушакова О. В., Бронина Т. Н. Расчеты трехмерных структурированных сеток в конфигурациях с особенностями // Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления: тр. Всерос. конф. Москва, 4–7 июля 2006 г. М.: Фолиум, 2006. С. 190–199.
13. Артемова Н. А., Хайрулина О. Б. Построение трехмерных блочно-структурированных сеток, основанных на вращении двумерных многосвязных сечений // Там же. С. 94–99.
14. Потехина Е. В. Модуль построения регулярных сеток в программе трехмерного расчета начальных данных // Сб. докл. Второй науч.-тех. конф. "Молодежь в науке". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003. С. 43–49.

15. *Мотлохов В. Н., Рассказова В. В., Шапоренко А. Н.* Лагранжева методика ДМК для решения прикладных задач газовой динамики на нерегулярных сетках // Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения. Саратов: ВНИИЭФ, 2000. С. 57–63.
  16. *Волгин А. В., Тарасов В. И., Красов А. В., Кузнецов М. Ю.* Единый файловый разрез (ЕФР) для универсального представления расчетных данных // Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления. Т. 2. М.: ВЦ им. А. А. Дородницына РАН, 2004. С. 220–225.
  17. *Гордеев Э. Н.* Диаграмма Вороного: обзор // Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение. Вып. 4. М.: Наука, 1992. С. 41–67.
  18. *Ohya T., Iri M., Murota K.* Improvements of the incremental methods for the Voronoi diagram with computational comparison of various algorithms // J. Oper. Res. Soc. Jap. 1984. Vol. 27. P. 306–336.
  19. *Михайлова Н. В., Тишкин В. Ф., Тюрин Н. Н. и др.* Численное моделирование двумерных газодинамических течений на лагранжевой сетке переменной структуры: Препринт № 156. М.: ИПМ АН СССР, 1984.
  20. *Рассказова В. В., Мотлохов В. Н., Еременко А. Ю., Софронов И. Д.* Методика решения задач трехмерной нестационарной газовой динамики на нерегулярных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1998. Вып. 4. С. 44–57.
-