УДК 519.6

## МЕТОД РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ КОНТАКТНЫХ ГРАНИЦ В МЕТОДИКЕ Д

Е. Е. Чупраков, Ю. Д. Чернышёв, Д. М. Линник (РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Представлен параллельный метод расчета контактных границ для решения трехмерных нестационарных задач механики сплошной среды в переменных Лагранжа на регулярной сетке в рамках методики Д. Метод предназначен для расчета контактных взаимодействий между математическими областями с несовпадающими счетными сетками. Он позволяет рассчитывать сильные тангенциальные разрывы, соударения тел, отрывы тонких оболочек под действием волн разрежения. Поддерживается счет задач как в газодинамическом, так и упругопластическом приближении.

Приведены основные положения рассматриваемого метода, описана общая организация распараллеливания. Представлен ряд модельных задач.

#### Введение

Методика Д, основа которой положена в работах [1, 2], предназначена для решения трехмерных нестационарных задач механики сплошной среды в переменных Лагранжа на регулярной сетке. Одним из важнейших направлений в механике сплошной среды является разработка методов решения задач с подвижными контактными границами (КГ). Примером тому служит большое количество различных конечно-разностных, конечно-объемных и конечно-элементных контактных алгоритмов, подробный обзор которых представлен в [3]. С увеличением современных вычислительных мощностей особое внимание стало уделяться также вопросам распараллеливания таких алгорит-MOB.

В данной работе представлен метод, применяемый в методике Д для расчета контактных взаимодействий между математическими областями с несовпадающими на КГ счетными сетками. Описываемый метод основан на использовании стандартного конечно-разностного шаблона методики Д в случае совпадающих сеток и введении фиктивных узлов при рассогласовании сеток в зоне контакта. При этом используется вспомогательная сетка, состоящая из граничных узлов одной математической области и фиктивных предграничных узлов другой математической области. Значения величин в фиктической области. Значения величин в

тивных узлах и центрах ячеек вспомогательной сетки определяются интерполяцией.

### Основные уравнения

Рассмотрим систему уравнений, описывающую движение изотропной упругопластической среды:

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} S;$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{U};$$

$$\frac{dE}{dt} = -p \frac{d(1/\rho)}{dt} + \frac{1}{\rho} Sp(S\dot{\varepsilon});$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{U},$$
(1)

где  $\vec{r}(x,y,z)$  — радиус-вектор точки;  $\vec{U}=(U,V,W)$  — вектор скорости;  $\rho$  — плотность; S — девиатор тензора напряжений,  $S_{ij}=\sigma_{ij}$  +

$$+\,p\delta_{ij},\,\sigma=\left(egin{array}{ccc}\sigma_{xx}&T_{xy}&T_{xz}\ T_{xy}&\sigma_{yy}&T_{yz}\ T_{xz}&T_{yz}&\sigma_{zz}\end{array}
ight)$$
 — тензор напря-

жений;  $p=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\sigma_{kk}$  — давление;  $\dot{\varepsilon}$  — тензор скоростей деформаций;  $Sp(S\dot{\varepsilon})$  — первый инвариант тензора  $S\dot{\varepsilon}$ ; E — внутренняя энергия; t — время.

Система (1) замыкается уравнениями среды. Для описания гидростатической составляющей тензора напряжений (давления) применяется уравнение состояния вида

$$p = p(\rho, E)$$
.

Для выражения зависимости девиатора тензора напряжений от тензора деформаций в методике Д используется модифицированная модель Уилкинса [4], описанная в работе [5]. В модели Уилкинса в упругой области девиатор тензора напряжений определяется законом Гука:

$$\frac{\delta S}{\delta t} = 2\mu \left( \dot{\varepsilon} - \frac{1}{3} Sp\left(\dot{\varepsilon}\right) \right),\,$$

где  $\mu$  — модуль сдвига;  $Sp\left(\dot{\varepsilon}\right)$  — первый инвариант тензора скоростей деформаций;  $\frac{\delta}{\delta t}$  — производная по времени, вычисленная по Яуману [6]. В пластической области используется условие текучести Мизеса:

$$Sp\left(S^2\right) = \frac{2}{3}Y_0^2,$$

где  $Y_0$  — предел текучести. В отрицательной области давление ограничено величиной

$$p_{\min} = -\frac{1}{3}Y_0.$$

В [5] получена аппроксимация уравнения движения системы (1) для узла 0 (рис. 1). Движение узла сетки описывается уравнением вида

$$m_0 \frac{d\vec{U}_0}{dt} = -\vec{P}_0 + \vec{L}_0, \tag{2}$$

где  $m_0=rac{1}{8}\sum_{i=1}^8 M_i$  — масса узла  $0,\ M_i$  — масса i-й ячейки, прилегающей к этому узлу;  $\vec{P}_0=$ 

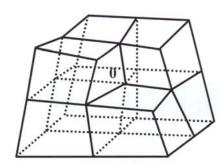


Рис. 1. Фрагмент расчетной сетки

 $=(P_x,P_y,P_z),\ \vec{L}_0=(L_x,L_y,L_z)$  — векторы разностного градиента давления и компонент девиатора напряжений. Выражения для компонент векторов  $\vec{P}_0$  и  $\vec{L}_0$  приведены в [5].

### Разностные уравнения движения КГ

В методике Д значения скоростей отнесены к полуцелым временным слоям  $t^{n+1/2}$ , значения остальных величин — к целым слоям по времени  $t^n$ . Уравнение (2) будет иметь следующий разностный вид:

$$m_0 \frac{\vec{U}_0^{n+1/2} - \vec{U}_0^{n-1/2}}{\tau^n} = -\vec{P}_0^n + \vec{L}_0^n,$$

$$t^{n+1} = t^n + \tau^{n+1/2}, \quad \tau^n = \frac{\tau^{n+1/2} + \tau^{n-1/2}}{2}. \quad (3)$$

Координаты узла 0 (см. рис. 1) на следующем временном слое определяются по формуле

$$\vec{r}_0^{n+1} = \vec{r}_0^n + \vec{U}_0^{n+1/2} \tau^{n+1/2}. \tag{4}$$

Для узлов KГ реализуется условие идеального скольжения:

$$\vec{U}_0^{n+1/2} = \left(\vec{U}_0^{n+1/2}\right)_N + \left(\vec{U}_0^{n+1/2}\right)_K,$$

при этом касательная и нормальная составляющие скорости рассчитываются отдельно.

Нормальная составляющая скорости рассчитывается по полному контуру с учетом всех 8 ячеек, окружающих узел 0. Из (3) имеем

$$\left( \vec{U}_0^{n+1/2} \right)_N = \vec{U}_0^{n-1/2} + \frac{\tau^n}{m_0} \frac{ \left( \left( -\vec{P}_0^n + \vec{L}_0^n \right) \cdot \vec{N} \right) \vec{N}}{ \left| \vec{N} \right|^2},$$

где  $\vec{N}$  — нормаль в узле 0.

Для вычисления касательной составляющей скорости выбирается усеченный контур интегрирования, в котором игнорируются ячейки, расположенные по другую сторону рассчитываемой границы. Обозначив штрихом величины по усеченному контуру, получим следующие формулы:

$$\begin{split} \left(\vec{U}_0^{n+1/2}\right)_K &= \left(\vec{U}_0^{n+1/2}\right)' - \left(\vec{U}_0^{n+1/2}\right)'_N, \\ \left(\vec{U}_0^{n+1/2}\right)' &= \vec{U}_0^{n-1/2} + \frac{\tau^n}{m_0'} \left(-\vec{P}_0^n + \vec{L}_0^n\right)'. \end{split}$$

При счете двух контактирующих границ одна из них (обычно граница более тяжелого вещества) считается основной границей (ОГ), а другая — соприкасающейся (СГ). Для вошедших в контакт узлов СГ на слое  $t^{n+1}$  ищутся их проек-

ции на ячейки  $O\Gamma$ , после этого скорость узлов  $C\Gamma$  определяется исходя из (4) как

$$\vec{U}_{\text{C}\Gamma}^{n+1/2} = \frac{\left(\vec{r}_{\text{C}\Gamma}^{n+1}\right)^* - \vec{r}_{\text{C}\Gamma}^n}{\tau^{n+1/2}},\tag{5}$$

где  $\left(\vec{r}_{\text{С}\Gamma}^{\,n+1}\right)^*$  — координаты спроецированного на ОГ узла СГ. Тем самым обеспечивается условие непроникания узлов СГ в ячейки ОГ.

Все узлы  $K\Gamma$ , не вошедшие в контакт, рассчитываются как точки свободной границы.

## Критерии контакта и отрыва

Пусть Q — узел СГ, вступающий в контакт с ячейкой  $\alpha$ , принадлежащей ОГ (рис. 2);  $\vec{N}_Q$  — единичный вектор, в направлении которого проходит проекция узла Q в ячейку  $\alpha$ ; P — проекция узла Q.

Соударение узла Q с ячейкой  $\alpha$  определяется следующим образом. Вычисляется новое экстраполированное положение узла Q по формуле

$$ec{r}_{Q}^{\,n+} = ec{r}_{Q}^{\,n} + \left(ec{N}_{Q} \cdot \left(ec{U}_{P} - ec{U}_{Q}
ight)^{n}
ight)ec{N}_{Q} au^{n+1/2},$$

где  $\vec{r}_Q^{\,n+}, \vec{r}_Q^{\,n}$  — радиусы-векторы нового и старого положений узла  $Q; \vec{U}_P, \vec{U}_Q$  — скорости в точках P и Q (для точки P скорость определяется интерполяцией по узлам ячейки  $\alpha$ ). Если выполняется условие

$$\left(\vec{r}_P - \vec{r}_Q^{n+}\right) \cdot \vec{N}_Q < \varepsilon_h,$$

то фиксируется контакт.

При контакте для узлов ячейки  $\alpha$  пересчитываются скорости по закону сохранения импульса. После контакта скорости узлов СГ рассчитываются по формуле (5).

Контакт узла СГ с ОГ может прерваться либо при выходе узла за пределы ОГ, либо по крите-  $puo \ ompusa$ , который заключается в выполнении следующих условий:

1) 
$$P_0 + P_{\varepsilon} < 0$$
,

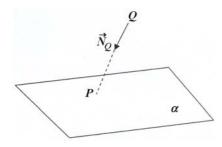


Рис. 2. Контакт узла с ячейкой

где 
$$P_0 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} P_i$$
 — среднее давление ячеек, прилегающих к узлу 0 (см. рис. 1);  $P_{\varepsilon} > 0$  — прижимающее давление;

2) скорость разлета узла СГ и ячейки ОГ не меньше  $U_{\varepsilon}$ .

Условие 1 выражает появление в точке отрыва пороговых отрицательных давлений, что эквивалентно появлению нормальных растягивающих напряжений под действием волн разрежения. Установление в условии 2 пороговой скорости разлета делает критерий более устойчивым, позволяя избежать осцилляций.

# Оптимизация алгоритма при распараллеливании

При распараллеливании методики Д применяется матричная декомпозиция задачи по процессорам. На рис. 3,а приведена схема декомпозиции для двухобластной задачи на пять процессоров (с номерами 0—4).

При декомпозиции задачи исходя из начальной геометрии для каждого процессора создается список контактирующих с ним процессоров. Если процессор рассчитывает участок КГ, то необходимая для этого информация передается на него со всех процессоров, контактирующих с ним "по данной границе". Например, для процессоров 1 будет передана информация с процессоров 3 и 4 (см. рис. 3,а). Эта информация включает в себя значения координат и скоростей в узлах граничной и предграничной строк, а также плотностей, давлений и компонент девиатора тензора напряжений в граничных ячейках.

Как правило, информация, передаваемая на процессор для обсчета КГ, бывает избыточной. На рис. 3,6 показан пример избыточной передачи данных с процессоров 3, 4 на процессор 1 (заштрихованные участки). Такая информация в зависимости от своего объема может приводить к существенному удорожанию счета. Поэтому алгоритм оптимизирован таким образом, чтобы определять границы избыточных данных и отбрасывать их перед счетом. После этого переданная с различных процессоров информация унифицируется в единую структуру данных и становится пригодной для расчета.

При расчете задач с сильными тангенциальными течениями изначальный список соседей для каждого процессора, построенный при декомпозиции задачи, может изменяться (рис. 4). Ал-

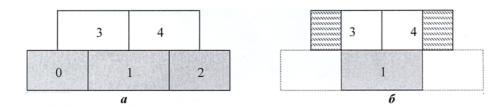


Рис. 3. Декомпозиция задачи по процессорам: a — схема декомпозиции; b — передача данных

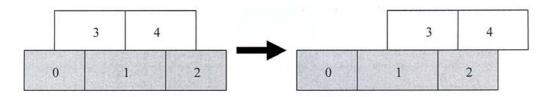


Рис. 4. Смена соседства

горитм расчета  $K\Gamma$  отслеживает эти изменения во время счета задачи и для каждого процессора передает информацию об изменениях в списке соседей.

## Примеры расчетов

Распад разрыва. Рассмотрим задачу о распаде разрыва, имеющего место в начальный момент времени на границе двух слоев однородных покоящихся газов с различными уравнениями состояния, и последующем разлете в вакуум одного из слоев.

Постановка задачи взята из [7]. В области 1 (-8 < x < 0) находится газ с уравнением состояния  $P = (\gamma - 1)\rho E$  и скоростью звука  $\sqrt{\gamma (\gamma - 1) E}$ , где  $\rho = 2.5$ ; E = 6;  $\gamma = 3$ . В области 2 (0 < x < 3) содержится газ с параметрами  $\rho = 12$ ; E = 0 и уравнением состояния в форме Ми—Грюнайзена:

$$P = P_x(\rho) + \Gamma(E - E_x)\rho,$$

$$P_x = \frac{\rho c^2}{n} \left( \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right), \quad E_x = \int_{\rho_0}^{\rho} P_x(\rho) \frac{d\rho}{\rho^2},$$

где c=2; n=3;  $\Gamma=0.5$ .

На границах x=-8 и x=3 задается нулевое граничное давление.

При такой постановке задача имеет аналитическое решение. Соотношения для распределения скорости, плотности и давления по координате x приведены в [7].

Расчет проводился в двухобластной постановке. Область 1 представляет собой параллелепипед с размерами  $8 \times 1 \times 1$ , область 2 — параллелепипед с размерами  $3 \times 1 \times 1$ . В области 1 по осям Oy и Oz сетка равномерно разбивалась на 4 счетных интервала, по оси Ox участок — -8 < x < 0 разбивался равномерно на 80 интервалов. В области 2 разбиение по осям Oy и Oz составляло 8 интервалов, по оси Ox — 60 интервалов (участок 0 < x < 3). Геометрия задачи показана на рис. 5.

На рис. 6-8 представлены профили скорости, плотности и давления в зависимости от координаты x на момент времени t=0,5, а также точные решения. Заметно хорошее совпадение полученного решения с точным и отсутствие аномалий вблизи  $K\Gamma$ .



Рис. 5. Задача о распаде разрыва

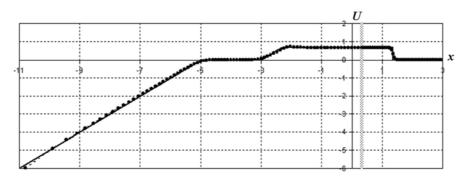


Рис. 6. Профиль скорости: — — точное решение; - -•- - — численное решение; серым цветом обозначено положение  $K\Gamma$ 

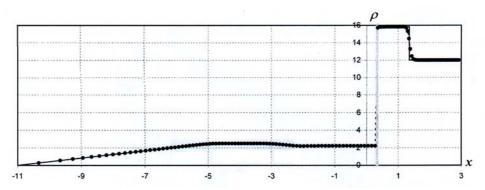


Рис. 7. Профиль плотности: — — точное решение; - -•- - — численное решение; серым цветом обозначено положение КГ

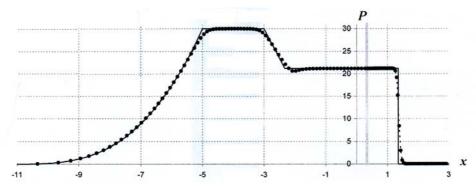


Рис. 8. Профиль давления: — — точное решение; - -•- - — численное решение; серым цветом обозначено положение КГ

Отлет легкой пластины. Известно, что при падении нестационарной затухающей ударной волны на границу раздела двух разноплотных веществ могут проявиться растягивающие напряжения, приводящие к отколу. Промоделируем отлет легкой алюминиевой пластины от железного бруска. Рассмотрим задачу в нескольких постановках.

Детонация по плоскости. Постановка задачи представлена на рис. 9. Боковые границы алюминиевой пластины и железного бруска считаются жесткими стенками.

Во взрывчатом веществе (ВВ) формируется нестационарная затухающая плоская ударная

волна, которая проходит через  $K\Gamma$  между железом и тонкой алюминиевой пластиной. В результате образуются волны разрежения, приводящие к отлету пластины (рис. 10).

Видно, что при отлете пластины сохранилась плоская симметрия.

Детонация с помощью шашки. Рассмотрим аналог двумерной задачи, в которой детонационная волна задается подрывом шашки (рис. 11). В остальном ее постановка аналогична предыдущей (для плоского отлета пластины). На рис. 12, 13 представлен результат расчета.

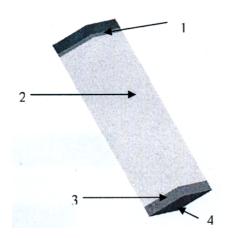


Рис. 9. Постановка задачи с детонацией по плоскости: 1 — детонирующая область; 2 — BB; 3 — железный брусок; 4 — алюминиевая пластина

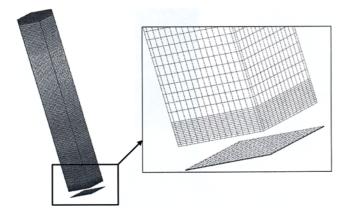


Рис. 10. Отлет пластины в случае детонации по плоскости



Рис. 11. Задача с шашкой

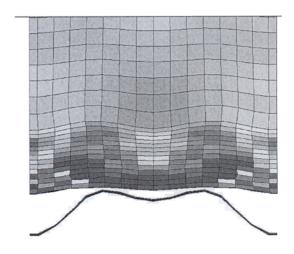


Рис. 12. Поле давлений в случае детонации с помощью шашки

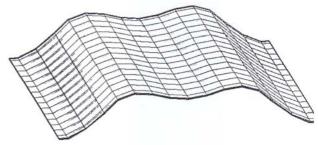


Рис. 13. Форма отлетевшей пластины в случае детонации с помощью шашки

#### Заключение

Разработанный метод расчета КГ позволил существенно расширить класс задач в трехмерной постановке, рассчитываемых по методике Д. Он обеспечил возможность разбиения счетного пространства на математические области с выбором собственной сетки в каждой из областей и расчет контактных взаимодействий между математическими областями. Распараллеливание разработанного метода позволило перевести расчет задачи с выделенными лагранжевыми КГ в разряд высокопроизводительных вычислений.

## Список литературы

1. Артемьев А. Ю., Делов В. И., Дмитриева Л. В. Методика расчета трехмерных нестационарных задач газодинамики в переменных Лагранжа // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 1. С. 30—39.

- 2. Дмитриев Н. А., Дмитриева Л. В., Малиновская Е. В., Софронов И. Д. Методика расчета двумерных нестационарных задач газодинамики в переменных Лагранжа: Препринт № 59. М.: ИПМ АН СССР, 1976.
- 3. *Бураго Н. Г., Кукудэканов В. Н.* Обзор контактных алгоритмов // Механика твердого тела. 2005. № 1. С. 45—87.
- 4. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212—263.
- 5. Вершинин В. Б., Делов В. И., Софронов В. Н. Разработка и реализация в комплексе Д численного метода расчета трехмерных нестационарных упругопластиче-

- ских течений // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 3. С. 9—24.
- Седов Л. И. Понятие разных скоростей изменения тензоров // ПММ. 1960. № 26. Вып. 3. С. 393—398.
- 7. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И. и др. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 1. Требования к тестам. Тесты 1—7 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 2. С. 3—9.