

УДК 519.6

## ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ МОНОТОНИЗАЦИИ $DS_n^\gamma$ -СХЕМЫ ПРИ РЕШЕНИИ ОДНОГРУППОВОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ДЛЯ СФЕРЫ

Е. В. Грошев  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассматривается алгоритм монотонизации  $DS_n^\gamma$ -схемы, который в случае необходимости подправляет значения разностной функции на основе анализа поведения решения, рассчитанного по схеме первого порядка в счетной, а также соседних по пространству и углу ячейках.

Проведенные расчеты показали, что действие алгоритма приводит к заметному усилению монотонности решения как по пространственной, так и по угловой переменной.

### Введение

Среди разностных схем, применяемых для решения сферически-симметричного уравнения переноса, заметное место занимают  $S_n$ -схемы (например  $S_n$ -метод Карлсона [1], *непрерывный*  $S_n$ -метод [2]),  $DS_n$ -схемы (*дискретный*  $DS_n$ -метод [3],  $DS_n^\gamma$ -схема [4, 5]). Эти схемы алгоритмически просты и экономичны, а такие, как  $S_n$ -метод [2] и  $DS_n^\gamma$ -схема [4, 5], обладают высокой точностью. Однако все эти схемы немонотонны. В дальнейшем под монотонностью будем понимать способность передачи разностной схемой качественных свойств точного решения (неотрицательности решения и т. д.).

По-видимому, наиболее естественный путь монотонизации решения — это переход по тем или иным соображениям при расчете ячейки со схемы второго порядка точности на схему более монотонную, обычно имеющую точность между вторым и первым порядком.

В работе В. Я. Гольдина, Н. Н. Калиткина, Т. В. Шишовой [6] такой переход осуществляется в каждой ячейке при помощи *сглаживающей* функции. В. А. Елесиным в работах [7, 8] предложено использовать в стационарных задачах переноса излучения схему первого порядка точности на границах физических сред. В. Е. Трощев является автором широко используемого на практике метода *балансного зануления* отрицательных значений разностного решения [8]. В работе [9] Л. Ф. Варганова и А. Д. Гаджиев предложили схему с дополнительными соотношениями, которые регулируют ее точность и монотонность. В. А. Тарасовым численно исследован алгоритм монотонизации на основе принципа максимума для уравнения переноса в ячейке. Монотонизацией схем второго порядка занимались и другие авторы.

Тем не менее задача полностью не решена. По мнению автора, чтобы продвинуться в этом направлении, следует строить алгоритм монотонизации на основе как анализа возникающих при счете ситуаций, так и прогноза вариантов продолжения счета.

Ранее В. Ф. Юдинцевым был предложен алгоритм монотонизации  $DS_n^\gamma$ -схемы по пространственной переменной на основе анализа поведения разностного решения в счетной и соседней с ней ячейках [10]. В данной статье предлагается и подтверждается численными исследованиями отличный от вышеупомянутого алгоритм монотонизации  $DS_n^\gamma$ -схемы на основе анализа поведения разностного решения в счетной и соседних с ней ячейках по пространственной и угловой переменным. В первых разделах статьи формулируется алгоритм монотонизации, в последнем разделе представлены численные расчеты модельных задач.

### Алгоритм монотонизации $DS_n^\gamma$ -схемы

Рассмотрим стационарное сферически-симметричное одногрупповое уравнение переноса:

$$\frac{\partial r^2 \mu N}{r^2 \partial r} + \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{(1 - \mu^2) N}{r} + \alpha N = \frac{\beta}{2} n^{(0)} + \frac{Q}{2}, \quad (1)$$

где  $r$  — радиус;  $\mu$  — косинус угла между радиусом и направлением полета частиц;  $N(r, \mu)$  — функция распределения частиц;  $n^{(0)}(r) = \int_{-1}^1 N(r, \mu) d\mu$  — плотность частиц;  $n^{(1)}(r) = \int_{-1}^1 \mu N(r, \mu) d\mu$  — поток частиц;  $\alpha(r)$ ,  $\beta(r)$  — коэффициенты Пайерлса;  $Q(r)$  — источник частиц. Уравнение решается в области  $D \{0 \leq r_0 \leq r \leq R_0, -1 \leq \mu \leq 1\}$ .

На линии  $\mu = -1$  уравнение (1) принимает вид

$$-\frac{\partial N}{\partial r} + \alpha N = \frac{\beta}{2} n^{(0)} + \frac{Q}{2}.$$

Для решения уравнения (1) будем применять  $DS_n^\gamma$ -схему [4, 5] с алгоритмом монотонизации, который излагается ниже.

При решении уравнения (1) методом простой итерации в левой половине области  $D$  (т. е. при  $\mu \leq 0$ ) сначала находятся значения  $N$  на линии  $\mu = -1$ , затем значения  $N$  для  $r_0 \leq r \leq R_0$ ,  $-1 \leq \mu \leq 0$ . В связи с этим рассмотрим изображенную на рис. 1 конфигурацию ячеек в левой половине области  $D$  вокруг исходной ячейки  $D_{p+1/2, q-1/2}$ , которая обведена жирными линиями.

Рассчитаем ячейку  $D_{p+1/2, q-1/2}$  (индексы ячейки определяются индексами ее центрального значения  $N$ ) по  $DS_n^\gamma$ -схеме со вторым и первым порядками точности по  $r$  и  $\mu$ , т. е. со стандартными значениями  $\gamma_r^c$ ,  $\gamma_\mu^c$  (см. [4]) и  $\gamma_r = 0$ ,  $\gamma_\mu = 1$ . Необходимые для этого значения  $N_{p+1/2, q-1}$  и  $N_{p+1, q-1/2}$  известны с текущей простой итерации. Сделаем также соответствующие расчеты ячеек, соседних с искомой по  $r$  ( $D_{p-1/2, q-1/2}$ ) и  $\mu$  ( $D_{p+1/2, q+1/2}$ ). Необходимые для этого значения  $N_{p-1/2, q-1}$  и  $N_{p+1, q+1/2}$  известны с предыдущей простой итерации.

Итак, имеются расчеты упомянутой конфигурации ячеек по схемам первого и второго порядков точности.

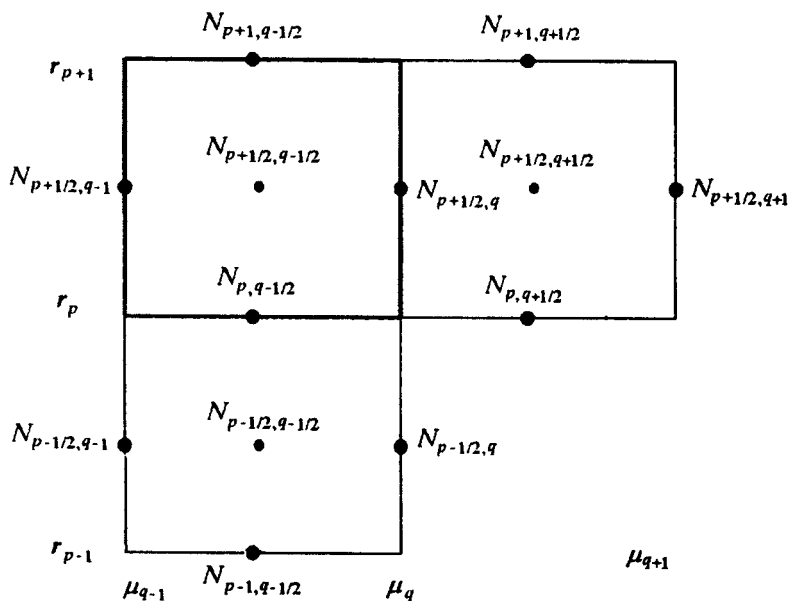


Рис. 1. Конфигурация ячеек при  $\mu \leq 0$ . Исходная ячейка  $D_{p+1/2, q-1/2}$

Монотонизация будет состоять в следующем: если по каким-либо причинам решение второго порядка точности не подходит, то новое решение будем строить в соответствии с поведением величин, значения которых получены с использованием схемы первого порядка точности.

Разумеется, для подобной процедуры можно было бы привлечь большее количество соседних по  $r$  и  $\mu$  ячеек; в результате схема стала бы более монотонной, однако при этом была бы большая потеря в точности. Поэтому целесообразнее ограничиться ячейками, изображенными на рис. 1, т. е. исходной и соседними с ней по  $r$  и  $\mu$ .

Итак, монотонизировать полученные в исходной ячейке значения  $N_{p+1/2,q-1/2}$ ,  $N_{p+1/2,q}$ ,  $N_{p,q-1/2}$  будем на основании анализа поведения величины  $N$  в зависимости от  $\mu$ , т. е.  $N_{p+1/2,q-1}$ ,  $N_{p+1/2,q-1/2}$ ,  $N_{p+1/2,q}$ ,  $N_{p+1/2,q+1/2}$ ,  $N_{p+1/2,q+1}$ , а также в зависимости от  $r$ , т. е.  $N_{p+1,q-1/2}$ ,  $N_{p+1/2,q-1/2}$ ,  $N_{p,q-1/2}$ ,  $N_{p-1/2,q-1/2}$ ,  $N_{p-1,q-1/2}$ .

На линии  $\mu = -1$  будем анализировать значения  $N_{p+1,1}$ ,  $N_{p+1/2,1}$ ,  $N_{p,1}$ ,  $N_{p-1/2,1}$ ,  $N_{p-1,1}$  (рис. 2).

В ячейках, прилегающих к линии  $\mu = 0$  по переменной  $\mu$ , будем анализировать только значения  $N_{p+1/2,\hat{q}/2}$ ,  $N_{p+1/2,\hat{q}/2+1/2}$ ,  $N_{p+1/2,\hat{q}/2+1}$  (см. рис. 2), где  $\hat{q}$  — число интервалов по углу.

В ячейках, прилегающих к линии  $r = r_0$  по переменной  $r$ , будем анализировать только значения  $N_{2,q-1/2}$ ,  $N_{3,2,q-1/2}$ ,  $N_{1,q-1/2}$  (см. рис. 2).

Соответствующая конфигурация ячеек при счете в правой половине области  $D$  (т. е.  $\mu \geq 0$ ) изображена на рис. 3, счетная ячейка  $D_{p-1/2,q-1/2}$  обведена жирными линиями.

Монотонизировать полученные в исходной ячейке значения  $N_{p-1/2,q-1/2}$ ,  $N_{p-1/2,q}$ ,  $N_{p,q-1/2}$  будем на основании анализа поведения величины  $N$  в зависимости от  $\mu$ , т. е.  $N_{p-1/2,q-1}$ ,  $N_{p-1/2,q-1/2}$ ,  $N_{p-1/2,q}$ ,  $N_{p-1/2,q+1/2}$ ,  $N_{p-1/2,q+1}$ , а также в зависимости от  $r$ , т. е.  $N_{p+1,q-1/2}$ ,  $N_{p+1/2,q-1/2}$ ,  $N_{p,q-1/2}$ ,  $N_{p-1/2,q-1/2}$ ,  $N_{p-1,q-1/2}$ .

В ячейках, прилегающих к линии  $\mu = 1$  по переменной  $\mu$ , будем анализировать только значения  $N_{p+1/2,\hat{q}}$ ,  $N_{p+1/2,\hat{q}+1/2}$ ,  $N_{p+1/2,\hat{q}+1}$  (см. рис. 2).

В ячейках, прилегающих к линии  $r = R_0$  по переменной  $r$ , будем анализировать только значения  $N_{\hat{p},q-1/2}$ ,  $N_{\hat{p}+1/2,q-1/2}$ ,  $N_{\hat{p}+1,q-1/2}$  (см. рис. 2), где  $\hat{p}$  — число интервалов сетки по  $r$ .

В дальнейшем основные положения и формулы алгоритма приведем для ячеек, находящихся в левой половине области.

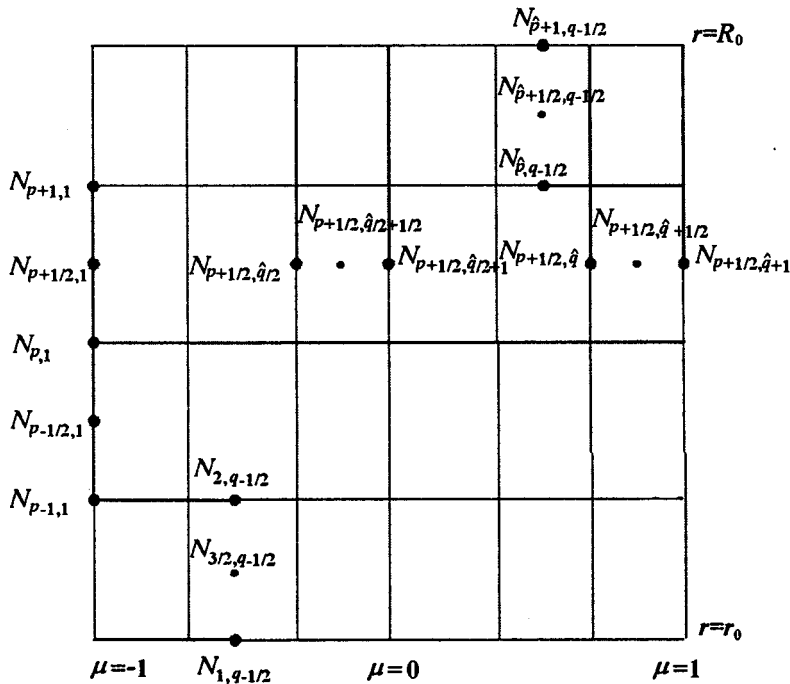


Рис. 2. Область  $D$

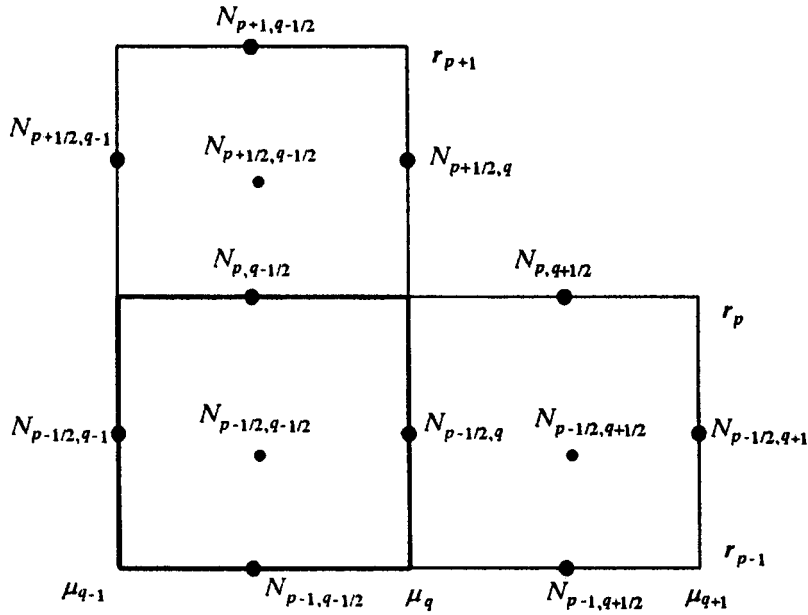


Рис. 3. Конфигурация ячеек при  $\mu \geq 0$ . Исходная ячейка  $D_{p-1/2, q-1/2}$

### Немонотонность внутри ячейки

Рассмотрим в левой половине области  $D$  ячейку  $D_{p+1/2, q-1/2}$  (рис. 4).

Центральное значение функции распределения частиц, полученное по  $DS_n^\gamma$ -схеме с произвольными  $\gamma_r, \gamma_\mu$  из интервалов  $0 \leq \gamma_r \leq \gamma_r^C, \gamma_\mu^C \leq \gamma_\mu \leq 1$ , вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
 N_{p+1/2, q-1/2} = & \frac{\frac{1}{2} Q_{p+1/2} \Delta V_{p+1/2} \Delta \mu_{q-1/2} - N_{p+1, q-1/2} \left( r_{p+1}^2 + r_p^2 \frac{\gamma_r}{1 - \gamma_r} \right) \bar{\mu}_{q-1/2} \Delta \mu_{q-1/2}}{-r_p^2 \bar{\mu}_{q-1/2} \Delta \mu_{q-1/2} \frac{1}{1 - \gamma_r} + (1 - \mu_q^2) \bar{r}_{p+1/2} \Delta r_{p+1/2} \frac{1}{\gamma_\mu} + \alpha_{p+1/2} \Delta V_{p+1/2} \Delta \mu_{q-1/2}} + \\
 & + \frac{N_{p+1/2, q-1} \left[ (1 - \mu_q^2) \frac{1 - \gamma_\mu}{\gamma_\mu} + (1 - \mu_{q-1}^2) \right] \bar{r}_{p+1/2} \Delta r_{p+1/2}}{-r_p^2 \bar{\mu}_{q-1/2} \Delta \mu_{q-1/2} \frac{1}{1 - \gamma_r} + (1 - \mu_q^2) \bar{r}_{p+1/2} \Delta r_{p+1/2} \frac{1}{\gamma_\mu} + \alpha_{p+1/2} \Delta V_{p+1/2} \Delta \mu_{q-1/2}}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

О сеточных параметрах  $r_p^2, r_{p+1}^2, \bar{r}_{p+1/2}, \mu_q^2, \mu_{q+1}^2, \bar{\mu}_{q-1/2}, \Delta V_{p+1/2}, \Delta r_{p+1/2}, \Delta \mu_{q-1/2}$  подробно сказано в [5].

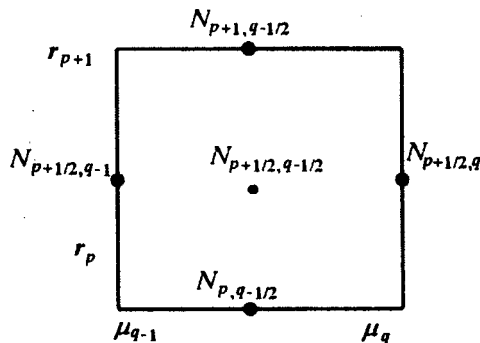


Рис. 4. Ячейка  $D_{p+1/2, q-1/2}$

Обозначим знаменатель дробей в (2) через  $Z$ . Нетрудно видеть, что  $Z > 0$ .

Значения  $N$ , полученные с использованием схемы второго порядка ( $\gamma_r = \gamma_r^C$ ;  $\gamma_\mu = \gamma_\mu^C$ ), будем обозначать как  $N^2$ , полученные по схеме первого порядка ( $\gamma_r = 0$ ;  $\gamma_\mu = 1$ ), — как  $N^1$ .

Отметим, что для профилей величин по  $\mu$  с индексом 1 сверху справедливо либо  $N_{p+1/2,q-1}^1 \geq N_{p+1/2,q-1/2}^1 = N_{p+1/2,q}^1$ , либо  $N_{p+1/2,q-1}^1 \leq N_{p+1/2,q-1/2}^1 = N_{p+1/2,q}^1$ ; для профилей величин по  $\mu$  с индексом 2 — либо  $N_{p+1/2,q-1}^2 \geq N_{p+1/2,q-1/2}^2 \geq N_{p+1/2,q}^2$ , либо  $N_{p+1/2,q-1}^2 \leq N_{p+1/2,q-1/2}^2 \leq N_{p+1/2,q}^2$ .

Для профилей величин по  $r$  с индексом 1 сверху справедливо либо  $N_{p+1,q-1/2}^1 \geq N_{p+1/2,q-1/2}^1 = N_{p,q-1/2}^1$ , либо  $N_{p+1,q-1/2}^1 \leq N_{p+1/2,q-1/2}^1 = N_{p,q-1/2}^1$ ; для профилей величин по  $r$  с индексом 2 — либо  $N_{p+1,q-1/2}^2 \geq N_{p+1/2,q-1/2}^2 \geq N_{p,q-1/2}^2$ , либо  $N_{p+1,q-1/2}^2 \leq N_{p+1/2,q-1/2}^2 \leq N_{p,q-1/2}^2$ .

Немонотонностью внутри ячейки  $D_{p+1/2,q-1/2}$  будем считать ситуацию, при которой хотя бы по одной из переменных  $r$ ,  $\mu$  профили, полученные по схемам первого и второго порядков, разные, т. е. один, к примеру, возрастает, другой убывает либо наоборот. Точнее, немонотонность имеет место, если одна из пар чисел: либо  $(N_{p+1/2,q-1/2}^1 - N_{p+1/2,q-1}^1)$ ,  $(N_{p+1/2,q-1/2}^2 - N_{p+1/2,q-1}^2)$ , либо  $(N_{p+1/2,q-1/2}^1 - N_{p+1,q-1/2}^1)$ ,  $(N_{p+1/2,q-1/2}^2 - N_{p+1,q-1/2}^2)$  — имеет разные знаки.

Для того чтобы разобраться в причинах этой немонотонности и устранить ее, запишем разности  $N_{p+1/2,q-1/2} - N_{p+1/2,q-1}$  и  $N_{p+1/2,q-1/2} - N_{p+1,q-1/2}$  для произвольных значений  $\gamma_r$ ,  $\gamma_\mu$ :

$$N_{p+1/2,q-1/2} - N_{p+1,q-1/2} = \frac{\frac{1}{2}Q_{p+1/2}\Delta V_{p+1/2}\Delta\mu_{q-1/2} - N_{p+1,q-1/2}\left(r_{p+1}^2 + r_p^2\frac{\gamma_r}{1-\gamma_r}\right)\bar{\mu}_{q-1/2}\Delta\mu_{q-1/2}}{Z} + \frac{(N_{p+1/2,q-1} - N_{p+1/2,q-1/2})\left[(1-\mu_q^2)\bar{r}_{p+1/2}\Delta r_{p+1/2}\right]\frac{1}{\gamma_\mu}}{Z} + \frac{N_{p+1/2,q-1}(\mu_q^2 - \mu_{q-1}^2)\bar{r}_{p+1/2}\Delta r_{p+1/2} - N_{p+1,q-1/2}\alpha_{p+1/2}\Delta V_{p+1/2}\Delta\mu_{q-1/2}}{Z}. \quad (3)$$

Поскольку знаменатель  $Z > 0$ , то знак (3) определяется знаком числителя  $F(\gamma_\mu)$ , который зависит лишь от  $\gamma_\mu$ , и эта зависимость представляется в виде дробно-линейной (т. е. монотонной) функции:

$$F(\gamma_\mu) = \text{const} + (N_{p+1/2,q-1} - N_{p+1/2,q-1/2})(1 - \mu_q^2)\bar{r}_{p+1/2}\Delta r_{p+1/2}\frac{1}{\gamma_\mu}.$$

Аналогично

$$N_{p+1/2,q-1/2} - N_{p+1/2,q-1} = \frac{\frac{1}{2}Q_{p+1/2}\Delta V_{p+1/2}\Delta\mu_{q-1/2} - N_{p+1,q-1/2}(r_{p+1}^2 + r_p^2)\bar{\mu}_{q-1/2}\Delta\mu_{q-1/2}}{Z} + \frac{(N_{p+1/2,q-1} - N_{p+1/2,q-1/2})r_p^2\bar{\mu}_{q-1/2}\Delta\mu_{q-1/2}\frac{1}{1-\gamma_r}}{Z} + \frac{N_{p+1/2,q-1}(\mu_q^2 - \mu_{q-1}^2)\bar{r}_{p+1/2}\Delta r_{p+1/2} - N_{p+1/2,q-1}\alpha_{p+1/2}\Delta V_{p+1/2}\Delta\mu_{q-1/2}}{Z}. \quad (4)$$

В (4), поскольку знаменатель  $Z > 0$ , знак выражения также определяется знаком числителя  $G(\gamma_r)$ , который зависит лишь от  $\gamma_r$ , и эта зависимость имеет вид дробно-линейной (т. е. монотонной) функции:

$$G(\gamma_r) = \text{const} + (N_{p+1/2,q-1} - N_{p+1/2,q-1/2})r_p^2\bar{\mu}_{q-1/2}\Delta\mu_{q-1/2}\frac{1}{1-\gamma_r}.$$

Рассмотрим случай  $N_{p+1/2,q-1/2} - N_{p+1/2,q-1} = 0$ , тогда  $F(\gamma_\mu) = \text{const}$ ,  $G(\gamma_r) = \text{const}$ , т. е. в этой ситуации знаки чисел  $(N_{p+1/2,q-1/2}^1 - N_{p+1,q-1/2}^1)$ ,  $(N_{p+1/2,q-1/2}^2 - N_{p+1,q-1/2}^2)$  совпадают, совпадают также и знаки чисел  $(N_{p+1/2,q-1/2}^1 - N_{p+1/2,q-1}^1)$ ,  $(N_{p+1/2,q-1/2}^2 - N_{p+1/2,q-1}^2)$ . Значит, немонотонности внутри ячейки нет.

Пусть  $N_{p+1/2,q-1/2} - N_{p+1/2,q-1} \neq 0$ . В этом случае возможна немонотонность только по одной из переменных: по  $r$  или по  $\mu$ .

Например, пусть возникла немонотонность по  $r$ , т. е.  $F(\gamma_\mu = \gamma_\mu^C)$  и  $F(\gamma_\mu = 1)$  имеют разные знаки, а знаки  $G(\gamma_r = \gamma_r^C)$  и  $G(\gamma_r = 0)$  совпадают. Так как функция  $F(\gamma_\mu)$  монотонна, то существует значение  $\gamma_\mu = \gamma_\mu^{\text{крит}}$ , при котором  $F(\gamma_\mu^{\text{крит}}) = 0$ . Нетрудно видеть, что если при решении уравнения переноса в ячейке  $D_{p+1/2,q-1/2}$  выбирать  $\gamma_r, \gamma_\mu$  в пределах  $0 \leq \gamma_r \leq \gamma_r^C, \gamma_\mu^C \leq \gamma_\mu^{\text{крит}} \leq \gamma_\mu \leq 1$ , то немонотонности внутри ячейки не будет.

Если в случае  $N_{p+1/2,q-1/2} - N_{p+1/2,q-1} \neq 0$  возникнет немонотонность по  $\mu$ , то для ее ликвидации внутри ячейки  $D_{p+1/2,q-1/2}$  нужно выбрать  $\gamma_r, \gamma_\mu$  в пределах  $0 \leq \gamma_r \leq \gamma_r^{\text{крит}} \leq \gamma_r^C, \gamma_\mu^C \leq \gamma_\mu \leq 1$ , где  $G(\gamma_r^{\text{крит}}) = 0$ .

Можно показать, что немонотонность по обоим переменным  $r$  и  $\mu$  внутри ячейки невозможна.

### Немонотонность в соседних ячейках по $r$ и $\mu$

В предыдущем разделе выяснилось, как нужно выбирать весовые параметры  $\gamma_r, \gamma_\mu$  для того, чтобы немонотонности внутри ячейки  $D_{p+1/2,q-1/2}$  не возникало. Однако может появиться немонотонность при счете в соседних ячейках: по  $r$  — в ячейке  $D_{p-1/2,q-1/2}$ , по  $\mu$  — в ячейке  $D_{p+1/2,q+1/2}$ . То есть знаки чисел  $(N_{p-1/2,q-1/2}^1 - N_{p,q-1/2})$ ,  $(N_{p-1/2,q-1/2}^2 - N_{p,q-1/2})$ , а также чисел  $(N_{p+1/2,q+1/2}^1 - N_{p+1/2,q})$ ,  $(N_{p+1/2,q+1/2}^2 - N_{p+1/2,q})$  могут различаться.

Если при анализе значений по  $r$  —  $N_{p,q-1/2}^2, N_{p-1/2,q-1/2}^2, N_{p-1,q-1/2}^2$  и по  $\mu$  —  $N_{p+1/2,q}^2, N_{p+1/2,q+1/2}^2, N_{p+1/2,q+1}^2$  будет принято решение о их монотонизации, то будем стремиться к тому, чтобы поведение величины  $N^2$  с вышеупомянутыми значениями определялось поведением соответствующих значений величины  $N^1$ . Другими словами, после монотонизации знаки разностей значений по  $\mu$  —  $(N_{p+1/2,q-1/2}^1 - N_{p+1/2,q-1})$ ,  $(N_{p+1/2,q+1/2}^1 - N_{p+1/2,q})$ , а также знаки разностей значений по  $r$  —  $(N_{p+1/2,q-1/2}^1 - N_{p+1,q-1/2})$ ,  $(N_{p-1/2,q-1/2}^1 - N_{p,q-1/2})$  должны быть теми же, что и в расчете по схеме первого порядка.

Поскольку те значения  $\gamma_r, \gamma_\mu$ , с которыми будут рассчитаны  $D_{p+1/2,q+1/2}$  и  $D_{p-1/2,q-1/2}$ , заранее не известны, значения  $N_{p+1/2,q}$  и  $N_{p,q-1/2}$  на гранях ячейки  $D_{p+1/2,q-1/2}$ , служащие входными параметрами для их определения, должны быть выбраны так, чтобы при счете с любыми  $\gamma_r, \gamma_\mu$  из стандартной области  $\{0 \leq \gamma_r \leq \gamma_r^C, \gamma_\mu^C \leq \gamma_\mu \leq 1\}$  в ячейках  $D_{p+1/2,q+1/2}$  и  $D_{p-1/2,q-1/2}$  выполнялись вышеупомянутые условия монотонности.

Возьмем, к примеру, ячейку  $D_{p+1/2,q+1/2}$  (рис. 5). В этой ячейке значение  $N_{p+1,q+1/2}$  известно с предыдущей итерации, а  $N_{p+1/2,q}$  служит параметром.

В свете вышеизложенного сформулируем для ячейки  $D_{p+1/2,q+1/2}$  следующие задачи:

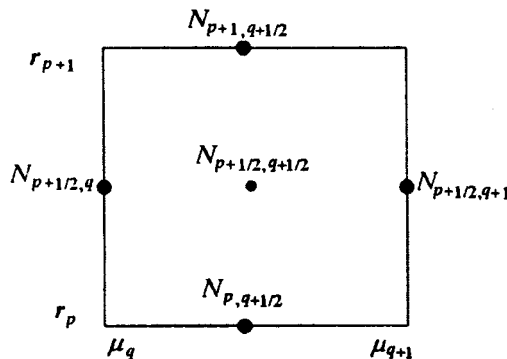


Рис. 5. Ячейка  $D_{p+1/2,q+1/2}$

- 1) найти такую область значений  $N_{p+1/2,q}$  (обозначим ее через  $\varpi_{p+1/2,q}$ ), для которой при произвольном  $N_{p+1/2,q} \in \varpi_{p+1/2,q}$ , а также произвольных  $\gamma_r, \gamma_\mu$  из прямоугольника  $\{0 \leq \gamma_r \leq \gamma_r^C, \gamma_\mu^C \leq \gamma_\mu \leq 1\}$  расчет в ячейке дает неравенство  $N_{p+1/2,q+1/2} \geq N_{p+1/2,q}$ ;
- 2) найти такую область значений  $N_{p+1/2,q}$  (обозначим ее через  $\vartheta_{p+1/2,q}$ ), для которой при произвольном  $N_{p+1/2,q} \in \vartheta_{p+1/2,q}$ , а также произвольных  $\gamma_r, \gamma_\mu$  из прямоугольника  $\{0 \leq \gamma_r \leq \gamma_r^C, \gamma_\mu^C \leq \gamma_\mu \leq 1\}$  расчет в ячейке дает неравенство  $N_{p+1/2,q+1/2} \leq N_{p+1/2,q}$ .

Подобные задачи могут быть сформулированы и для ячейки  $D_{p-1/2,q-1/2}$ .

Для определенности рассмотрим задачу 1. Найдем разность

$$\begin{aligned}
 & N_{p+1/2,q+1/2} - N_{p+1/2,q} = \\
 & = \frac{\frac{1}{2}Q_{p+1/2}\Delta V_{p+1/2}\Delta\mu_{q-1/2} - N_{p+1,q+1/2} \left[ - (r_{p+1}^2 - r_p^2) \bar{\mu}_{q+1/2}\Delta\mu_{q+1/2} - r_p^2 \bar{\mu}_{q+1/2}\Delta\mu_{q+1/2} \frac{1}{1-\gamma_r} \right]}{Z} + \\
 & + \frac{N_{p+1/2,q} \left[ r_p^2 \bar{\mu}_{q+1/2}\Delta\mu_{q+1/2} \frac{1}{1-\gamma_r} + (\mu_{q+1}^2 - \mu_q^2) \bar{r}_{p+1/2}\Delta r_{p+1/2} - \alpha_{p+1/2}\Delta V_{p+1/2}\Delta\mu_{q+1/2} \right]}{Z}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Так как  $Z > 0$ , то знак (5) определяется знаком числителя  $G(\gamma_r) = aN_{p+1,q+1/2} + bN_{p+1/2,q} + c$ , где  $a > 0, b < 0, c \geq 0$ .

Если зафиксировать  $\gamma_r$ , то  $G(\gamma_r)$  обратится в нуль при значении

$$N_{p+1/2,q}^* = \frac{\frac{1}{2}Q_{p+1/2}\Delta V_{p+1/2}\Delta\mu_{q-1/2} - N_{p+1,q+1/2} \left[ - (r_{p+1}^2 - r_p^2) \bar{\mu}_{q+1/2}\Delta\mu_{q+1/2} - r_p^2 \bar{\mu}_{q+1/2}\Delta\mu_{q+1/2} \frac{1}{1-\gamma_r} \right]}{-r_p^2 \bar{\mu}_{q+1/2}\Delta\mu_{q+1/2} \frac{1}{1-\gamma_r} + (\mu_{q+1}^2 - \mu_q^2) \bar{r}_{p+1/2}\Delta r_{p+1/2} - \alpha_{p+1/2}\Delta V_{p+1/2}\Delta\mu_{q+1/2}}.$$

Нетрудно видеть, что при счете с фиксированным  $\gamma_r$  в ячейке  $D_{p+1/2,q+1/2}$  областью значений, в которой  $N_{p+1/2,q+1/2} \geq N_{p+1/2,q}$ , будет область  $N_{p+1/2,q} \geq N_{p+1/2,q}^*$ , поскольку  $G(\gamma_r)$  убывает при возрастании  $N_{p+1/2,q}$ .

$N_{p+1/2,q}^*$  является дробно-линейной функцией  $\gamma_r$ , а следовательно, монотонной, т. е. в прямоугольнике  $\{0 \leq \gamma_r \leq \gamma_r^C, \gamma_\mu^C \leq \gamma_\mu \leq 1\}$  либо только возрастает, либо только убывает. В зависимости от этого решение задачи 1 будет следующим: если  $N_{p+1/2,q}^*(\gamma_r)$  возрастает, то  $N_{p+1/2,q} \geq N_{p+1/2,q}^*(\gamma_r = \gamma_r^C)$ ; если  $N_{p+1/2,q}^*(\gamma_r)$  убывает, то  $N_{p+1/2,q} \geq N_{p+1/2,q}^*(\gamma_r = 0)$ .

Для задачи 2 соответствующими областями являются: если  $N_{p+1/2,q}^*(\gamma_r)$  возрастает, то  $N_{p+1/2,q} \leq N_{p+1/2,q}^*(\gamma_r = \gamma_r^C)$ ; если  $N_{p+1/2,q}^*(\gamma_r)$  убывает, то  $N_{p+1/2,q} \leq N_{p+1/2,q}^*(\gamma_r = 0)$ .

Для ячейки  $D_{p-1/2,q-1/2}$  решение подобных задач может быть получено аналогичным образом.

Итак, при монотонизации решения в соседних ячейках необходимо, чтобы значения  $N_{p+1/2,q}$  и  $N_{p,q-1/2}$  на гранях ячейки  $D_{p-1/2,q-1/2}$  попадали в области, которые определяются числами  $N_{p+1/2,q}^*$  и  $N_{p,q-1/2}^*$ , рассчитанными соответственно в ячейках  $D_{p+1/2,q+1/2}$  и  $D_{p-1/2,q-1/2}$ . Значит, весовые параметры  $\gamma_r, \gamma_\mu$  в ячейке  $D_{p+1/2,q-1/2}$  должны быть выбраны так, чтобы значения  $N_{p+1/2,q}$  и  $N_{p,q-1/2}$  попали в вышеупомянутые области. Желательно, чтобы при этом потери точности были минимальными.

### Выбор весовых параметров $\gamma_r, \gamma_\mu$

После монотонизации внутри ячейки  $D_{p+1/2,q-1/2}$  одно из значений  $\gamma_r = \gamma_r^C, \gamma_\mu = \gamma_\mu^C$  изменится: если это  $\gamma_r$ , то новое значение  $\gamma_r^*$  станет ближе к 0, а если это  $\gamma_\mu$ , то новое значение  $\gamma_\mu^*$  станет ближе к 1. Новая область значений  $\gamma_r, \gamma_\mu$  — прямоугольник  $\{0 \leq \gamma_r \leq \gamma_r^*, \gamma_\mu^* \leq \gamma_\mu \leq 1\}$ . Напоминаем, что здесь одно из чисел —  $\gamma_r^*$  либо  $\gamma_\mu^*$  — имеет стандартное значение.

Таким образом, область  $\{0 \leq \gamma_r \leq \gamma_r^*, \gamma_\mu^* \leq \gamma_\mu \leq 1\}$  является исходной для монотонизации в соседних ячейках.

Рассмотрим четыре пары значений  $\gamma_r, \gamma_\mu$ :  $(0, \gamma_\mu^*), (\gamma_r^*, \gamma_\mu^*), (\gamma_r^*, 1), (0, 1)$ , а также соответствующие им пары значений

$$(N_{p+1/2,q}(\gamma_r, \gamma_\mu), N_{p,q-1/2}(\gamma_r, \gamma_\mu)). \quad (6)$$

Если какие-то пары попали в область монотонности, выберем из них ту, точность расчета которой наибольшая, т. е. для которой величина  $\sqrt{(\gamma_r - \gamma_r^*)^2 + (\gamma_\mu - \gamma_\mu^*)^2}$  минимальна, где  $\gamma_r, \gamma_\mu$  — весовые параметры этого расчета.

Если ни одна из этих пар полностью не попала в область монотонности (такая ситуация возможна лишь на очень грубой сетке), выберем ту, которая находится ближе всех к этой области, т. е. имеет минимальную величину

$$\sqrt{(N_{p+1/2,q} - N_{p+1/2,q}^*)^2 + (N_{p,q-1/2} - N_{p,q-1/2}^*)^2}, \quad (7)$$

где  $N_{p+1/2,q}, N_{p,q-1/2}$  получены в этом расчете, а  $N_{p+1/2,q}^*, N_{p,q-1/2}^*$  суть числа, определяющие область монотонности.

Если создалась ситуация, когда у всех пар только одно из значений  $N_{p+1/2,q}, N_{p,q-1/2}$  не попало в область монотонности, то вместо (7) минимизируется величина  $|N - N^*|$ , где  $N$  принимает те значения пары (6), которые находятся вне области.

### О монотонности решений по схеме второго порядка точности

Если во время счета проводить указанную выше монотонизацию в каждой ячейке  $D_{p+1/2,q-1/2}$ , то в расчете задачи с большим числом столкновений частиц произойдет заметное снижение точности. Например, таковой является задача для уравнения (1) при

$$1 \leq r \leq 2; \quad \alpha = 50; \quad \beta = 50; \quad Q = 0$$

с граничными условиями

$$N(2, \mu) = 0 \text{ при } \mu \leq 0; \quad N(1, \mu) = N(1, -\mu) \frac{3\mu}{4\pi} \text{ при } \mu \geq 0; \quad n^{(1)} = \frac{1}{4\pi}.$$

В подобного рода задачах по схеме второго порядка даже на грубых сетках получается близкое к точному гладкое решение как по пространству, так и по углу. Следовательно, чтобы не иметь потерь точности, в тех областях пространства по  $r$  и  $\mu$ , где использование схемы второго порядка дает хороший результат, полученное решение нужно оставлять.

Исходя из естественных априорных соображений, подкрепленных опытом расчетов, укажем те ячейки, в которых решение, полученное по схеме второго порядка, будет сохраняться: это ячейки, где решение монотонно по обоим переменным.

По любой из переменных решение монотонно в следующих случаях:

- если решение на протяжении счетной и соседней ячеек неотрицательно и монотонно;
- если решение на протяжении счетной и соседней ячеек неотрицательно и имеет экстремум, так же, как и решение, полученное по схеме первого порядка, причем экстремумы могут быть разными.

Во всех остальных случаях решение будет монотонизировано.

Если теперь рассчитать упомянутую выше задачу, сохраняя на итерациях те решения второго порядка точности, которые условились считать монотонными, то никаких потерь точности не произойдет.



### Численные результаты

Все задачи решались по трем схемам:

- 1)  $DS_n^1$ -схема плюс метод балансного зануления;
- 2)  $DS_n^2$ -схема плюс алгоритм монотонизации, рассматриваемый в данной статье;
- 3)  $ST_n$ -схема – рабочий вариант (для решения задач переноса излучения [10, 11]).

$ST_n$ -схема привлекалась к расчетам с целью оценки качества решения по схеме 2 в тех задачах, где использование схемы 1 приводит к немонотонному профилю плотности частиц.

В качестве иллюстрации решения приводятся профили плотности частиц  $n^{(0)}(r)$  (на графиках  $n(r)$ ), а также угловое распределение решения  $N(r, \mu)$  (на графиках  $N(\mu)$ ) для тех  $r$ , которые принадлежат области резкого изменения функции  $n^{(0)}(r)$ .

**Задача 1.** Рассматривалась задача из [10] для уравнения (1):

область 1:  $0 \leq r \leq 2$ ;  $\alpha = 50$ ;  $\beta = 0$ ;  $Q = 50$ ;

область 2:  $2 < r \leq 3$ ;  $\alpha = 5$ ;  $\beta = 0$ ;  $Q = 0$ ;

область 3:  $3 < r \leq 5$ ;  $\alpha = 0,001$ ;  $\beta = 0,001$ ;  $Q = 0$ ;

область 4:  $5 < r \leq 6$ ;  $\alpha = 70$ ;  $\beta = 10$ ;  $Q = 50$ ;

область 5:  $6 < r \leq 8$ ;  $\alpha = 0,001$ ;  $\beta = 0$ ;  $Q = 0$ ;

область 6:  $8 < r \leq 10$ ;  $\alpha = 50$ ;  $\beta = 0$ ;  $Q = 0$ ;

область 7:  $10 < r \leq 13$ ;  $\alpha = 0,001$ ;  $\beta = 0,001$ ;  $Q = 0,1$

с граничными условиями

$$N(13, \mu) = 0 \text{ при } \mu \leq 0; \quad N(0, \mu) = N(0, -\mu) \text{ при } \mu \geq 0.$$

Задача была посчитана для четырех вариантов счетной сетки:

- A1: 20 равномерных интервалов по  $\mu$ ; по  $r$  в областях 1, 3, 5, 6, 7 взято 10 равномерных интервалов, в областях 2 и 4 – по 5 равномерных интервалов;
- A2: 40 равномерных интервалов по  $\mu$ ; по  $r$  в областях 1, 3, 5, 6, 7 взято 20 равномерных интервалов, в областях 2 и 4 – по 10 равномерных интервалов;
- A3: 80 равномерных интервалов по  $\mu$ ; по  $r$  в областях 1, 3, 5, 6, 7 взято 40 равномерных интервалов, в областях 2 и 4 – по 20 равномерных интервалов;
- A4: 320 равномерных интервалов по  $\mu$ ; по  $r$  в областях 1, 3, 5, 6, 7 взято 160 равномерных интервалов, в областях 2 и 4 – по 80 равномерных интервалов.

Сетки A1, A2, A3 будем называть грубыми.

За точное решение принимался расчет задачи по схеме 2 (см. выше) на сетке A4: в этом расчете значения функций  $n^{(0)}(r)$ ,  $N(r, \mu)$  определяются на границах областей и границах системы с точностью до 1%.

На рис. 6–8 изображены профили плотности частиц при решении данной задачи по трем схемам в сравнении с точным решением. Хорошо видно, что по схеме 1 во всех расчетах получаются немонотонные решения, тогда как по схемам 2 и 3 – монотонные, на графиках практически совпадающие как между собой, так и с точным решением.

**Задача 2.** Для уравнения (1) рассматривалась следующая задача:

область 1:  $1 \leq r \leq 1,2$ ;  $\alpha = 1000$ ;  $\beta = 900$ ;  $Q = 1000$ ;

область 2:  $1,2 < r \leq 1,8$ ;  $\alpha = 10000$ ;  $\beta = 0$ ;  $Q = 0$ ;

область 3:  $1,8 < r \leq 2$ ;  $\alpha = 1000$ ;  $\beta = 900$ ;  $Q = 1000$

с граничными условиями

$$N(2, \mu) = 0 \text{ при } \mu \leq 0; \quad N(1, \mu) = N(1, -\mu) \text{ при } \mu \geq 0.$$

Задача была посчитана для шести вариантов счетной сетки:

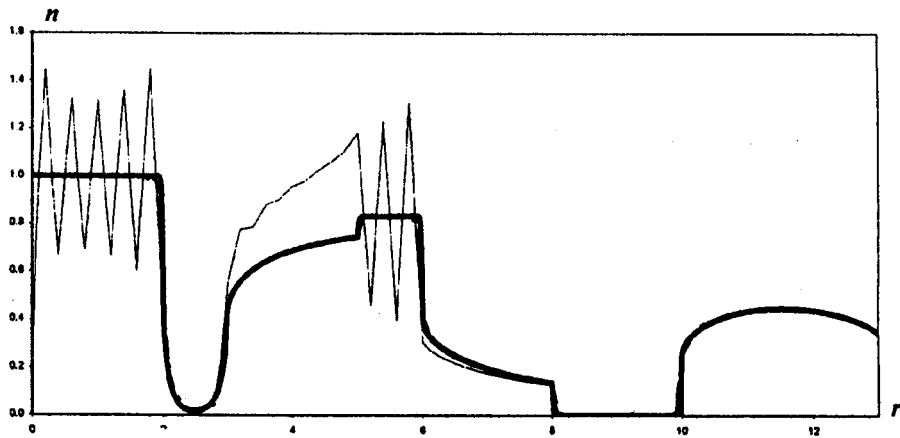


Рис. 6. Задача 1, сетка A1. Расчетные профили плотности частиц: — — схема 1; - - - - схема 2; - · - · - схема 3; — — точное решение

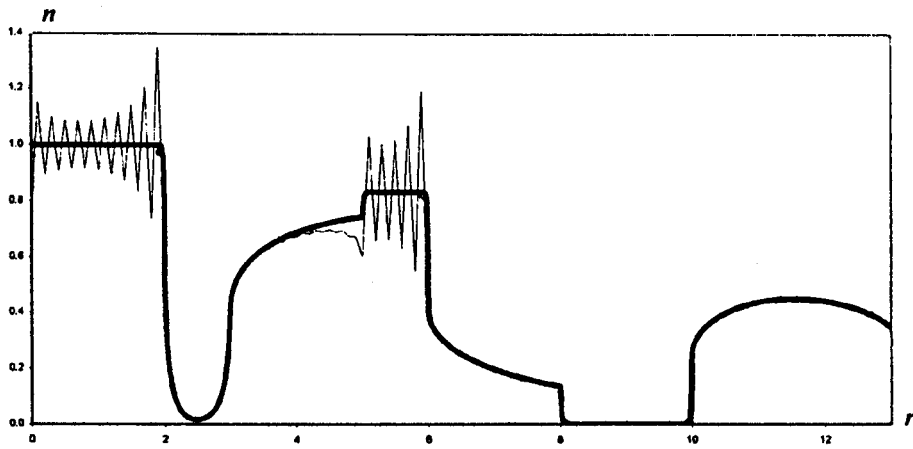


Рис. 7. Задача 1, сетка A2. Расчетные профили плотности частиц: — — схема 1; - - - - схема 2; - · - · - схема 3; — — точное решение

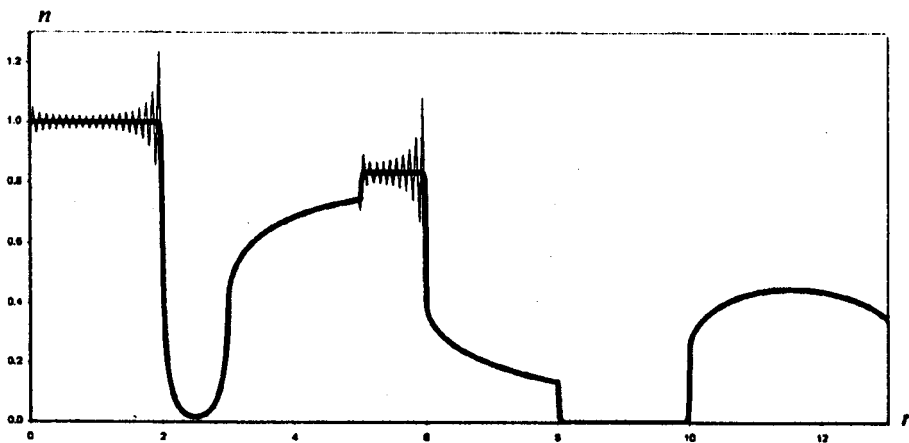


Рис. 8. Задача 1, сетка A3. Расчетные профили плотности частиц: — — схема 1; - - - - схема 2; - · - · - схема 3; — — точное решение

- В1: 20 равномерных интервалов по  $\mu$ , 20 равномерных интервалов по  $\tau$ ;
- В2: 40 равномерных интервалов по  $\mu$ , 40 равномерных интервалов по  $\tau$ ;
- В3: 80 равномерных интервалов по  $\mu$ , 80 равномерных интервалов по  $\tau$ ;
- В4: 160 равномерных интервалов по  $\mu$ , 160 равномерных интервалов по  $\tau$ ;
- В5: 320 равномерных интервалов по  $\mu$ , 320 равномерных интервалов по  $\tau$ ;
- В6: 640 равномерных интервалов по  $\mu$ , 640 равномерных интервалов по  $\tau$ .

Сетки В1, В2, В3 будем называть грубыми.

За точное решение принимался расчет задачи по схеме 2 на сетке В6: в этом расчете значения функций  $n^{(0)}(\tau)$ ,  $N(\tau, \mu)$  определяются на границах областей и границах системы с точностью до 1 %.

На рис. 9–11 изображены профили плотности частиц при решении данной задачи по трем схемам в сравнении с точным решением. Хорошо видно, что по схеме 1 во всех расчетах получаются немо- нотонные решения, тогда как по схемам 2 и 3 — монотонные, на графиках практически совпадающие между собой, постепенно приближающиеся к точному решению (см. расчет на сетке В3).

Поскольку профили плотности частиц, полученные по схеме 2 и  $ST_n$ -схеме при решении за- дач 1 и 2, графически совпадают на грубых сетках, чтобы более детально оценить качество ре-

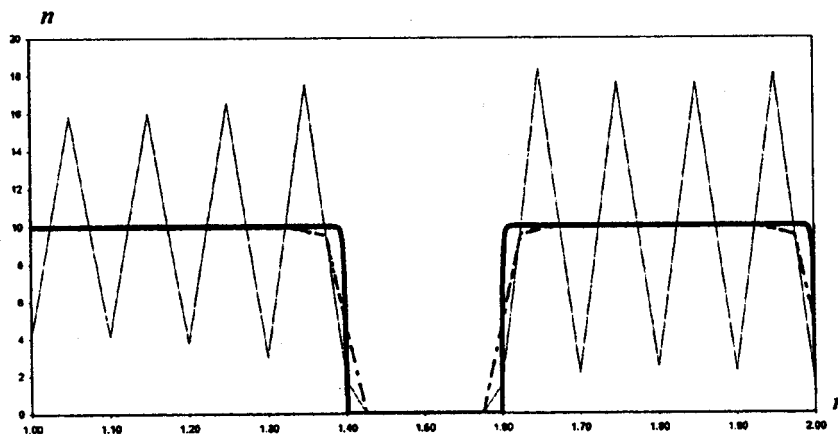


Рис. 9. Задача 2, сетка В1. Расчетные профили плотности частиц: — — схема 1; - - - - схема 2; · · · · · схема 3; — — точное решение

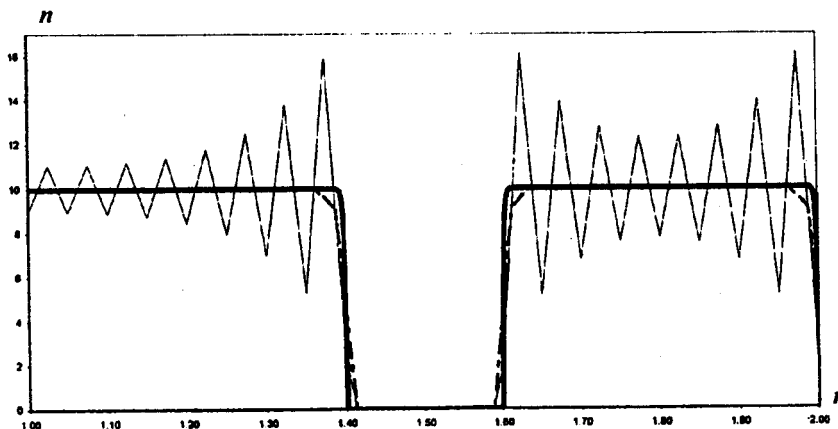


Рис. 10. Задача 2, сетка В2. Расчетные профили плотности частиц: — — схема 1; - - - - схема 2; · · · · · схема 3; — — точное решение

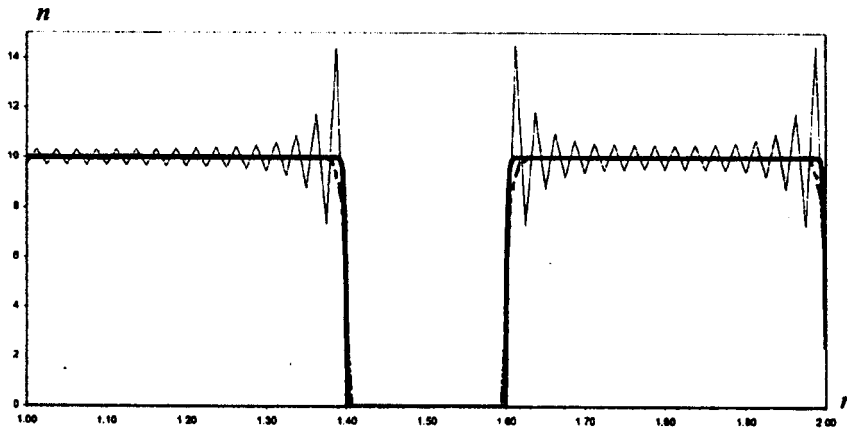


Рис. 11. Задача 2, сетка В3. Расчетные профили плотности частиц: — — схема 1; - - - - схема 2; - · - · - схема 3; — — точное решение

шения при использовании упомянутых схем, необходимо сравнить получаемые при этом угловые распределения частиц.

Это сравнение проведем для задачи 2 (у ее решения по пространству более крутые градиенты, чем в задаче 1) на границе первой и второй областей, при  $r = 1,4$ , где  $n^{(0)}(r)$  резко меняется. В расчетах этой задачи на сетках В1, В2, В3 угловые распределения, полученные по схеме 2, монотонны, а по  $ST_n$ -схеме — немонотонны. Чтобы не перегружать изложение, для грубых сеток ограничимся сказанным; сравнение же этих распределений приведем для расчетов на мелких сетках В4, В5 (рис. 12, 13), чтобы оценить еще и скорости сходимости схем к точному решению.

Из рисунков видно, что решение, полученное по схеме 2, в отличие от решения по схеме 3, сходится к точному решению как монотонно, так и более быстро. Использование схемы 1 даже на сетке В6 дает немонотонный профиль плотности частиц, поэтому на рис. 12, 13 он не представлен.

Таким образом, в задачах, где профиль плотности частиц, получаемый по схеме 1, немонотонен, соответствующие профили по схеме 2 и  $ST_n$ -схеме монотонны и графически совпадают даже на грубых сетках. Однако, оценивая угловые распределения, можно сказать, что решения по схеме 2 превосходят решения по  $ST_n$ -схеме как по монотонности, так и по скорости сходимости к точному решению.

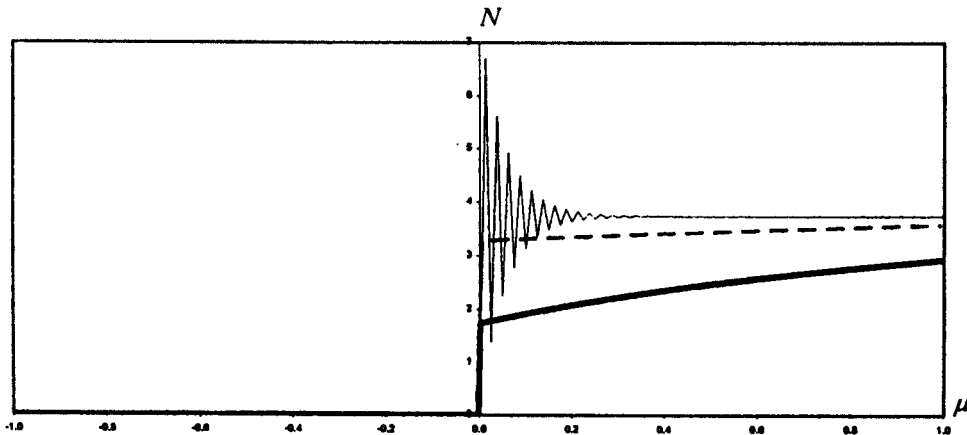


Рис. 12. Задача 2, сетка В4. Угловое распределение частиц: - - - - схема 2; — · — · — схема 3; — — точное решение

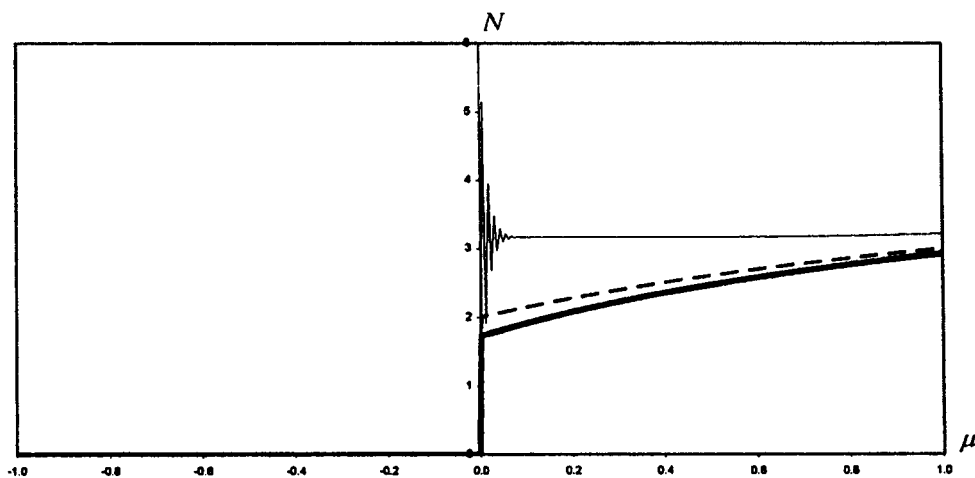


Рис. 13. Задача 2, сетка В5. Угловое распределение частиц: - - - - схема 2; - · - · - схема 3; — — — точное решение

Хорошо известно, что в задачах, где использование схемы 1 дает монотонное по пространству решение, это решение обладает высокой точностью. Для таких задач представляет интерес сравнение точности схем 1 и 2.

**Задача 3.** Для того чтобы сравнить точности схем 1 и 2, рассмотрим следующую задачу для уравнения (1):

- область 1:  $1 \leq r \leq 1,2$ ;  $\alpha = 50$ ;  $\beta = 50$ ;  $Q = 0$ ;
- область 2:  $1,2 < r \leq 1,8$ ;  $\alpha = 10\,000$ ;  $\beta = 0$ ;  $Q = 0$ ;
- область 3:  $1,8 < r \leq 2$ ;  $\alpha = 50$ ;  $\beta = 50$ ;  $Q = 1$

с граничными условиями

$$N(2, \mu) = 0 \text{ при } \mu \leq 0; \quad N(1, \mu) = N(1, -\mu) + \frac{3\mu}{4\pi} \text{ при } \mu \geq 0; \quad n^{(1)} = \frac{1}{4\pi}.$$

Задача была посчитана для четырех вариантов счетной сетки:

- В1: 20 равномерных интервалов по  $\mu$ , 20 равномерных интервалов по  $r$ ;
- В2: 40 равномерных интервалов по  $\mu$ , 40 равномерных интервалов по  $r$ ;
- В3: 80 равномерных интервалов по  $\mu$ , 80 равномерных интервалов по  $r$ ;
- В4: 160 равномерных интервалов по  $\mu$ , 160 равномерных интервалов по  $r$ .

За точное решение принимался расчет задачи по схеме 1 на сетке В4: в этом расчете значения функций  $n^{(0)}(r)$ ,  $N(r, \mu)$  определяются на границах областей и границах системы с точностью до 1%.

На рис. 14–16 изображены профили плотности частиц при решении этой задачи по трем схемам в сравнении с точным решением.

Хорошо видно, что по схемам 1, 2, 3 во всех расчетах получаются монотонные решения, на графиках практически совпадающие как между собой, так и с точным решением, за исключением рис. 14.

Не приводя рисунков, скажем, что угловые распределения частиц, полученные по схемам 1 и 2, монотонны в первой и третьей областях задачи во всех расчетах и практически совпадают уже в расчете на сетке В3. Отличие наблюдается во второй области в ячейках, прилегающих к границам первой и третьей областей.

На рис. 17–19 изображены угловые распределения частиц, полученные по схемам 1 и 2 в ячейке, прилегающей к третьей области. Решение по  $ST_n$ -схеме по угловому распределению частиц заметно уступает в монотонности решению, полученному по схемам 1 и 3 во всех расчетах, и поэтому не приводится.

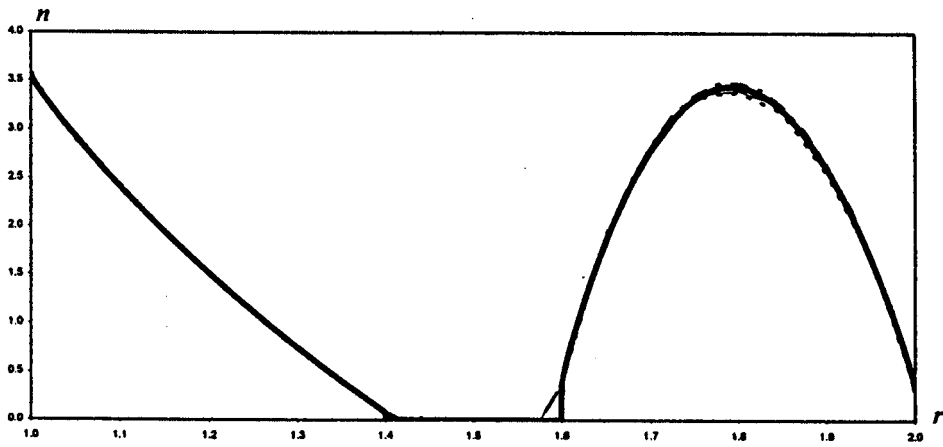


Рис. 14. Задача 3, сетка В1. Расчетные профили плотности частиц: — — схема 1; - - - - схема 2; - · - · - схема 3; — — точное решение

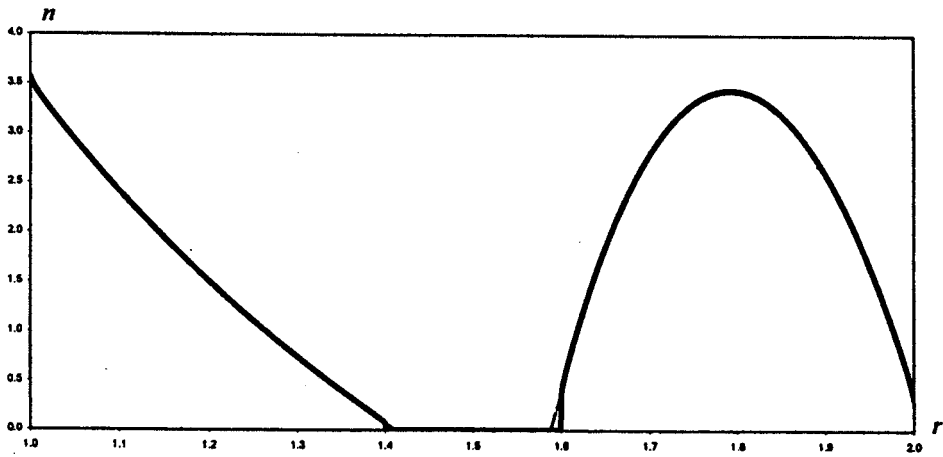


Рис. 15. Задача 3, сетка В2. Расчетные профили плотности частиц: — — схема 1; - - - - схема 2; - · - · - схема 3; — — точное решение

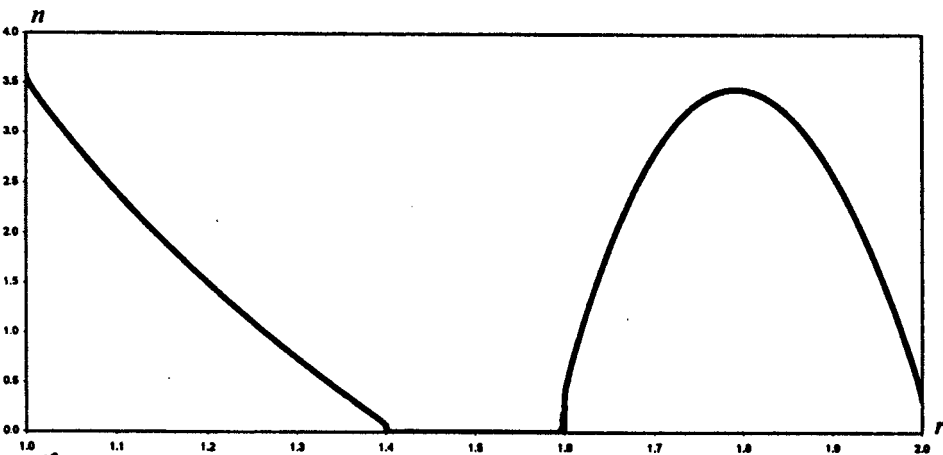


Рис. 16. Задача 3, сетка В3. Расчетные профили плотности частиц: — — схема 1; - - - - схема 2; - · - · - схема 3; — — точное решение

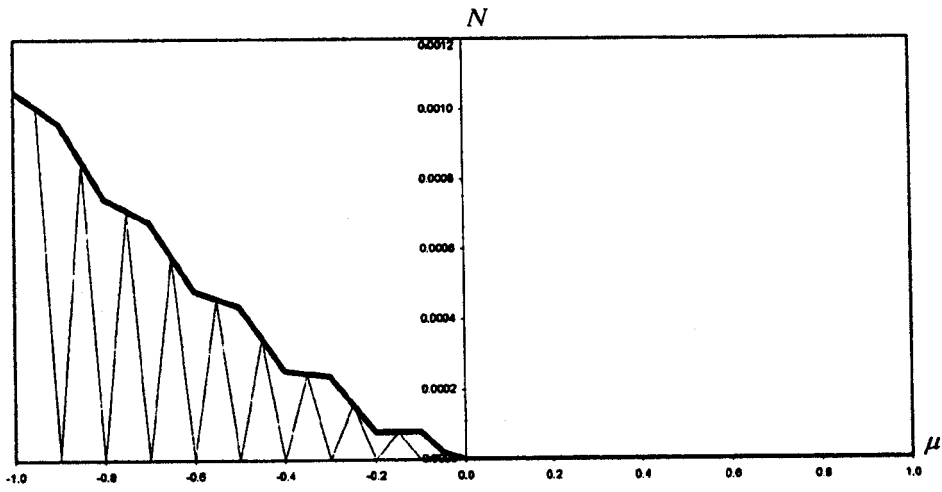


Рис. 17. Задача 3, сетка В1. Угловое распределение частиц: --- — схема 1; — — схема 2

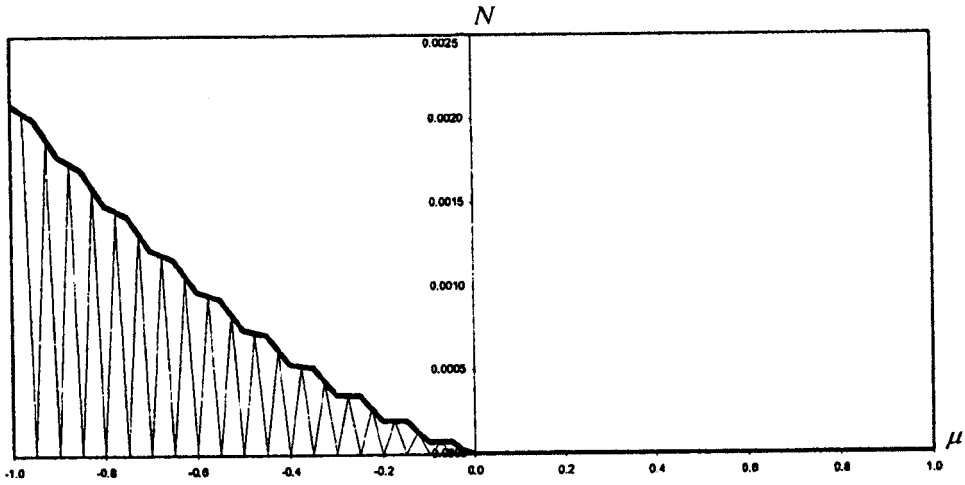


Рис. 18. Задача 3, сетка В2. Угловое распределение частиц: --- — схема 1; — — схема 2

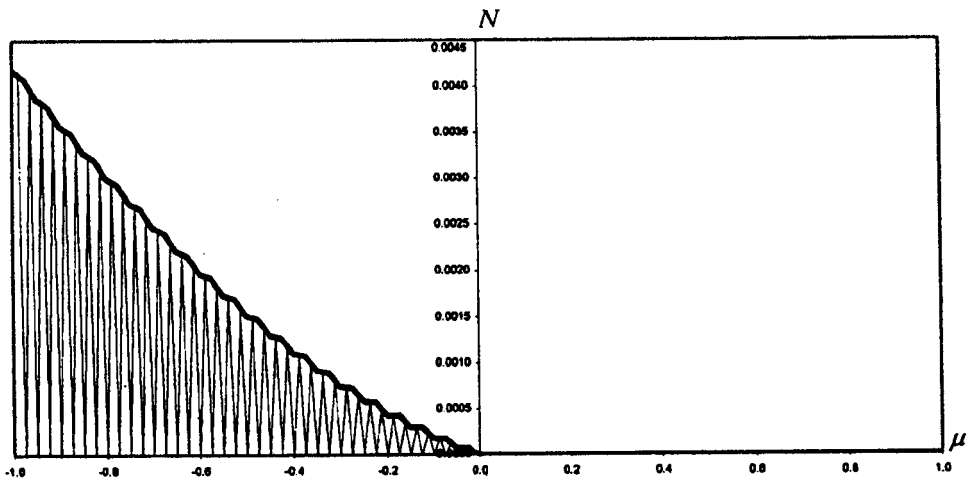


Рис. 19. Задача 3, сетка В3. Угловое распределение частиц: --- — схема 1; — — схема 2

Из рис. 17–19 видно, что угловое распределение частиц, полученное по схеме 2, явно более монотонно, чем угловое распределение по схеме 1, которое носит пилообразный характер.

В целом по результатам расчетов задачи 3 можно сказать, что схема 2 предпочтительней схемы 1 вследствие более монотонного представления решения по углу.

Автор выражает глубокую благодарность Пастушенко В. А. за помощь в написании и оформлении статьи.

### Список литературы

1. Карлсон Б., Белл Дж. Решение транспортного уравнения  $S_n$ -методом // Физика ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1959.
2. Морозов В. Н. О решении кинетического уравнения с помощью  $S_n$ -метода // Теория и методы расчета ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1962.
3. Карлсон Б. Численные решения задач кинетической теории нейтронов // Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1963.
4. Reed W. H., Lathrop K. D. Truncation error analysis of finite difference approximations to the transport equation // Nucl. Sci. Eng. 1970. Vol. 41, No 2.
5. Грошев Е. В., Мжачих С. В., Юдинцев В. Ф. О некоторых свойствах  $\tilde{D}S_n^{\gamma}$ -схем для сферически-симметричного уравнения переноса // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 2.
6. Гольдин В. Я., Калиткин Н. Н., Шишова Т. В. Нелинейные разностные схемы для гиперболических уравнений // Журнал вычисл. мат. и мат. физики. 1965. Т. 5.
7. Елесин В. А., Трощев В. Е., Федянин В. И., Юдинцев В. Ф. Численные методы и организация программ для решения многогруппового нестационарного кинетического уравнения // Комплексы программ математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972.
8. Елесин В. А., Трощев В. Е., Юдинцев В. Ф. Развитие численных методов и программ расчета одномерных спектральных задач переноса теплового излучения во ВНИИЭФ (задачи ФО) // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып. 1.
9. Варганова Л. Ф., Гаджиев А. Д. О конечно-разностном методе решения уравнения переноса в квазиклассических координатах // Числ. методы мех. спл. среды. 1974. № 5.
10. Грошев Е. В., Пастушенко А. М., Юдинцев В. Ф. Об одной трехточечной разностной схеме с весовым множителем для уравнения переноса // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып. 2.
11. Грошев Е. В. Об одном методе ускорения сходимости итераций для численного решения одномерного нестационарного уравнения переноса излучения в многогрупповом кинетическом приближении // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1992. Вып. 1.

Статья поступила в редакцию 05.04.07.

---