

УДК 519.6

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОСЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М. Е. Ладонкина, О. Ю. Милюкова, В. Ф. Тишкин  
(ИММ РАН, г. Москва)

Предлагается новый эффективный алгоритм решения уравнений параболического типа на основе многосеточного метода, который сохраняет в себе достоинства неявной схемы — устойчивость и точность и при этом позволяет существенно уменьшить число арифметических операций на каждом временном слое. На примере одномерной модельной задачи теоретически доказывается абсолютная устойчивость предложенного метода. На примере двумерной модельной задачи теоретически исследуется точность метода; доказано, что для модельной задачи решение, полученное с помощью предложенного метода, очень мало отличается от решения по неявной схеме на подробной сетке. Расчеты одномерных и двумерных модельных задач с непрерывными и разрывными коэффициентами показали хорошую точность предложенного метода.

### Введение

При численном моделировании многих задач математической физики, например задач газовой динамики, гидродинамики, необходимо учитывать диффузионные процессы. Учет диффузионных процессов требует решения параболических уравнений. Использование явных схем для аппроксимации уравнений параболического типа приводит к жесткому ограничению на шаг по времени для сохранения устойчивости [1, 2] и, следовательно, к очень большому времени расчетов. Применение неявных схем снимает это ограничение, однако трудоемкость решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при этом, может сделать невыгодным их использование. Заметим, что применение многосеточных методов [3] в классическом варианте в ряде случаев также может быть связано с большим числом арифметических операций и не дать существенного выигрыша по сравнению с вычислением по явным схемам. Поэтому необходима разработка новых алгоритмов решения параболических уравнений.

В настоящей работе предложен новый эффективный алгоритм, основанный на использовании многосеточного метода. Проводится теоретическое и численное исследование устойчивости и точности созданного двухсеточного метода на примере модельных задач для одномерного и двумерного уравнений теплопроводности с постоянными и переменными коэффициентами. Показано, что предложенный алгоритм сохраняет в себе достоинства неявной схемы — устойчивость и точность и, кроме того, позволяет существенно уменьшить число арифметических операций на каждом временном слое по сравнению с использованием неявной схемы.

### Алгоритм решения уравнений диффузионного типа на основе двухсеточного метода

Построение и исследование алгоритма решения уравнений диффузионного типа проведем на примере начально-краевой задачи для одномерного и двумерного уравнений теплопроводности:

$$\begin{aligned} \rho C_V \frac{\partial T}{\partial t} &= \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + f, & x \in G; \\ T(x, t) &= g(x, t) \quad \text{при } x \in \gamma; \\ T(x, 0) &= T_0(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $C_V$  — коэффициент теплоемкости при постоянном объеме;  $\rho$  — плотность;  $\varkappa$  — коэффициент теплопроводности;  $T$  — температура в точке  $x$  в момент времени  $t$ ;  $f$  — плотность тепловых источников;  $\gamma$  — граница области расчета;  $g(x, t)$ ,  $T_0(x)$  — заданные функции. Для аппроксимации задачи (1) в области расчета  $G = \{0 < x < l_1, 0 < y < l_2, 0 < t \leq T\}$  будем использовать чисто неявную разностную схему:

$$(C_V \rho)_{i,j} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = \varkappa_{i+0,5,j} \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h_x^2} - \varkappa_{i-0,5,j} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \\ + \varkappa_{i,j+0,5} \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h_y^2} - \varkappa_{i,j-0,5} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + \Phi_{i,j}, \quad (2)$$

$$u_{i,j}^0 = T_0(x_i, y_j), \quad 0 < i < N_1, \quad 0 < j < N_2;$$

$$u_{0,j}^n = u_1(t_n, y_j), \quad u_{N_1,j}^n = u_2(t_n, y_j), \quad 0 < i < N_1, \quad 0 < j < N_2,$$

$$u_{i,0}^n = u_3(t_n, x_i), \quad u_{i,N_2}^n = u_4(t_n, x_i),$$

где  $h_x, h_y$  — постоянные шаги сетки по  $x, y$ ;  $\tau$  — шаг по  $t$ . Разностная схема (2) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений решения на  $(n+1)$ -м слое по времени:

$$A_h u^{n+1} = f_h. \quad (3)$$

В предлагаемом в настоящей работе методе значения сеточной функции на следующем слое по времени определяются с помощью следующего алгоритма.

На первом этапе делается одна или несколько сглаживающих простых итераций для уравнений (2) или (3), вычисления производятся по формуле

$$u_{i,j}^{s+1, n+1} = \sigma \left( \frac{(C_V \rho)_{i,j} u_{i,j}^n}{\tau} + \frac{\varkappa_{i+0,5,j} u_{i+1,j}^{s, n+1} + \varkappa_{i-0,5,j} u_{i-1,j}^{s, n+1}}{h_x^2} + \frac{\varkappa_{i,j+0,5} u_{i,j+1}^{s, n+1} + \varkappa_{i,j-0,5} u_{i,j-1}^{s, n+1}}{h_y^2} + \Phi_{i,j} \right) \times \\ \times \frac{1}{\frac{(C_V \rho)_{i,j}}{\tau} + \frac{\varkappa_{i+0,5,j} + \varkappa_{i-0,5,j}}{h_x^2} + \frac{\varkappa_{i,j+0,5} + \varkappa_{i,j-0,5}}{h_y^2}} + (1 - \sigma) u_{i,j}^{s, n+1}, \quad (4)$$

где  $s$  — номер сглаживающей итерации;  $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ ;  $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ ;  $\sigma$  — весовой множитель,  $0 < \sigma \leq 1$ ;  $u_{i,j}^{0, n+1} = u_{i,j}^n$ . Полученную сеточную функцию обозначим  $u_{i,j}^{cgl}$ . Затем вычисляется невязка

$$r = A_h u^{cgl} - f_h.$$

На втором этапе — этапе проекции, или ограничения невязки на грубую сетку — вычисления проводятся по формулам

$$R_{l,p} = r_{2i_1, 2j_1}, \quad \text{где } i_1 = 1, 2, \dots, N_1/2 - 1; \quad j_1 = 1, 2, \dots, N_2/2 - 1.$$

На третьем этапе решается уравнение для поправки на грубой сетке, которое в рассматриваемом двумерном случае имеет вид

$$(C_V \rho)_{l,p} \frac{\Delta_{l,p}}{\tau} - \varkappa_{l+0,5,p} \frac{\Delta_{l+1,p} - \Delta_{l,p}}{H_x^2} + \varkappa_{l-0,5,p} \frac{\Delta_{l,p} - \Delta_{l-1,p}}{H_x^2} - \\ - \varkappa_{l,p+0,5} \frac{\Delta_{l,p+1} - \Delta_{l,p}}{H_y^2} + \varkappa_{l,p-0,5} \frac{\Delta_{l,p} - \Delta_{l,p-1}}{H_y^2} = R_{l,p}; \quad (5)$$

$$\Delta_{l,0} = \Delta_{l, N_2/2} = \Delta_{0,p} = \Delta_{N_1/2, p} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N_1/2 - 1, \quad p = 1, 2, \dots, N_2/2 - 1,$$

где  $H_x = 2h_x$ ;  $H_y = 2h_y$ .

На четвертом этапе поправка  $\Delta_{l,p}$  интерполируется на подробную сетку. Используется интерполяция по 4 точкам на ребрах двумерных ячеек грубой сетки и по 16 точкам в центрах ячеек грубой сетки. Вычисления производят по формулам

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} \Delta_{l,p}, & i = 2l, \quad j = 2p \quad (i, j - \text{четные}); \\ \frac{9}{16} (\Delta_{l,p} + \Delta_{l+1,p}) - \frac{1}{16} (\Delta_{l-1,p} + \Delta_{l+2,p}), & i = 2l+1, \quad j = 2p \quad (i - \text{нечетные}, j - \text{четные}); \\ \frac{9}{16} (\Delta_{l,p} + \Delta_{l,p+1}) - \frac{1}{16} (\Delta_{l,p-1} + \Delta_{l,p+2}), & i = 2l, \quad j = 2p+1 \quad (i - \text{четные}, j - \text{нечетные}); \\ \frac{81}{256} (\Delta_{l,p} + \Delta_{l+1,p} + \Delta_{l,p+1} + \Delta_{l+1,p+1}) + \frac{1}{256} (\Delta_{l-1,p-1} + \Delta_{l-1,p+2} + \Delta_{l+2,p+2} + \Delta_{l+2,p-1}) - \\ - \frac{9}{256} (\Delta_{l-1,p} + \Delta_{l-1,p+1} + \Delta_{l,p+2} + \Delta_{l+1,p+2} + \Delta_{l+2,p+1} + \Delta_{l+2,p} + \Delta_{l+1,p-1} + \Delta_{l,p-1}), & i = 2l+1, \quad j = 2p+1 \quad (i, j - \text{нечетные}), \end{cases} \quad (6)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ ;  $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ . Заметим, что  $\delta_{i,0} = \delta_{i,N_2} = 0$ ;  $\delta_{0,j} = \delta_{N_1,j} = 0$ .

На заключительном пятом этапе производится вычисление сеточной функции на следующем временном слое по формуле

$$u_{i,j} = u_{i,j}^{\text{стп}} - \delta_{i,j}. \quad (7)$$

Здесь и далее верхний индекс  $n+1$  опущен.

Таким образом, делается всего одна итерация двухсеточного цикла. Несмотря на то, что система линейных уравнений при этом остается решенной не до конца, такая схема, как показано ниже теоретически и численно для ряда модельных задач, обладает аппроксимацией, устойчивостью и точностью, присущими неявной схеме. Кроме того, при достаточно большом числе узлов подробной сетки вычислительные затраты в предложенном методе меньше, чем при использовании неявной схемы на подробной сетке, так как решение системы уравнений для поправки на крупной сетке (5) требует существенно меньше арифметических действий, чем решение системы уравнений для неявной схемы на подробной сетке (2).

### Теоретическое исследование устойчивости метода для модельной задачи

С помощью гармонического анализа [4, 5] проведем исследование устойчивости по начальным данным предложенного двухсеточного метода на примере модельной задачи – задачи Дирихле для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными единичными коэффициентами на отрезке  $[0, 1]$ . Предположим, что  $N$  – четное. Предположим также, что делается одна сглаживающая итерация. Неявная разностная схема на подробной сетке имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u_i^H - (u_i^H)^n}{\tau} &= \frac{u_{i-1}^H - 2u_i^H + u_{i+1}^H}{h^2} + \Phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ u_0 &= u_N = 0; \\ u_i^0 &= (T_0)_i, \end{aligned}$$

где  $u_i^H$  – решение уравнения теплопроводности по неявной схеме на новом временном слое;  $h = 1/N$ ;  $(T_0)_i$  – заданная сеточная функция. Заметим, что при исследовании устойчивости по начальным данным полагаем  $\Phi_i \equiv 0$ .

Представим  $u_i^n$  – решение предложенным методом на  $n$ -м слое – в виде разложения в ряд Фурье:

$$u_i^n = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sin k\pi x_i \sqrt{2}.$$

В работе [6] получено разложение в ряд Фурье решения данной модельной задачи на  $(n + 1)$ -м временном слое, определенное с помощью предложенного метода:

$$u_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq N/2}}^{N-1} \left[ \left( q_{\text{сгл}}^k - Q_{\text{попр}}^k q_{\text{нев}}^k \frac{q'_k + 1}{2} \right) a_k + Q_{\text{попр}}^k q_{\text{нев}}^{N-k} \frac{q'_k + 1}{2} a_{N-k} \right] \sqrt{2} \sin k\pi x_i + q_{\text{сгл}}^{N/2} a_{N/2} \sqrt{2} \sin \left( \frac{N}{2} \pi x_i \right), \quad (8)$$

где

$$q_{\text{сгл}}^k = 1 + \frac{\sigma R}{1 + R} (q_k - 1); \quad q_{\text{нев}}^k = \frac{1}{\tau} \left\{ q_{\text{сгл}}^k [1 + R(1 - q_k)] - 1 \right\}; \quad Q_{\text{попр}}^k = \frac{\tau}{1 + 0,5R(1 - q_k^2)};$$

$$q_k = \cos \frac{k\pi}{N} = \cos k\pi h; \quad q'_k = q_k [1 + 0,5(1 - q_k^2)]; \quad R = \frac{2\tau}{h^2}. \quad (9)$$

Заметим, что в случае решения одномерной задачи интерполяция на четвертом этапе производится по формулам

$$\delta_i = \begin{cases} \Delta_l, & l = \frac{i}{2} & \text{для } i - \text{четных;} \\ \frac{9}{16} (\Delta_l + \Delta_{l+1}) - \frac{1}{16} (\Delta_{l-1} + \Delta_{l+2}), & l = \frac{i-1}{2} & \text{для } i - \text{нечетных,} \end{cases}$$

где  $i = 1, \dots, N - 1$ .

Докажем абсолютную устойчивость предложенного метода по начальным данным в некоторой специальной норме при  $\sigma = 1/2$ . На векторы  $\sqrt{2} \sin k\pi x_i$  и  $\sqrt{2} \sin (N - k)\pi x_i$  натянем линейное подпространство  $H^k$ , причем  $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$ . Из формул (8) с учетом равенств  $Q_{\text{погр}}^k = Q_{\text{погр}}^{N-k}$ ,  $q'_{N-k} = -q'_k$  следует, что в результате вычислений с помощью предложенного двухсеточного метода вектор

$$\mathbf{x}^k = a_k \sqrt{2} \sin k\pi x_i + a_{N-k} \sqrt{2} \sin (N - k)\pi x_i \in H^k$$

преобразуется в вектор

$$\mathbf{y}^k = A_k \mathbf{x}^k \in H^k,$$

где

$$A_k = \begin{pmatrix} q_{\text{сгл}}^k - Q_{\text{попр}}^k q_{\text{нев}}^k \frac{q'_k + 1}{2} & Q_{\text{попр}}^k q_{\text{нев}}^{N-k} \frac{q'_k + 1}{2} \\ Q_{\text{попр}}^k q_{\text{нев}}^k \frac{1 - q'_k}{2} & q_{\text{сгл}}^{N-k} - Q_{\text{попр}}^k q_{\text{нев}}^{N-k} \frac{1 - q'_k}{2} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, N/2 - 1.$$

Доказано [6], что собственные значения матрицы  $A_k$  удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_1^k \neq \lambda_2^k; \quad |\lambda_1^k| \leq 1; \quad |\lambda_2^k| \leq 1. \quad (10)$$

Во всем пространстве сеточных функций введем норму  $\|\cdot\|_1$ :

$$\|\mathbf{u}^n\|_1^2 = \sum_{k=1}^{N/2-1} \left( \alpha_1^k \right)^2 + \left( \alpha_2^k \right)^2 + a_{N/2}^2,$$

где  $\alpha_1^k, \alpha_2^k, a_{N/2}$  — координаты вектора  $\mathbf{u}^n$  в базисе  $\mathbf{e}_1^k, \mathbf{e}_2^k, \sqrt{2} \sin \left( \frac{N}{2} \pi x_i \right)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$ ;  $\mathbf{e}_1^k, \mathbf{e}_2^k$  — собственные векторы, соответствующие собственным значениям  $\lambda_1^k, \lambda_2^k$ .

Учитывая (10), а также неравенство  $|q_{\text{сгл}}^{k,m}| \leq 1$ , имеем

$$\|\mathbf{u}\|_1 \leq \|\mathbf{u}^n\|_1,$$

что доказывает абсолютную устойчивость метода по начальным данным в норме  $\|\cdot\|_1$ .

Заметим, что можно доказать эквивалентность  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_{L_2}$  [6].

Доказательство устойчивости метода по правой части проводится аналогично, оно подробно описано в [6]. Из абсолютной устойчивости метода по начальным данным и по правой части следует абсолютная устойчивость метода, причем для решения одномерной модельной задачи справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_1 \leq \|\mathbf{u}^0\|_1 + \tau Q_1 \sum_{j=0}^n \|\Phi^j\|_2.$$

Здесь  $Q_1 = \text{const}$  не зависит от  $h$ ,  $\tau$ ; определение  $\|\cdot\|_2$  аналогично определению  $\|\cdot\|_1$ .

### Оценка погрешности решения для модельной задачи

В качестве модельной задачи будем рассматривать двумерную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с единичными коэффициентами в единичном квадрате с нулевыми граничными условиями и нулевой правой частью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x < 1, & \quad 0 < y < 1, & \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, y, 0) &= T_0(x, y), & 0 \leq x \leq 1, & \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u(0, y, t) &= 0, \quad u(1, y, t) = 0, & 0 \leq y \leq 1, & \quad 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0, t) &= 0, \quad u(x, 1, t) = 0, & 0 \leq x \leq 1, & \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Предположим, что  $T_0(x, y)$  — бесконечно дифференцируемая функция. Неявная разностная схема на подробной сетке имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^n - (u_{i,j}^n)^n}{\tau} &= \frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{h^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{h^2}, & i = 1, 2, \dots, N-1, & \quad j = 1, 2, \dots, N-1; \\ u_{i,0} &= u_{i,N} = u_{0,j} = u_{N,j} = 0; \\ u_{i,j}^0 &= (T_0)_{i,j}, & i = 0, 1, \dots, N, & \quad j = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $h = 1/N$ ;  $(T_0)_{i,j}$  — сеточная функция, аппроксимирующая функцию  $T_0(x, y)$ , и пусть  $N$  — четное.

Предположим, что делается одна сглаживающая итерация,  $\sigma = 0,5$ . Представим решение задачи предложенным методом на предыдущем  $n$ -м временном слое в виде ряда Фурье:

$$u_{i,j}^n = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} a_{k,m} 2 \sin k\pi x_i \sin m\pi y_j, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (12)$$

Получим разложение в ряд Фурье решения на новом временном слое, найденного с помощью предложенного метода. Для этого, рассуждая аналогично [6], проследим, какой вид имеет разложение в ряд Фурье решений, полученных на каждом этапе предложенного метода.

После подстановки  $u_{i,j}^n$ , определенного в (12), в правую часть формулы (4) при  $C_V \rho \equiv 1$ ,  $x_{i,j} \equiv 1$ ,  $\Phi_{i,j} \equiv 0$ ,  $s = 0$ ,  $h_x = h_y = h$ ,  $u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n$  в результате несложных преобразований, учитывающих формулу суммы синусов углов, получим

$$u_{i,j}^{\text{сгл}} = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} q_{\text{сгл}}^{k,m} a_{k,m} 2 \sin k\pi x_i \sin m\pi y_j, \quad (13)$$

где

$$q_{\text{сгл}}^{k,m} = 1 + \frac{0,5R(q_k + q_m - 2)}{1 + 2R}; \quad (14)$$

$q_k, q'_k, R$  определены в (9). После подстановки в (11) вместо  $u_{i,j}^n$  функции  $u_{i,j}^{\text{сгл}}$ , определенной в (13), а вместо  $(u_{i,j}^n)^n$  — функции  $u_{i,j}^n$ , определенной в (12), получим, что разложение в ряд Фурье невязки на подробной сетке имеет вид

$$r_{i,j} = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} q_{\text{нев}}^{k,m} a_{k,m} 2 \sin k\pi x_i \sin m\pi y_j,$$

где

$$q_{\text{нев}}^{k,m} = \frac{q_{\text{сгл}}^{k,m} [1 + R(2 - q_k - q_m)] - 1}{\tau}. \quad (15)$$

После выполнения второго этапа — ограничения невязки на грубую сетку, учитывая формулы  $\sin(N - k)\pi x_{2i} = -\sin k\pi x_{2i}$ ,  $\sin(0,5\pi N x_{2i}) = 0$ , получаем, что разложение в ряд Фурье функции  $R_{l,p}$  имеет вид

$$R_{l,p} = \sum_{k=1}^{N/2-1} \sum_{m=1}^{N/2-1} \left( q_{\text{нев}}^{k,m} a_{k,m} - q_{\text{нев}}^{k,N-m} a_{k,N-m} - q_{\text{нев}}^{N-k,m} a_{N-k,m} + q_{\text{нев}}^{N-k,N-m} a_{N-k,N-m} \right) 2 \sin k\pi x_l \sin m\pi y_p, \quad (16)$$

где  $x_l = x_{2i}$ ;  $y_p = y_{2j}$ ;  $l = 1, \dots, N/2 - 1$ ;  $p = 1, \dots, N/2 - 1$ .

Решение  $\Delta_{l,p}$  уравнения для поправки на грубой сетке

$$\frac{\Delta_{l,p}}{\tau} - \frac{\Delta_{l+1,p} - \Delta_{l,p}}{H^2} + \frac{\Delta_{l,p} - \Delta_{l-1,p}}{H^2} - \frac{\Delta_{l,p+1} - \Delta_{l,p}}{H^2} + \frac{\Delta_{l,p} - \Delta_{l,p-1}}{H^2} = R_{l,p}, \quad (17)$$

$$\Delta_{0,p} = \Delta_{N/2,p} = 0; \quad \Delta_{l,0} = \Delta_{l,N/2} = 0,$$

где  $l = 1, \dots, N/2 - 1$ ;  $p = 1, \dots, N/2 - 1$ ;  $H = 2h$ , представим в виде ряда Фурье:

$$\Delta_{l,p} = \sum_{k=1}^{N/2-1} \sum_{m=1}^{N/2-1} \tilde{a}_{k,m} 2 \sin k\pi x_l \sin m\pi y_p. \quad (18)$$

Подставив (16) и (18) в (17), с учетом формулы суммы синусов углов после несложных преобразований получим

$$\Delta_{l,p} = \sum_{k=1}^{N/2-1} \sum_{m=1}^{N/2-1} Q_{\text{попр}}^{k,m} \left( q_{\text{нев}}^{k,m} a_{k,m} - q_{\text{нев}}^{k,N-m} a_{k,N-m} - q_{\text{нев}}^{N-k,m} a_{N-k,m} + q_{\text{нев}}^{N-k,N-m} a_{N-k,N-m} \right) 2 \sin k\pi x_l \sin m\pi y_p,$$

где

$$Q_{\text{попр}}^{k,m} = \frac{\tau}{1 + 0,5R(2 - q_k^2 - q_m^2)}. \quad (19)$$

Интерполируем  $\Delta_{l,p}$  на подробную сетку в два этапа. Сначала произведем интерполяцию на сетку  $\{(ih, pH), i = 1, \dots, N - 1, p = 1, \dots, N/2 - 1\}$  по формулам

$$\tilde{\Delta}_{i,p} = \begin{cases} \Delta_{l,p}, & l = \frac{i}{2} & \text{для } i - \text{четных;} \\ \frac{9}{16} (\Delta_{l,p} + \Delta_{l+1,p}) - \frac{1}{16} (\Delta_{l-1,p} + \Delta_{l+2,p}), & l = \frac{i-1}{2} & \text{для } i - \text{нечетных.} \end{cases} \quad (20)$$

Затем интерполируем  $\tilde{\Delta}_{i,p}$  на подробную сетку по формулам, аналогичным (20). Нетрудно показать, что в результате выполнения интерполяции таким способом получается интерполяция по формулам (6). Рассуждая аналогично [6] на каждом из двух этапов интерполяции, после несложных преобразований получаем, что разложение в ряд Фурье сеточной функции  $\delta_{i,j}$  имеет вид

$$\delta_{i,j} = \sum_{k \neq N/2} \sum_{m \neq N/2} \frac{(q'_k + 1)(q'_m + 1)}{4} Q_{\text{попр}}^{k,m} \left( q_{\text{нев}}^{k,m} a_{k,m} - q_{\text{нев}}^{k,N-m} a_{k,N-m} - \right. \\ \left. - q_{\text{нев}}^{N-k,m} a_{N-k,m} + q_{\text{нев}}^{N-k,N-m} a_{k,m} \right) 2 \sin k\pi x_i \sin m\pi y_j.$$

После выполнения пятого этапа, когда вычисления производятся по формулам (7), получим

$$u_{i,j} = \sum_{k \neq N/2} \sum_{m \neq N/2} (b_{k,m}^1 a_{k,m} + b_{k,m}^2 a_{k,N-m} + b_{k,m}^3 a_{N-k,m} - b_{k,m}^4 a_{N-k,N-m}) 2 \sin k\pi x_i \sin m\pi y_j + \\ + \sum_{m=1}^{N-1} q_{\text{сгл}}^{N/2,m} a_{N/2,m} 2 \sin \frac{N}{2} \pi x_i \sin m\pi y_j + \sum_{k \neq N/2} a_{k,N/2} q_{\text{сгл}}^{k,N/2} 2 \sin k\pi x_i \sin \frac{N}{2} \pi y_j, \quad (21)$$

где

$$b_{k,m}^1 = q_{\text{сгл}}^{k,m} - Q_{\text{попр}}^{k,m} 0,25(q'_k + 1)(q'_m + 1)q_{\text{нев}}^{k,m}; \quad b_{k,m}^2 = Q_{\text{попр}}^{k,m} 0,25(q'_k + 1)(q'_m + 1)q_{\text{нев}}^{k,N-m}; \\ b_{k,m}^3 = Q_{\text{попр}}^{k,m} 0,25(q'_k + 1)(q'_m + 1)q_{\text{нев}}^{N-k,m}; \quad b_{k,m}^4 = Q_{\text{попр}}^{k,m} 0,25(q'_k + 1)(q'_m + 1)q_{\text{нев}}^{N-k,N-m}; \quad (22)$$

$q_{\text{сгл}}^{k,m}$ ,  $q_{\text{нев}}^{k,m}$ ,  $Q_{\text{попр}}^{k,m}$  определены в (14), (15), (19),  $q_k$ ,  $q'_k$ ,  $R$  — в (9).

Итак, в формуле (21) приведено разложение в ряд Фурье решения, полученного предложенным методом на новом временном слое.

Подставим в уравнение (11) вместо  $(u_{i,j}^n)$  — решения модельной задачи на  $n$ -м слое с использованием неявной схемы на подробной сетке — сеточную функцию  $u_{i,j}^n$ , являющуюся решением модельной задачи с использованием предложенного метода. Разложение в ряд Фурье решения на  $(n+1)$ -м временном слое получившейся системы уравнений имеет вид

$$u_{i,j}^{\text{неяв}} = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} q_{k,m}^{\text{неяв}} a_{k,m} 2 \sin k\pi x_i \sin m\pi y_j, \quad (23)$$

где

$$q_{k,m}^{\text{неяв}} = 1 - \frac{\tau \lambda_{k,m}}{1 + \tau \lambda_{k,m}} = 1 - \frac{R(2 - q_k - q_m)}{1 + R(2 - q_k - q_m)}; \quad (24)$$

$\lambda_{k,m}$  — собственные значения разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате [7].

Сначала получим оценку  $\|u_{i,j} - u_{i,j}^{\text{неяв}}\|_{L_2}$ , где с учетом (21), (23)

$$u_{i,j} - u_{i,j}^{\text{неяв}} = \sum_{k \neq N/2} \sum_{m \neq N/2} (b_{k,m}^1 - q_{k,m}^{\text{неяв}}) a_{k,m} 2 \sin k\pi x_i \sin m\pi y_j + \\ + \sum_{k \neq N/2} \sum_{m \neq N/2} b_{k,m}^2 a_{k,N-m} 2 \sin k\pi x_i \sin m\pi y_j + \sum_{k \neq N/2} \sum_{m \neq N/2} b_{k,m}^3 a_{N-k,m} 2 \sin k\pi x_i \sin m\pi y_j + \\ + \sum_{k \neq N/2} \sum_{m \neq N/2} b_{k,m}^4 a_{N-k,N-m} 2 \sin k\pi x_i \sin m\pi y_j + \sum_{k \neq N/2} \left( q_{\text{сгл}}^{k,N/2} - q_{k,N/2}^{\text{неяв}} \right) a_{k,N/2} 2 \sin k\pi x_i \sin \frac{N}{2} \pi y_j + \\ + \sum_{m=1}^{N-1} \left( q_{\text{сгл}}^{N/2,m} - q_{N/2,m}^{\text{неяв}} \right) a_{N/2,m} 2 \sin \frac{N}{2} \pi x_i \sin m\pi y_j;$$

$b_{k,m}^1, b_{k,m}^2, b_{k,m}^3, b_{k,m}^4, q_{k,m}^{\text{неяв}}$  определены в (22), (24). Воспользуясь неравенством треугольника и равенством Парсеваля, после несложных преобразований получим

$$\|u_{i,j} - u_{i,j}^{\text{неяв}}\|_{L_2} \leq \|\varphi_{i,j}^1\|_{L_2} + \|\varphi_{i,j}^2\|_{L_2} + \|\varphi_{i,j}^3\|_{L_2} + \|\varphi_{i,j}^4\|_{L_2}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \|\varphi_{i,j}^1\|_{L_2}^2 &= \sum_{k \neq N/2} \sum_{m \neq N/2} (b_{k,m}^1 - q_{k,m}^{\text{неяв}})^2 (a_{k,m})^2; \\ \|\varphi_{i,j}^2\|_{L_2}^2 &= \sum_{k \neq N/2} \sum_{m \neq N/2} (b_{k,N-m}^2)^2 (a_{k,m})^2; \quad \|\varphi_{i,j}^3\|_{L_2}^2 = \sum_{k \neq N/2} \sum_{m \neq N/2} (b_{N-k,m}^3)^2 (a_{k,m})^2; \\ \|\varphi_{i,j}^4\|_{L_2}^2 &= \sum_{k \neq N/2} \sum_{m \neq N/2} (b_{N-k,N-m}^4)^2 (a_{k,m})^2 + \sum_{k \neq N/2} (q_{\text{сгл}}^{k,N/2} - q_{k,N/2}^{\text{неяв}})^2 (a_{k,N/2})^2 + \\ &+ \sum_{m=1}^{N-1} (q_{\text{сгл}}^{N/2,m} - q_{N/2,m}^{\text{неяв}})^2 (a_{N/2,m})^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть выполнены условия  $\tau = h^\beta$ , где  $0 < \beta < 2$ . Предположим, что существует  $2p$  ограниченных разностных производных сеточной функции  $u_{i,j}^n$  по обоим пространственным переменным.

Произведем оценку  $\|\varphi_{i,j}^1\|_{L_2}^2 = \sum_{k \neq N/2} \sum_{m \neq N/2} (b_{k,m}^1 - q_{k,m}^{\text{неяв}})^2 (a_{k,m})^2$ . Разобьем область изменения индексов  $k, m$  на 4 подобласти, как показано на рис. 1.

В подобласти  $\Omega_1$  выполнены неравенства  $k\pi h \ll 1; m\pi h \ll 1; k^2\pi^2\tau \ll 1; m^2\pi^2\tau \ll 1$ . Используя разложение в ряд Тейлора функций  $q_k, q'_k, 1/(1+x)$ , после преобразований, аналогичных приведенным в [6] для одномерной задачи, получим

$$(b_{k,m}^1 - q_{k,m}^{\text{неяв}})^2 \leq c_1 h^4 h^{4\beta(1-3\delta)}, \quad c_1 = (0,25\pi^6)^2 = \text{const}. \quad (27)$$

Учитывая неравенства  $0 < 1 - q_k < 2; 0 < 0,5(1 + q'_k) < 1; 0 < 1 + q'_k < 9(1 + q_k)/8$ , можно доказать, что в подобласти  $\Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$  верно неравенство

$$(b_{k,m}^1 - q_{k,m}^{\text{неяв}})^2 \leq 2,0625^2. \quad (28)$$

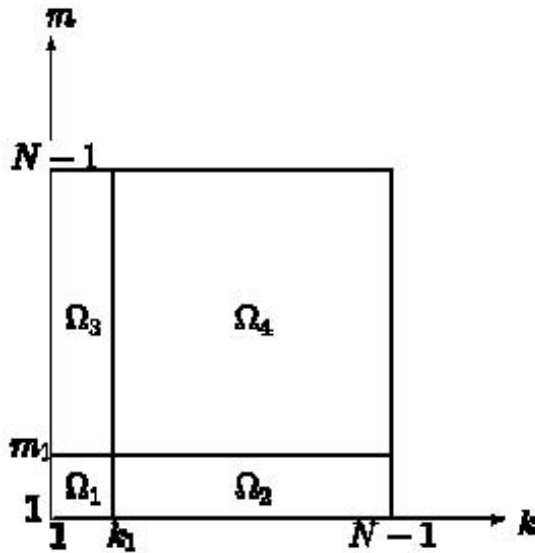


Рис. 1. Разбиение области изменения индексов  $k, m$  на подобласти;  $k_1 = m_1 = [N^{\beta\delta}]$  ( $[N^{\beta\delta}]$  — целая часть  $N^{\beta\delta}$ ),  $0 < \delta < 1/7$



Рассуждая аналогично [6], можно доказать следующее:

— в подобласти  $\Omega_1$

$$|a_{k,m}| \leq g_1 = \text{const}; \quad (29)$$

— в подобласти  $\Omega_2$

$$|a_{k,m}| \leq \frac{g_2}{k^{2p}}, \quad g_2 = \text{const}; \quad (30)$$

— в подобласти  $\Omega_3$

$$|a_{k,m}| \leq \frac{g_3}{m^{2p}}, \quad g_3 = \text{const}; \quad (31)$$

— в подобласти  $\Omega_4$  справедливы обе оценки (30), (31).

Пусть  $g_1, g_2, g_3$  не зависят от номера временного слоя. Представим  $\|\varphi_{i,j}^1\|_{L_2}^2$ , определенное в (26), в виде суммы четырех слагаемых, соответствующих изменению индексов суммирования в подобластях  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ :

$$\|\varphi_{i,j}^1\|_{L_2}^2 = A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_{(k,m) \in \Omega_1} (b_{k,m}^1 - q_{k,m}^{\text{неяв}})^2 (a_{k,m})^2; & A_{12} &= \sum_{\substack{(k,m) \in \Omega_2, \\ k \neq N/2}} (b_{k,m}^1 - q_{k,m}^{\text{неяв}})^2 (a_{k,m})^2; \\ A_{13} &= \sum_{\substack{(k,m) \in \Omega_3, \\ m \neq N/2}} (b_{k,m}^1 - q_{k,m}^{\text{неяв}})^2 (a_{k,m})^2; & A_{14} &= \sum_{\substack{(k,m) \in \Omega_4, \\ k \neq N/2, \\ m \neq N/2}} (b_{k,m}^1 - q_{k,m}^{\text{неяв}})^2 (a_{k,m})^2. \end{aligned}$$

Учитывая оценки (27)–(31) и количество слагаемых в каждой сумме, получаем

$$\begin{aligned} A_{11} &\leq A'_{11} = c_{11} h^4 h^{4\beta(1-3,5\delta)}; & A_{12} &\leq A'_{12} = c_{12} h^4 h^{4\beta\delta p - \beta\delta - 5}; \\ A_{13} &\leq A'_{13} = c_{13} h^4 h^{4\beta\delta p - \beta\delta - 5}; & A_{14} &\leq A'_{14} = c_{14} h^4 h^{4\beta\delta p - 6}, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $c_{1n} = \text{const}$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ . Как видно из (33), для достаточно больших  $2p$ , когда верно неравенство  $2p \cdot 2\beta\delta - 6 > 4\beta(1 - 3,5\delta)$ , справедливы равенства  $A'_{14} = o(A'_{11})$ ;  $A'_{12} = o(A'_{11})$ ;  $A'_{13} = o(A'_{11})$ . Из равенства (32) и неравенств (33) следует, что для достаточно больших  $2p$  верна оценка

$$\|\varphi_{i,j}^1\|_{L_2} \leq \bar{c}_1 h^2 h^{2\beta(1-3,5\delta)}, \quad \bar{c}_1 = \text{const}. \quad (34)$$

Произведем оценку остальных слагаемых в (25). Можно доказать, что в подобласти  $\Omega_1$

$$(b_{k,N-m}^2)^2 \leq c_2 h^4 h^{2(\beta+2-6\delta\beta)}; \quad (b_{N-k,m}^3)^2 \leq c_3 h^4 h^{2(\beta+2-6\delta\beta)}; \quad (b_{N-k,N-m}^4)^2 \leq c_4 h^4 h^{12+2\beta-20\beta\delta},$$

где  $c_2 = c_3 = \frac{9}{256} \pi^{12} = \text{const}$ ;  $c_4 = \left(\frac{9}{256}\right)^2 \pi^{20} = \text{const}$ . Оценим  $|b_{k,N-m}^2|$  при  $(k, m) \in \Omega \setminus \Omega_1$ .

Учитывая неравенства  $0 < 1 \pm q_k < 2$ ;  $0 < 0,5(1 + q'_k) < 1$ ;  $0 < 1 + q'_k < \frac{9}{8}(1 + q_k)$ , после несложных преобразований получаем

$$0 < b_{k,N-m}^2 \leq \frac{81}{128} (2 + F), \quad \text{где} \quad F = \frac{R(1 + q_k)^2(1 - q_m)}{2 + R(2 - q_k^2 - q_m^2)} > 0.$$

Не ограничивая общности, предположим, что  $N$  кратно 4. Рассмотрев  $F$  как функцию аргумента  $q_k$  при фиксированном  $-1 < q_m < 1$ , получим, что  $F$  монотонно возрастает с ростом  $q_k$ ,

где  $-1 < q_k < 1$ . Рассуждая аналогично, получим, что при фиксированном  $-1 < q_k < 1$   $F$  монотонно убывает с ростом  $q_m$ , где  $-1 < q_m < 1$ . Следовательно, в подобласти  $\Omega \setminus \Omega_5$ , где  $\Omega_5 = \{(k, m) : 1 \leq k < 0,25N; 0,75N < m \leq N - 1\}$

$$F \leq \max \left( \frac{R(1+q_1)^2(1-q_{0,75N})}{2+R(2-q_1^2-q_{0,75N}^2)}, \frac{R(1+q_{0,25N})^2(1-q_{N-1})}{2+R(2-q_{0,25N}^2-q_{N-1}^2)} \right) < 14$$

и, значит,  $|b_{k,N-m}^2| \leq 10\frac{1}{8}$ , если  $(k, m) \in \Omega \setminus \Omega_5$ .

В подобласти  $\Omega_5$   $F \leq \frac{R(1+q_1)^2(1-q_{N-1})}{2+R(2-q_1^2-q_{N-1}^2)}$ . Используя разложение в ряд Тейлора функции  $q_1$  и учитывая, что,  $q_{N-1} = -q_1$ , после несложных преобразований получаем, что  $F \leq 4R$ . Учитывая, что  $R > 2$  при условии  $\tau = h^\beta$ ,  $0 < \beta < 2$ , имеем

$$|b_{k,N-m}^2| \leq 3,165R, \quad \text{если } (k, m) \in \Omega_5.$$

Аналогично доказывается, что

$$|b_{N-k,m}^3| \leq 3,165R, \quad \text{если } (k, m) \in \Omega_6 = \{(k, m) : 0,75N < k \leq N - 1; 1 \leq m < 0,25N\};$$

$$|b_{N-k,m}^3| \leq 10\frac{1}{8}, \quad \text{если } (k, m) \in \Omega \setminus \Omega_6;$$

$$|b_{N-k,N-m}^4| < \frac{17}{16}; \quad |q_{\text{сгл}}^{k,N/2} - q_{k,N/2}^{\text{неяв}}| \leq 2,25; \quad |q_{\text{сгл}}^{N/2,m} - q_{N/2,m}^{\text{неяв}}| \leq 2,25.$$

Аналогично неравенству (34) доказывается, что для достаточно больших  $2p$  верно

$$\|\varphi_{i,j}^2\|_{L_2} \leq \bar{c}_2 h^2 h^{2+\beta-7\beta\delta}; \quad \|\varphi_{i,j}^3\|_{L_2} \leq \bar{c}_3 h^2 h^{2+\beta-7\beta\delta}; \quad \|\varphi_{i,j}^4\|_{L_2} \leq \bar{c}_4 h^2 h^{6+\beta-11\beta\delta},$$

где  $\bar{c}_n = \text{const}$ ,  $n = 2, 3, 4$ . Учитывая неравенство (25), а также неравенства  $2 + \beta - 7\beta\delta > 2\beta - 7\beta\delta$ ,  $6 + \beta - 11\beta\delta > 2\beta - 7\beta\delta$ , получаем, что для достаточно больших  $2p$

$$\|u_{i,j} - u_{i,j}^{\text{неяв}}\| \leq \bar{c} h^2 h^{2\beta(1-3,5\delta)} = \bar{c} h^2 \tau \tau^{1-7\delta}, \quad \bar{c} = \text{const}. \quad (35)$$

Теперь получим оценку  $\|u_{i,j} - u_{i,j}^{\text{H}}\|_{L_2}$ , где  $u_{i,j}^{\text{H}}$  — решение модельной задачи по неявной схеме (11). Используя формулу (23), разложение в ряд Фурье функции  $u_{i,j}^{\text{H}}$ :

$$u_{i,j}^{\text{H}} = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} q_{k,m}^{\text{неяв}} b_{k,m} 2 \sin k\pi x_i \sin m\pi y_j,$$

где  $b_{k,m}$  — коэффициенты Фурье функции  $(u_{i,j}^{\text{H}})^n$  — решения модельной задачи на  $n$ -м слое с использованием неявной схемы на подробной сетке, и учитывая, что  $|q_{k,m}^{\text{неяв}}| \leq 1$ , можно доказать, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|u_{i,j}^{n+1} - (u_{i,j}^{\text{H}})^{n+1}\|_{L_2} &\leq \|u_{i,j}^{n+1} - (u_{i,j}^{\text{неяв}})^{n+1}\|_{L_2} + \|(u_{i,j}^{\text{неяв}})^{n+1} - (u_{i,j}^{\text{H}})^{n+1}\|_{L_2} \leq \\ &\leq \|u_{i,j}^{n+1} - (u_{i,j}^{\text{неяв}})^{n+1}\|_{L_2} + \|u_{i,j}^n - (u_{i,j}^{\text{H}})^n\|_{L_2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Пусть  $n = 0$ . Тогда  $u_{i,j}^n = u_{i,j}^0 = (T_0)_{i,j}$  и, следовательно,  $u_{i,j}^{\text{H}} = u_{i,j}^{\text{неяв}}$ ;  $\|u_{i,j} - u_{i,j}^{\text{H}}\| \leq \bar{c} h^2 \tau \tau^{1-7\delta}$ .

Используя метод математической индукции и учитывая неравенства (35), (36), можно доказать, что на  $(n+1)$ -м временном слое для достаточно больших  $2p$  справедливо неравенство  $\|u_{i,j} - u_{i,j}^{\text{H}}\|_{L_2} \leq \bar{c}(n+1)\tau h^2 \tau^{1-7\delta}$  и, следовательно, верно неравенство

$$\|u_{i,j} - u_{i,j}^{\text{H}}\|_{L_2} \leq c h^2 \tau^{1-7\delta}, \quad (37)$$

где  $c = \text{const}$ . Итак, доказана

**Лемма.** Пусть  $u_{i,j}^n$  — решение модельной задачи предложенным методом на  $n$ -м временном слое — имеет любое число ограниченных разностных производных по обоим пространственным направлениям для любого  $n$ . Предположим, что  $\tau = h^\beta$ , где  $0 < \beta < 2$ . Тогда справедливо неравенство (37), где  $0 < \delta < 1/7$  — произвольное вещественное число.

Неравенство (37) представляет собой оценку отклонения решения модельной задачи, полученного с помощью предложенного метода, от решения этой задачи на подробной сетке с использованием неявной схемы.

Теперь получим оценку  $\|u_{i,j}^T - u_{i,j}^{n+1}\|_{L_2}$  точности решения модельной задачи с помощью предложенного метода, где  $u_{i,j}^T$  — проекция точного решения модельной задачи на подробную сетку.

Используя неравенство треугольника  $\|u_{i,j}^T - u_{i,j}^{n+1}\|_{L_2} \leq \|u_{i,j}^T - u_{i,j}^H\|_{L_2} + \|u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^H\|_{L_2}$  и учитывая, что [1]

$$\|u_{i,j}^T - u_{i,j}^H\|_{L_2} = O(\tau + h^2), \quad (38)$$

получаем

$$\|u_{i,j}^T - u_{i,j}^{n+1}\|_{L_2} = O(\tau + h^2),$$

так как  $ch^2\tau^{(1-\delta)} = o(\tau + h^2)$  при  $0 < \delta < 1/7$ ,  $0 < \beta < 2$ . Заметим, что, как видно из (37), (38), при  $h \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\|u_{i,j} - u_{i,j}^H\|_{L_2} \rightarrow 0$  быстрее, чем  $\|u_{i,j}^T - u_{i,j}^H\|_{L_2} \rightarrow 0$ .

Таким образом, для модельной двумерной задачи доказано, что предложенный метод позволяет получить гладкое решение с тем же порядком точности, что по чисто неявной схеме на подробной сетке, причем очень близкое к решению по чисто неявной схеме на подробной сетке.

### Результаты численных экспериментов

Тестирование предложенного метода производилось с помощью расчетов девяти модельных задач.

*Задача 1.* Решалось одномерное уравнение теплопроводности с единичными коэффициентами и граничными условиями первого рода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 1; \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где  $T = 0,0679$ . До перехода на сетку второго уровня делалась одна сглаживающая итерация, при решении системы уравнений для поправки использовался метод прогонки [1, 7]. Задача имеет точное решение  $u^T(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ . В табл. 1 указано в процентах максимальное отклонение от точного решения задачи, причем  $K = \tau/h^2$ . Результаты расчетов подтверждают устойчивость и точность метода.

Таблица 1

Значения  $\max_{x,t} \left| \frac{u^T(x_i, t) - u(x_i, t)}{u^T(x_i, t)} \right|$ , полученные при решении задачи 1

| K     | N     |         |        |
|-------|-------|---------|--------|
|       | 100   | 500     | 1 000  |
| 1     | 0,039 | 0,00159 | 0,0005 |
| 10    | 0,34  | 0,0139  | 0,0036 |
| 100   | 3,25  | 0,136   | 0,034  |
| 1 000 | —     | 1,3     | 0,34   |

Задача 2. Решалась двумерная модельная задача, имеющая точное решение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x < 1, & \quad 0 < y < 1, & \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, y, 0) &= \sin(\pi x) \sin(\pi y), & 0 \leq x \leq 1, & \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u(0, y, t) &= 0, \quad u(1, y, t) = 0, & 0 \leq y \leq 1, & \quad 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0, t) &= 0, \quad u(x, 1, t) = 0, & 0 \leq x \leq 1, & \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

До перехода на сетку второго уровня делалась одна сглаживающая итерация, причем  $\sigma = 0,5$ . При решении системы уравнений для поправки использовался метод Зейделя [1, 7]. Предполагалось, что  $h_x = h_y = 1/N$ .

В табл. 2 указаны максимальные отклонения от точного решения задачи:  $M1 = \max_{i,j,t} |u_{i,j}^T - u_{i,j}|$  и  $M2 = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j}^T - u_{i,j}}{u_{i,j}^T} \right|$ , где  $u_{i,j}^T = e^{-2\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ ,  $t \in (0, 0,199]$ .

Результаты расчетов подтверждают устойчивость и точность метода.

В табл. 3 сравниваются максимальные значения абсолютной и относительной погрешностей решения задачи 2 с помощью предложенного алгоритма и с использованием неявной схемы для уравнения теплопроводности на подробной сетке. Как видно из табл. 3, эти числа очень мало отличаются друг от друга.

Таблица 2

Значения  $M1 = \max_{i,j,t} |u_{i,j}^T - u_{i,j}|$  и  $M2 = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j}^T - u_{i,j}}{u_{i,j}^T} \right|$ , полученные при решении задачи 2

| K    | N                      |                        |                        |                        |                        |                        |                        |                        |
|------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|      | 50                     |                        | 100                    |                        | 200                    |                        | 500                    |                        |
|      | M1                     | M2                     | M1                     | M2                     | M1                     | M2                     | M1                     | M2                     |
| 1    | $3,3888 \cdot 10^{-4}$ | $1,757 \cdot 10^{-2}$  | $8,405 \cdot 10^{-5}$  | $4,3563 \cdot 10^{-3}$ | $2,0971 \cdot 10^{-5}$ | $1,0868 \cdot 10^{-3}$ | —                      | —                      |
| 5    | $1,5687 \cdot 10^{-3}$ | $8,1337 \cdot 10^{-2}$ | $3,8644 \cdot 10^{-4}$ | $2,0029 \cdot 10^{-2}$ | $9,6259 \cdot 10^{-5}$ | $4,988 \cdot 10^{-3}$  | —                      | —                      |
| 10   | $3,1400 \cdot 10^{-3}$ | 0,1628                 | $7,6655 \cdot 10^{-4}$ | $3,9730 \cdot 10^{-2}$ | $1,9050 \cdot 10^{-4}$ | $9,8720 \cdot 10^{-3}$ | $3,0429 \cdot 10^{-5}$ | $1,5769 \cdot 10^{-3}$ |
| 20   | $6,3890 \cdot 10^{-3}$ | 0,3312                 | $1,5338 \cdot 10^{-3}$ | $7,9495 \cdot 10^{-2}$ | $3,7943 \cdot 10^{-4}$ | $1,9662 \cdot 10^{-2}$ | —                      | —                      |
| 100  | $3,5746 \cdot 10^{-2}$ | 1,8534                 | $7,9761 \cdot 10^{-3}$ | 0,4134                 | $1,9116 \cdot 10^{-3}$ | $9,9070 \cdot 10^{-2}$ | $3,0186 \cdot 10^{-4}$ | $1,5644 \cdot 10^{-2}$ |
| 1000 | —                      | —                      | $9,3930 \cdot 10^{-2}$ | 4,868                  | $2,1120 \cdot 10^{-2}$ | 1,0948                 | $3,081 \cdot 10^{-3}$  | 0,1596                 |

Таблица 3

Значения  $M1 = \max_{i,j,t} |u_{i,j}^T - u_{i,j}|$ ,  $M2 = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j}^T - u_{i,j}}{u_{i,j}^T} \right|$  и  $M1^H = \max_{i,j,t} |u_{i,j}^T - u_{i,j}^H|$ ,  $M2^H = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j}^T - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^T} \right|$ , полученные при решении задачи 2

| K    | Предложенный алгоритм,<br>N = 100 |                        | Неявная схема,<br>N = 100 |                         |
|------|-----------------------------------|------------------------|---------------------------|-------------------------|
|      | M1                                | M2                     | M1 <sup>H</sup>           | M2 <sup>H</sup>         |
| 1    | $8,405 \cdot 10^{-5}$             | $4,3563 \cdot 10^{-3}$ | $8,3891 \cdot 10^{-5}$    | $4,3480 \cdot 10^{-3}$  |
| 5    | $3,8644 \cdot 10^{-4}$            | $2,0029 \cdot 10^{-2}$ | $3,88581 \cdot 10^{-4}$   | $1,9997 \cdot 10^{-2}$  |
| 10   | $7,6655 \cdot 10^{-4}$            | $3,9730 \cdot 10^{-2}$ | $7,6532 \cdot 10^{-4}$    | $3,9666 \cdot 10^{-2}$  |
| 20   | $1,5338 \cdot 10^{-3}$            | $7,9495 \cdot 10^{-2}$ | $1,5312 \cdot 10^{-3}$    | $7,93628 \cdot 10^{-2}$ |
| 100  | $7,9761 \cdot 10^{-3}$            | 0,4134                 | $7,947 \cdot 10^{-3}$     | 0,41243                 |
| 1000 | $9,3930 \cdot 10^{-2}$            | 4,868                  | $9,3786 \cdot 10^{-2}$    | 4,86095                 |

Задачи 3–7. Пусть требуется решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \varkappa \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \varkappa \frac{\partial u}{\partial y}, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, y, 0) &= 1 + x + y, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u(0, y, t) &= 1 + y, \quad u(1, y, t) = 2 + y, & 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0, t) &= 1 + x, \quad u(x, 1, t) = 2 + x, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (39)$$

где коэффициент теплопроводности  $\varkappa(x, y)$  определен ниже. При численном решении задачи (39) аппроксимация коэффициента теплопроводности осуществлялась в узлах сетки. В разностных схемах на подробной и грубой сетках использовалась полусумма значений в ближайших узлах. Расчеты проводились по вышеописанному двухсеточному алгоритму. До перехода на сетку второго уровня делались одна, две и три сглаживающих итерации при  $\sigma = 0,5$ ; при решении системы уравнений для поправки использовался метод МСССГ(0) (модифицированного неполного разложения Холецкого сопряженных градиентов без заполнения) [8]. Производилось сравнение решения, полученного с помощью предложенного метода, с решением по неявной схеме на подробной сетке.

В задачах 3, 4, определенных в (39), коэффициент теплопроводности разрывный, причем имеется скачок:

— в задаче 3

$$\varkappa = \begin{cases} 100 & \text{при } x \in (0,25, 0,75), \quad y \in (0,25, 0,75); \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

— в задаче 4

$$\varkappa = \begin{cases} 100 & \text{при } x \in [0,25, 0,75], \quad y \in [0,25, 0,75]; \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что, если аппроксимацию коэффициента теплопроводности в узлах грубой сетки осуществлять по формуле

$$\varkappa'_{l,m} = \varkappa(x_l, y_m), \quad \text{где } x_l = lH, \quad y_m = mH,$$

то в случае, если точка разрыва коэффициента теплопроводности попадает в узел с нечетными номерами  $i$  и  $j$  на подробной сетке, при использовании одной сглаживающей итерации может произойти потеря устойчивости метода. Для сохранения устойчивости метода и получения хорошей точности необходимо осуществить несколько сглаживающих итераций [9].

Будем вычислять коэффициент теплопроводности в узлах грубой сетки по формуле

$$\begin{aligned} \varkappa'_{l,m} &= \frac{1}{4} \left[ \varkappa_{i,j} + \frac{1}{2} (\varkappa_{i+1,j} + \varkappa_{i,j-1} + \varkappa_{i-1,j} + \varkappa_{i,j+1}) + \frac{1}{4} (\varkappa_{i+1,j+1} + \varkappa_{i-1,j+1} + \varkappa_{i+1,j-1} + \varkappa_{i-1,j-1}) \right], \\ i &= 2l, \quad j = 2m. \end{aligned} \quad (40)$$

В табл. 4 приводятся значения  $M3 = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  при  $0 < t \leq 0,199$ ,  $n \geq 2$  и  $M3' = \max_{i,j} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  в момент времени  $t = 0,199$ , полученные при решении задачи 4.

Как видно из табл. 4, более аккуратный учет значений коэффициента теплопроводности приводит к тому, что для сохранения устойчивости метода при решении задачи 4 достаточно одной сглаживающей итерации, а для получения хорошей точности требуются одна—две сглаживающие итерации. Аналогичные результаты получены для задачи 3.

Таблица 4

Значения  $M3 = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  и  $M3' = \max_{i,j} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  при  $t = 0,199$ , полученные при решении задачи 4 с использованием аппроксимации  $\varkappa$  по формуле (40)

| K    | N = 100 |       |                       | N = 200 |       |                        | N = 500 |       |                        |
|------|---------|-------|-----------------------|---------|-------|------------------------|---------|-------|------------------------|
|      | M3      |       | M3'                   | M3      |       | M3'                    | M3      |       | M3'                    |
|      | s = 1   | s = 2 | s = 1                 | s = 1   | s = 2 | s = 1                  | s = 1   | s = 2 | s = 1                  |
| 10   | 0,061   | 0,038 | $0,143 \cdot 10^{-9}$ | 0,092   | 0,06  | $0,164 \cdot 10^{-12}$ | —       | —     | —                      |
| 100  | 0,048   | 0,019 | $0,189 \cdot 10^{-2}$ | 0,077   | 0,033 | $0,128 \cdot 10^{-3}$  | 0,045   | 0,026 | $0,247 \cdot 10^{-12}$ |
| 1000 | —       | —     | 0,0492                | 0,035   | 0,025 | $0,397 \cdot 10^{-2}$  | 0,037   | 0,013 | $0,184 \cdot 10^{-04}$ |

В модельных задачах 5–7 коэффициент теплопроводности задавался по следующим формулам:

— в задаче 5

$$\varkappa = \begin{cases} 100 & \text{при } (x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 < \frac{1}{16}; \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

— в задаче 6

$$\varkappa = \begin{cases} 100 (1 + 0,3 \sin 10\pi y \sin 10\pi x) & \text{при } (x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 < \frac{1}{16}; \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

— в задаче 7

$$\varkappa = \begin{cases} 100 (1 + 0,3 \sin 10\pi x) & \text{при } (x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 < \frac{1}{16}; \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аппроксимация коэффициента теплопроводности при расчетах на грубой сетке осуществлялась в узлах сетки по формуле (40).

В табл. 5–7 приведены значения  $M3 = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  при  $0 < t \leq 0,199$ ,  $n \geq 2$  и  $M3' = \max_{i,j} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  в момент времени  $t = 0,199$ , полученные при решении задач 5–7.

Таблица 5

Значения  $M3 = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  и  $M3' = \max_{i,j} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  при  $t = 0,199$ , полученные при решении задачи 5

| K   | N = 100 |       |                       | N = 200 |       |                        | N = 500 |       |                        |
|-----|---------|-------|-----------------------|---------|-------|------------------------|---------|-------|------------------------|
|     | M3      |       | M3'                   | M3      |       | M3'                    | M3      |       | M3'                    |
|     | s = 1   | s = 2 | s = 1                 | s = 1   | s = 2 | s = 1                  | s = 1   | s = 2 | s = 1                  |
| 10  | 0,045   | 0,031 | $0,96 \cdot 10^{-9}$  | 0,03    | 0,021 | $0,245 \cdot 10^{-10}$ | —       | —     | —                      |
| 50  | 0,026   | 0,014 | $0,62 \cdot 10^{-5}$  | 0,021   | 0,011 | $0,169 \cdot 10^{-8}$  | —       | —     | —                      |
| 100 | 0,02    | 0,007 | $0,265 \cdot 10^{-3}$ | 0,016   | 0,007 | $0,129 \cdot 10^{-6}$  | 0,028   | 0,015 | $0,333 \cdot 10^{-10}$ |

Таблица 6

Значения  $M3 = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  и  $M3' = \max_{i,j} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  при  $t = 0,199$ , полученные при решении задачи 6

| K   | N = 100 |       |                       | N = 200 |       |                        | N = 500 |       |                        |
|-----|---------|-------|-----------------------|---------|-------|------------------------|---------|-------|------------------------|
|     | M3      |       | M3'                   | M3      |       | M3'                    | M3      |       | M3'                    |
|     | s = 1   | s = 2 | s = 1                 | s = 1   | s = 2 | s = 1                  | s = 1   | s = 2 | s = 1                  |
| 10  | 0,047   | 0,032 | $0,108 \cdot 10^{-8}$ | 0,03    | 0,022 | $0,259 \cdot 10^{-10}$ | —       | —     | —                      |
| 50  | 0,027   | 0,014 | $0,137 \cdot 10^{-4}$ | 0,022   | 0,011 | $0,203 \cdot 10^{-8}$  | —       | —     | —                      |
| 100 | 0,021   | 0,009 | $0,313 \cdot 10^{-3}$ | 0,017   | 0,007 | $0,170 \cdot 10^{-6}$  | 0,029   | 0,016 | $0,353 \cdot 10^{-10}$ |

Таблица 7

Значения  $M3 = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  и  $M3' = \max_{i,j} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  при  $t = 0,199$ , полученные при решении задачи 7

| K   | N = 100 |       |                       | N = 200 |       |                       | N = 500 |       |                       |
|-----|---------|-------|-----------------------|---------|-------|-----------------------|---------|-------|-----------------------|
|     | M3      |       | M3'                   | M3      |       | M3'                   | M3      |       | M3'                   |
|     | s = 1   | s = 2 | s = 1                 | s = 1   | s = 2 | s = 1                 | s = 1   | s = 2 | s = 1                 |
| 10  | 0,044   | 0,030 | $0,495 \cdot 10^{-6}$ | 0,03    | 0,021 | $0,122 \cdot 10^{-4}$ | —       | —     | —                     |
| 50  | 0,031   | 0,015 | $0,137 \cdot 10^{-4}$ | 0,024   | 0,016 | $0,304 \cdot 10^{-4}$ | —       | —     | —                     |
| 100 | 0,03    | 0,013 | $0,41 \cdot 10^{-2}$  | 0,016   | 0,007 | $0,126 \cdot 10^{-4}$ | 0,033   | 0,016 | $0,133 \cdot 10^{-4}$ |

Результаты расчетов задач с разрывными коэффициентами показали, что и в этом случае предложенный метод позволяет получать решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с хорошей точностью.

*Задачи 8, 9.* Для изучения влияния величины скачка коэффициента теплопроводности на точность предложенного метода проводились расчеты задачи (39) с небольшим скачком  $\varkappa$  и с непрерывным коэффициентом теплопроводности.

В задаче 8

$$\varkappa = \begin{cases} 1 + 0,3 \sin 10\pi x & \text{при } (x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2 < \frac{1}{16}; \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

в задаче 9

$$\varkappa = 1 + 0,3 \sin 10\pi x.$$

В табл. 8, 9 приведены значения  $M3 = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  при  $0 < t \leq 0,199$ ,  $n \geq 2$  и  $M3' = \max_{i,j} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  в момент времени  $t = 0,199$ , полученные при решении задач 8, 9 в случае, когда аппроксимация коэффициента теплопроводности в узлах грубой сетки осуществлялась по формуле (40).

Как видно из сравнения табл. 7—9, в случае непрерывного коэффициента  $\varkappa$ , а также разрывного  $\varkappa$  с небольшим скачком решения задачи (39), полученные предложенным методом, существенно меньше отличаются от решений по неявной схеме, чем в случае большого скачка коэффициента  $\varkappa$ .

Таблица 8

Значения  $M3 = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  и  $M3' = \max_{i,j} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  при  $t = 0,199$ , полученные при решении задачи 8 ( $s = 1$ )

| K   | N = 100  |                       | N = 200  |                       | N = 500   |                       |
|-----|----------|-----------------------|----------|-----------------------|-----------|-----------------------|
|     | M3       | M3'                   | M3       | M3'                   | M3        | M3'                   |
| 10  | 0,000313 | $0,213 \cdot 10^{-7}$ | 0,000197 | $0,207 \cdot 10^{-7}$ | —         | —                     |
| 100 | 0,000457 | $0,979 \cdot 10^{-6}$ | 0,000276 | $0,951 \cdot 10^{-7}$ | 0,0000898 | $0,102 \cdot 10^{-7}$ |

Таблица 9

Значения  $M3 = \max_{i,j,t} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  и  $M3' = \max_{i,j} \left| \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^H}{u_{i,j}^H} \right|$  при  $t = 0,199$ , полученные при решении задачи 9 ( $s = 1$ )

| K   | N = 100  |                       | N = 200   |                        | N = 500  |                       |
|-----|----------|-----------------------|-----------|------------------------|----------|-----------------------|
|     | M3       | M3'                   | M3        | M3'                    | M3       | M3'                   |
| 10  | 0,000243 | $0,416 \cdot 10^{-7}$ | 0,0000614 | $0,207 \cdot 10^{-7}$  | —        | —                     |
| 100 | 0,00029  | $0,898 \cdot 10^{-6}$ | 0,0000846 | $0,3781 \cdot 10^{-7}$ | 0,000024 | $0,188 \cdot 10^{-8}$ |

### Заключение

Итак, создан новый эффективный алгоритм решения уравнений диффузионного типа. На примере ряда модельных задач теоретически и численно показано, что предложенный метод обладает устойчивостью и точностью, присущими неявной схеме. Созданный новый алгоритм позволяет существенно уменьшить число арифметических операций на каждом временном слое по сравнению с использованием неявной схемы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00200).

### Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. <http://phys.spb.ru/Stud/Books/index.php>.
3. Федоренко Р. П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1961. Т. 1, № 5. С. 922—927.
4. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
6. Ладонкина М. Е, Милюкова О. Ю., Тишкин В. Ф. Один численный алгоритм для уравнений диффузионного типа на основе многосеточных методов // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 4, С. 71—89.
7. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. Gustafsson I. A class of first order factorization methods // BIT. 1978. Vol. 18. P. 142—156.
9. Ladonkina M. Ye., Milyukova O. Yu., Tishkin V. F. Application of the multigrid method for calculation diffusion processes // CD-Proc. of West-East Speed Flow Field Conference. November 19—22, 2007. Moscow, Russia. <http://wehsff.imamod.ru/>.

Статья поступила в редакцию 19.10.07.