

УДК 533.9

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ РАЗВИТИЯ МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРОННОЙ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ

А. И. Голубев, В. А. Терехин, Е. В. Уваров  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Получено точное решение линейной задачи Коши о развитии малых поперечных электромагнитных возмущений в электронной плазме со *ступенчатой* невозмущенной функцией распределения электронов по скоростям. Приведены явные зависимости от времени амплитуд электрического и магнитного полей для устойчивых и неустойчивых колебаний. Дано описание способа сглаживания ступенчатого распределения, не приводящего к существенному изменению дисперсионных свойств плазмы. Найденное решение может быть использовано в качестве теста для методик численного моделирования поведения бесстолкновительной плазмы.

### Введение

Для тестирования численных методик моделирования динамики плазмы традиционно используются задачи о развитии малых возмущений в пространственно-однородной плазме. При этом, как правило, оценка точности методики производится на основе сравнения вычисленных из линейной теории скоростей роста (или затухания) амплитуд отдельных гармоник и их временных периодов с аналогичными величинами, получаемыми в расчетах. При моделировании продольных колебаний плазмы чаще всего используется задача о затухании Ландау [1–6], при моделировании поперечных колебаний получила распространение задача о развитии вейбелевской неустойчивости [7] в плазме с анизотропным распределением электронов по скоростям [8, 9]. Кроме того, нередко используется задача о свободном движении плазмы [1, 3], на которой проявляются трудности, возникающие при решении кинетического уравнения с использованием дискретной сетки по скоростным переменным.

В данной работе ищется точное решение задачи Коши для развития малых поперечных колебаний в электронном компоненте нерелятивистской плазмы. Ионный фон считается однородным и неподвижным. Решение задачи Коши будет получено для *ступенчатой* функции распределения электронов по скоростям; такие распределения нередко используются при теоретических исследованиях свойств плазмы (см., например, [10]). Найденное решение содержит не только инкременты отдельных пространственных гармоник и их временные периоды, но и временные зависимости амплитуд этих гармоник, которые в известной авторам литературе не определяются. При тестировании численных методик эта информация представляется важной, поскольку позволяет проводить более детальное сравнение численного и аналитического решений.

### Постановка задачи Коши

При получении решения задачи Коши будем полагать, что в некоторой декартовой системе координат  $(x, y, z)$  функция распределения электронов зависит лишь от переменных  $t, x, v_x, v_y, v_z$ , т. е. задача является пространственно одномерной. Кроме того, ограничимся рассмотрением только таких условий, при которых отличными от нуля являются лишь компоненты  $E_x, E_y$  напряженности

электрического поля и компонента  $H_z$  напряженности магнитного поля. В этом случае невозмущенную стационарную функцию распределения  $f_0$  можно считать зависящей лишь от компонент скорости  $v_x, v_y$ , полагая, что по переменной  $v_z$  проведено интегрирование.

В отсутствие внешних полей система уравнений, описывающих эволюцию малых возмущений в пространственно однородной плазме, имеет вид [11] (используется гауссова система единиц измерения)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{en_0}{m} \left( E_x + \frac{1}{c} H_z v_y \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_x} - \frac{en_0}{m} \left( E_y - \frac{1}{c} v_x H_z \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_x = 0; \quad (2)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad (3)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 4\pi\rho.$$

В уравнении (1)  $n_0$  — концентрация электронов; функция распределения  $f_0(v_x, v_y)$  нормирована условием  $\int f_0 d\vec{v} = 1$ .

Как обычно, предполагается, что  $\int f_0 \vec{v} d\vec{v} = 0$ ; компоненты плотности тока  $j_x, j_y$  связаны с малым возмущением  $f$  функции распределения соотношениями

$$j_\alpha = -e \int v_\alpha f d\vec{v} \quad (\alpha = x, y), \quad (5)$$

плотность заряда

$$\rho = -e \int f d\vec{v}. \quad (6)$$

Уравнения (1)–(6) образуют замкнутую систему линейных уравнений, решение которой будем искать на отрезке  $0 \leq x \leq L$ , предполагая все величины периодическими функциями от  $x$  с периодом  $L$ . При этом считается, что при  $t = 0$  заданы начальные данные

$$f(t = 0, x, v_x, v_y) = f_{c0}(v_x, v_y) \cos kx + f_{s0}(v_x, v_y) \sin kx;$$

$$E_x(t = 0, x) = e_{c0} \cos kx + e_{s0} \sin kx;$$

$$E_y(t = 0, x) = E_{c0} \cos kx + E_{s0} \sin kx;$$

$$H_z(t = 0, x) = h_{c0} \cos kx + h_{s0} \sin kx,$$

где волновой вектор  $k$  выбран таким образом, что период  $2\pi/k$  в целое число раз меньше  $L$ .

### Вычисление решения задачи Коши

При принятых начальных и граничных условиях решение уравнений (1)–(6) также будет линейной комбинацией функций  $\cos kx, \sin kx$  с коэффициентами  $(e_c, e_s), (E_c, E_s), (h_c, h_s)$  соответственно для компонент  $E_x, E_y, H_z$ , зависящими от времени  $t$ , и коэффициентами  $(f_c, f_s)$  для функции  $f$ ,

зависящими от  $t, v_x, v_y$ . Для этих коэффициентов из (1)–(4) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{df_\alpha}{dt} \pm kv_x f_\beta - \frac{en_0}{m} \left( e_\alpha + \frac{1}{c} v_y h_\alpha \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_x} - \frac{en_0}{m} \left( E_\alpha - \frac{1}{c} v_x h_\alpha \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_y} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{de_\alpha}{dt} + 4\pi j_{x\alpha} = 0; \quad \frac{1}{c} \frac{dE_\alpha}{dt} + \frac{4\pi}{c} j_{y\alpha} = \mp kh_\beta; \quad \frac{1}{c} \frac{dh_\alpha}{dt} = \mp kE_\beta; \quad (8)$$

$$j_{x\alpha} = -e \int v_x f_\alpha d\vec{v}, \quad j_{y\alpha} = -e \int v_y f_\alpha d\vec{v}.$$

В этих уравнениях  $\alpha = c, s$ ;  $\beta = c, s$ ;  $\beta \neq \alpha$ ; верхний из знаков  $\pm$  или  $\mp$  соответствует  $\alpha = c$ , нижний —  $\alpha = s$ . Поскольку будут рассматриваться лишь поперечные колебания, положим  $e_{c0} = e_{s0} = 0$ . Кроме того, предположим, что при  $t = 0$  нет возмущений в плотности заряда, т. е.

$$\int f_{c0} d\vec{v} = \int f_{s0} d\vec{v} = 0.$$

Так будет, например, если  $f_{c0}, f_{s0}$  — нечетные функции  $v_y$ . В этом случае и при  $t > 0$  согласно (7)  $f_c, f_s$  будут нечетными функциями  $v_y$  и  $e_c = e_s = 0$ .

Применим к оставшимся уравнениям для  $f_\alpha, E_\alpha, h_\alpha$  ( $\alpha = c, s$ ) преобразование Лапласа по  $t$ . Оставляя для образов те же обозначения, что и для оригиналов, из (7), (8) имеем для них систему линейных алгебраических уравнений

$$pf_\alpha - f_{\alpha 0} \pm kv_x f_\beta - \frac{en_0}{mc} h_\alpha \left( v_y \frac{\partial f_0}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial f_0}{\partial v_y} \right) - \frac{en_0}{m} E_\alpha \frac{\partial f_0}{\partial v_y} = 0; \quad (9)$$

$$pE_\alpha - E_{\alpha 0} + 4\pi j_{y\alpha} = \mp ck h_\beta; \quad (10)$$

$$ph_\alpha - h_{\alpha 0} = \mp ck E_\beta, \quad (11)$$

где  $p$  — аргумент преобразования Лапласа;  $j_{y\alpha}$  связаны с  $f_\alpha$  согласно приведенным ранее формулам. Выразим из этих уравнений  $f_\alpha, f_\beta, h_\alpha, h_\beta$  через  $E_\alpha, E_\beta$ .

Из уравнений (11) имеем

$$h_\alpha = \frac{h_{\alpha 0}}{p} \mp \frac{kc}{p} E_\beta. \quad (12)$$

Из уравнений (9) находим

$$f_\alpha = \frac{1}{p^2 + k^2 v_x^2} (p\varphi_\alpha \mp kv_x \varphi_\beta) \quad (\alpha = c, s; \beta = c, s; \alpha \neq \beta),$$

где

$$\varphi_\alpha = f_{\alpha 0} + \frac{en_0}{mc} h_\alpha \left( v_y \frac{\partial f_0}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial f_0}{\partial v_y} \right) + \frac{en_0}{m} E_\alpha \frac{\partial f_0}{\partial v_y}.$$

Используя полученные уравнения для  $f_\alpha$ , находим компоненты плотности токов  $j_{y\alpha}$ :

$$j_{y\alpha} = -e \int v_y f_\alpha d\vec{v} = -e \int \frac{v_y}{p^2 + k^2 v_x^2} (p\varphi_\alpha \mp kv_x \varphi_\beta) d\vec{v}.$$

Вычислим интегралы в правой части. Учитывая вид  $\varphi_\alpha$ , имеем

$$I_{1\alpha} = p \int \frac{v_y}{p^2 + k^2 v_x^2} \varphi_\alpha d\vec{v} = p \left[ \int \frac{v_y f_{\alpha 0}}{p^2 + k^2 v_x^2} d\vec{v} + \frac{en_0}{mc} h_\alpha \int \frac{v_y}{p^2 + k^2 v_x^2} \left( v_y \frac{\partial f_0}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial f_0}{\partial v_y} \right) d\vec{v} + \frac{en_0}{m} E_\alpha \left( \int \frac{v_y}{p^2 + k^2 v_x^2} \frac{\partial f_0}{\partial v_y} d\vec{v} \right) \right].$$

Второй интеграл в квадратных скобках равен нулю вследствие нечетности подынтегральной функции по  $v_x$  ( $f_0(v_x, v_y)$  полагается четной по  $v_x$  и по  $v_y$  функцией). Выполнив в последнем интеграле интегрирование по частям, найдем

$$I_{1\alpha} = -n_0 \frac{ep}{m} E_\alpha g + p \int \frac{v_y f_{\alpha 0}}{p^2 + k^2 v_x^2} d\vec{v},$$

где

$$g = \int \frac{f_0}{p^2 + k^2 v_x^2} d\vec{v}.$$

С помощью аналогичных рассуждений нетрудно показать, что

$$I_{2\alpha} = k \int \frac{v_x v_y}{p^2 + k^2 v_x^2} \varphi_\beta d\vec{v} = \frac{ek}{mc} n_0 h_\beta h + k \int \frac{v_x v_y}{p^2 + k^2 v_x^2} f_{\beta 0} d\vec{v},$$

где

$$h = \int \frac{v_x^2 f_0}{p^2 + k^2 v_x^2} d\vec{v} + \int \frac{v_x v_y^2}{p^2 + k^2 v_x^2} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} d\vec{v}.$$

Следовательно,

$$j_{y\alpha} = \frac{e^2 p}{m} n_0 g E_\alpha \pm \frac{e^2 k}{mc} n_0 h h_\beta - e j_{\alpha 0}, \quad j_{\alpha 0} = \int \frac{p f_{\alpha 0} \mp k v_x f_{\beta 0}}{p^2 + k^2 v_x^2} v_y d\vec{v}.$$

Подставляя полученное выражение для  $j_{y\alpha}$  в (10) и заменяя затем  $h_\beta$  согласно (12), для образа  $E_\alpha$  получаем следующее уравнение:

$$E_\alpha \left[ p \left( 1 + \omega_p^2 g \right) + \frac{k^2 c^2}{p} + \frac{\omega_p^2 k^2}{p} h \right] = E_{\alpha 0} + 4\pi e j_{\alpha 0} \mp \frac{h_{\beta 0}}{p} \left( kc + \frac{\omega_p^2 k}{c} h \right). \quad (13)$$

Учитывая вид функций  $g$ ,  $h$ , выражение в квадратных скобках в формуле (13) можно привести к виду

$$p + \frac{\omega_p^2 + k^2 c}{p} + \frac{\omega_p^2 k^2}{p} \int \frac{v_x v_y^2}{p^2 + k^2 v_x^2} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} d\vec{v} \equiv \frac{D(p, k)}{p}.$$

Следовательно, образы  $E_\alpha$  выражаются через начальные данные задачи Коши в виде

$$E_\alpha = \frac{p}{D} E_{\alpha 0} + \frac{4\pi ep}{D} j_{\alpha 0} \mp \frac{kc + \omega_p^2 kh/c}{D} h_{\beta 0}. \quad (14)$$

До сих пор нигде не использовался конкретный вид функции  $f_0(v_x, v_y)$ . Предположим, что функция  $f_0(v_x, v_y)$  имеет вид

$$f_0(v_x, v_y) = \varphi(v_x) \psi(v_y),$$

где функции  $\varphi(v_x)$ ,  $\psi(v_y)$  нормированы условиями

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v_x) dv_x = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v_y) dv_y = 1.$$

Кроме того, будем считать, что  $\varphi(v)$  — ступенчатая функция:

$$\varphi(v) = \frac{1}{2v_0} \theta(v_0^2 - v^2), \quad \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Вычислим для нее интегралы, входящие в (14):

$$\int \frac{v_x v_y^2}{p^2 + k^2 v_x^2} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} d\vec{v} = v_s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_x}{p^2 + k^2 v_x^2} \left( -\frac{v_x}{v_0} \right) \delta(v_0^2 - v_x^2) dv_x = -\frac{v_s^2}{p^2 + k^2 v_0^2};$$

$$\int \frac{v_x^2 f_0}{p^2 + k^2 v_x^2} d\vec{v} = \frac{1}{v_0} \int_0^{v_0} \frac{v_x^2 dv_x}{p^2 + k^2 v_x^2} = \frac{1}{k^2} \left( 1 - \frac{p}{kv_0} \arctg \frac{kv_0}{p} \right),$$

где  $v_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v_y^2 \psi(v_y) dv_y$ .

Учитывая эти выражения, получаем

$$D(p, k) = p^2 + \omega_p^2 + k^2 c^2 - \frac{\omega_p^2 k^2 v_s^2}{p^2 + k^2 v_0^2}. \quad (15)$$

Для  $h$  имеем следующее выражение:

$$h = \frac{1}{k^2} \left( 1 - \frac{p}{kv_0} \arctg \frac{kv_0}{p} \right) - \frac{v_s^2}{p^2 + k^2 v_0^2}.$$

Интегралы, входящие в  $j_{\alpha 0}$ , зависят от вида начальных возмущений функции распределения. В дальнейшем будем полагать, что  $f_{\alpha 0}(v_x, v_y) = 0$ ,  $\alpha = c, s$ . Оригиналы для функций  $p/D$ ,  $kc + \omega_p^2 kh/c$  по-разному зависят от времени; в частности, оригинал для  $h$  содержит функцию  $\sin kv_0 t$ , которой нет в оригинале для  $p/D$ . Поэтому нет оснований надеяться (при нулевом  $f_{\alpha 0}$ !) на погашение колебаний какой-либо частоты за счет выбора  $E_{\alpha 0}$ ,  $h_{\beta 0}$ . В дальнейшем будем полагать  $h_{\beta 0} = 0$  ( $\beta = s, c$ ).

Найдем оригинал для  $p/D$ . Очевидно, что

$$\frac{p}{D} = \frac{p(p^2 + b_1)}{p^4 + p^2(a + b_1) + ab_1 - b_2},$$

где

$$a = \omega_p^2 + k^2 c^2; \quad b_1 = k^2 v_0^2; \quad b_2 = \omega_p^2 k^2 v_s^2.$$

Функция  $D(p, k)$ , определяемая (15), обращается в нуль при  $p^2 = -z_1$  и  $p^2 = -z_2$ , где

$$z_1 = \frac{1}{2} \left[ a + b_1 + \sqrt{(a - b_1)^2 + 4b_2} \right]; \quad z_2 = \frac{1}{2} \left[ a + b_1 - \sqrt{(a - b_1)^2 + 4b_2} \right],$$

так что

$$\frac{p}{D} = \frac{p(p^2 + b_1)}{(p^2 + z_1)(p^2 + z_2)}.$$

Поскольку рассматривается нерелятивистский случай, то имеет место неравенство  $a \gg b_1$ ; очевидно также, что  $z_1 > a$ . Нетрудно видеть, что всегда  $z_2 < b_1$ . Кроме того, корень  $z_2$  при определенных значениях параметров  $k, v_0, v_s$  может оказаться отрицательным. Установим условия, когда  $z_2 < 0$ . Очевидно, это будет при  $ab_1 - b_2 < 0$ , или, что то же, при

$$\frac{ck}{\omega_p} < \left( \frac{v_s^2}{v_0^2} - 1 \right)^{1/2}. \quad (16)$$

Неравенство (16) является условием развития неустойчивости Вейбеля для заданных параметров  $k, v_0, v_s$ . Инкремент  $\gamma$  роста амплитуды неустойчивой гармоник равен

$$\gamma = |z_2|^{1/2} = \left( \frac{b_2 - ab_1}{z_1} \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Обозначим

$$p_1 = i\sqrt{z_1}; \quad p_2 = -i\sqrt{z_1}; \quad p_3 = i\sqrt{z_2}; \quad p_4 = -i\sqrt{z_2}.$$

Тогда оригинал для  $p/D$  будет иметь вид

$$F(t) = \frac{p_1(p_1^2 + b_1)}{(p_1 - p_2)(-z_1 + z_2)} e^{p_1 t} + \frac{p_2(p_2^2 + b_1)}{(p_2 - p_1)(-z_1 + z_2)} e^{p_2 t} + \\ + \frac{p_3(p_3^2 + b_1)}{(z_1 - z_2)(p_3 - p_4)} e^{p_3 t} + \frac{p_4(p_4^2 + b_1)}{(z_1 - z_2)(p_4 - p_3)} e^{p_4 t},$$

или с учетом выражений для  $p_i$  ( $i = 1 \div 4$ )

$$F(t) = \frac{1}{z_1 - z_2} [(z_1 - b_1) \cos(\sqrt{z_1}t) + (b_1 - z_2) \cos(\sqrt{z_2}t)]. \quad (18)$$

Эта формула справедлива, если не выполнено неравенство (16), т. е. в случае устойчивых колебаний. Если же неравенство (16) выполнено, то

$$F(t) = \frac{1}{z_1 - z_2} [(z_1 - b_1) \cos(\sqrt{z_1}t) + (b_1 - z_2) \operatorname{ch}(\gamma t)], \quad (19)$$

где  $\gamma$  определено согласно (17). Во всех случаях

$$E_\alpha(t) = E_{\alpha 0} F(t). \quad (20)$$

Амплитуды  $h_\alpha$  вычисляются по формулам

$$h_\alpha(t) = \mp k c E_{\beta 0} \int_0^t F(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Интегрируя (18), (19), получаем:

– для устойчивых колебаний

$$\int_0^t F(\tau) d\tau = \frac{1}{z_1 - z_2} \left( \frac{z_1 - b_1}{\sqrt{z_1}} \sin(\sqrt{z_1}t) + \frac{b_1 - z_2}{\sqrt{z_2}} \sin(\sqrt{z_2}t) \right);$$

– для неустойчивых колебаний

$$\int_0^t F(\tau) d\tau = \frac{1}{z_1 - z_2} \left( \frac{z_1 - b_1}{\sqrt{z_1}} \sin(\sqrt{z_1}t) + \frac{b_1 - z_2}{\gamma} \operatorname{sh}(\gamma t) \right).$$

Отметим, что явно выраженный экспоненциальный рост амплитуды  $h_\alpha$  наступает при условии

$$\frac{b_1 - z_2}{z_1 - b_1} \frac{\sqrt{z_1}}{\gamma} \operatorname{sh}(\gamma t) \gg 1,$$

или, что то же, при

$$t \gg \frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{\gamma(z_1 - b_1)}{(b_1 - z_2)\sqrt{z_1}} \right) \equiv t_e.$$

Полученные формулы (20), (21) можно использовать при тестировании численных методик.

### О сглаживании ступенчатых распределений

Отметим следующее обстоятельство. Для численных методик моделирования поведения плазмы, основанных на методе частиц, ступенчатый характер зависимости невозмущенной функции распределения  $f_0$  от переменной  $v_x$  не создает дополнительных трудностей. Не так обстоит дело с методиками, основанными на разностных методах решения кинетического уравнения Власова: по методикам, не использующим сглаживание численных осцилляций, вообще нельзя провести расчет такой задачи, а методики со сглаживанием осцилляций будут непредсказуемым образом изменять истинные дисперсионные свойства плазмы. Поэтому при тестировании подобных методик желательно сгладить ступенчатые распределения, не изменяя при этом существенно полученные выше корни  $z_1, z_2$ . Покажем, как это можно сделать.

Выберем в качестве  $\varphi(v)$  следующую функцию:

$$\varphi(v) = \varphi_0 \cdot \begin{cases} \exp\left(-\frac{(v + v_0)^2}{v_*^2}\right), & v < -v_0; \\ 1, & |v| \leq v_0; \\ \exp\left(-\frac{(v - v_0)^2}{v_*^2}\right), & v > v_0, \end{cases}$$

где  $v_*$  — параметр, определяющий ширину *размазки* ступенчатого распределения;  $\varphi_0$  определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) dv = 1.$$

Несложные вычисления дают

$$\varphi_0 = \frac{1}{2v_0 + \sqrt{\pi}v_*}.$$

Предположив, что  $v_* \ll v_0$ , определим, как изменится при таком сглаживании дисперсионное уравнение  $D(p, k) = 0$ . Сразу отметим, что если функция  $\psi(v_y)$  также имеет ступенчатый вид, то ее тоже надо сгладить аналогично  $\varphi(v_x)$ ; в дальнейшем считается, что такое сглаживание выполнено и величина  $v_s^2$  в формуле (15) вычислена с его учетом — обозначим ее через  $\tilde{v}_s^2$ . Оставив только члены первого порядка по  $v_*/v_0$ , после несложных вычислений приходим к следующему дисперсионному уравнению (вместо уравнения  $D(p, k) = 0$ ):

$$-p^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2 \left[ 1 - \frac{k^2 \tilde{v}_s^2}{p^2 + k^2 v_0^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{\pi} v_*}{v_0} \frac{k^2 v_0^2}{p^2 + k^2 v_0^2} \right) \right]. \quad (22)$$

Отсюда следует, что корни дисперсионного уравнения (22) будут незначительно отличаться от корней  $z_1, z_2$ , если  $v_* \ll v_0$  и

$$v_s^2 \approx \tilde{v}_s^2 \left( 1 + \frac{\sqrt{\pi} v_*}{v_0} \frac{k^2 v_0^2}{z_2 - k^2 v_0^2} \right). \quad (23)$$

Это соотношение следует использовать при постановке расчетов со сглаженным распределением частиц.

*Замечание.* Поскольку  $v_0^2 \ll c^2$ ,  $v_s^2 \ll c^2$ , то корень  $z_1 \approx a$ . Следовательно,  $z_2 \simeq b_1 - b_2/a$ ; поэтому выражение в скобках в формуле (23) примет вид

$$1 - \frac{\sqrt{\pi} v_*}{v_0} \frac{ab_1}{b_2} = 1 - \frac{\sqrt{\pi} v_*}{v_0} \left( 1 + \frac{k^2 c^2}{\omega_p^2} \right) \frac{v_0^2}{v_s^2}.$$

Это означает, что размазывание ступенчатого профиля по переменной  $v_*$  приводит при вычислении  $z_2$  к уменьшению  $\tilde{v}_s^2$ . При этом в (23) множитель при  $v_*/v_0$  равен

$$\frac{k^2 v_0^2}{z_2 - k^2 v_0^2} = \frac{b_1}{z_2 - b_1} \approx -\frac{ab_1}{b_2},$$

так что в устойчивом режиме, когда  $b_2 < b_1$ , он может стать большим. Следовательно, выбрать параметр сглаживания  $v_*$  для устойчивого режима более сложно, чем для неустойчивого.

### Заключение

В данной работе получено точное решение линейной задачи Коши о развитии малых поперечных электромагнитных возмущений в электронной плазме со ступенчатой невозмущенной функцией распределения электронов по скоростям. Это решение может быть использовано в качестве теста для методик численного моделирования поведения бесстолкновительной плазмы.

Имеющийся у авторов опыт по использованию этого решения в качестве теста позволяет сделать следующие выводы:

- при использовании метода частиц в ячейке наиболее сложными для моделирования оказываются устойчивые режимы со значениями волнового числа вблизи верхней границы области неустойчивости;
- сглаживая ступенчатую функцию распределения с обоснованным выбором параметра сглаживания, можно получить распределение, пригодное для численного моделирования с применением разностных методов решения уравнения Власова. При проведении расчетов необходимо обеспечивать на сглаживающем профиле достаточно большое (порядка 5–10) число интервалов сеток по скоростным переменным.



Список литературы

1. *Cheng C. Z., Knorr G.* The integration of the Vlasov equation in configuration space // *J. Comp. Phys.* 1976. Vol. 22. P. 330–351.
2. *Arber T. D., Vann R. G. L.* A critical comparison of Eulerian-grid-based Vlasov solvers // *Ibid.* 2002. Vol. 180. P. 339–357.
3. *Nakamura T., Yabe T.* Cubic interpolated propagation scheme for solving the hyper-dimensional Vlasov-Poisson equation in phase space // *Comp. Phys. Commun.* 1999. Vol. 120. P. 122–154.
4. *Fijalkow E.* Numerical solution to the Vlasov equation: the 1D code // *Comp. Phys. Commun.* 1999. Vol. 116. P. 329–335.
5. *Fijalkow E.* Numerical solution to the Vlasov equation: the 2D code // *Ibid.* P. 336–344.
6. *Filbet F., Sonnendrucker E., Bertrand P.* Conservative numerical schemes for the Vlasov equation // *J. Comp. Phys.* 2001. Vol. 172. P. 166–187.
7. *Weibel E. S.* Spontaneously growing transverse waves in a plasma due to an anisotropic velocity distribution // *Phys. Rev. Lett.* 1959. Vol. 2, No 3. P. 83–84.
8. *Morse R. L., Nielson C. W.* Numerical simulation of the Weibel instability in one and two dimensions // *Phys. Fluids.* 1971. Vol. 14, No 4. P. 830–840.
9. *Mangeney A., Califano F., Cavazzoni C., Travnicek P.* A Numerical scheme for the integration of the Vlasov-Maxwell system of equations // *J. Comp. Phys.* 2002. Vol. 179. P. 495–538.
10. *Yoon P. H., Davidson R. C.* Closed-form analytical model of the electron whistler and cyclotron maser instabilities in relativistic plasma with arbitrary energy anisotropy // *Phys. Rev. A.* 1987. Vol. 35, No 6. P. 2619–2630.
11. *Ишимару С.* Основные принципы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1975.

Статья поступила в редакцию 22.06.07.

---