

УДК 519.6

СРАВНЕНИЕ НА МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

А. И. Голубев, Н. А. Исмаилова, В. А. Терехин
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

На представительной двумерной модельной задаче проведено сравнение точного решения уравнений Максвелла с решениями упрощенных уравнений, возникающих в различных вариантах высокочастотного приближения. Сравнение показало, что для рассмотренной задачи учет производных по угловым переменным в уравнениях высокочастотного приближения существенно расширяет границы применимости этого приближения по времени.

Введение

В середине шестидесятых годов появилась классическая работа У. Карзаса и Р. Латтера [1], в которой впервые был описан механизм генерации электромагнитного импульса (ЭМИ) высотного ядерного взрыва (ВЯВ) (высота взрыва $H > 20$ км). Этот механизм основан на синфазном магнитотормозном излучении релятивистских электронов в магнитном поле Земли, возникающих при комптоновском рассеянии гамма-квантов, поглощающихся на высотах $H = 15 \div 30$ км. В работе [1] было предложено использовать при решении многомерной системы уравнений Максвелла высокочастотное приближение, которое основывалось на малости длительности импульса гамма-излучения по сравнению с пространственным масштабом изменения плотности атмосферы. Предложенный подход позволил оценить амплитудно-временные характеристики начальной фазы ЭМИ ВЯВ (компонента E_1).

Высокочастотное приближение для уравнений Максвелла широко используется при расчетах параметров компоненты E_1 ЭМИ ВЯВ, а также в других приложениях (см., например, [2–5]). При этом в уравнениях Максвелла оставляются только производные по радиусу (в сферической системе координат с центром в точке взрыва). Производные по угловым переменным θ и φ в уравнениях Максвелла в этой системе координат считаются малыми и ими пренебрегают.

В данной работе для представительной модельной задачи [6] приведены аналитические решения уравнений Максвелла и решения упрощенных уравнений, полученных в высокочастотном приближении с учетом и без учета производных по угловым переменным. Сравнение этих решений показало, что учет производных по угловым переменным в этом приближении крайне важен и может приводить даже к качественному изменению характера решения на поздней стадии развития компоненты E_1 ЭМИ ВЯВ.

Высокочастотное приближение для уравнений Максвелла

В сферической системе координат (r, θ, φ) с центром в точке взрыва и полярной осью, направленной перпендикулярно к поверхности земли, уравнения Максвелла имеют вид (используется гауссова система единиц):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial \tau} &= -\frac{4\pi}{c} j_r + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta \cdot H_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} \right); \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial (E_\theta - H_\varphi)}{\partial \tau} &= -\frac{4\pi}{c} j_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r}; \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial (E_\varphi + H_\theta)}{\partial \tau} &= -\frac{4\pi}{c} j_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\theta)}{\partial r}; \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial H_r}{\partial \tau} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial (\sin \theta \cdot E_\varphi)}{\partial \theta} \right); \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial (E_\varphi + H_\theta)}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}; \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial (H_\varphi - E_\theta)}{\partial \tau} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

В этих уравнениях E_α , H_α , j_α ($\alpha = r, \theta, \varphi$) — соответственно компоненты напряженностей электрического и магнитного полей и плотности тока заряженных частиц; c — скорость света в вакууме; $\tau = t - r/c$ — *задержанное* время.

Следуя [1], получим уравнения высокочастотного приближения. Интегрируя два последних уравнения системы (1) по τ , находим

$$r H_\varphi = r E_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\tau} E_r c d\tau - \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\tau} r E_\theta c d\tau; \tag{2}$$

$$r H_\theta = -r E_\varphi + \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\tau} r E_\varphi c d\tau - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{-\infty}^{\tau} E_r c d\tau. \tag{3}$$

Подставляя полученные выражения соответственно во второе и третье уравнения системы (1), получаем

$$\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) = -\frac{2\pi}{c} r j_\theta + \frac{1}{2} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} + \frac{1}{2 \sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \int_{-\infty}^{\tau} E_r c d\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_{-\infty}^{\tau} r E_\theta c d\tau; \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = -\frac{2\pi}{c} r j_\varphi + \frac{1}{2 \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} - \frac{1}{2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \int_{-\infty}^{\tau} E_r c d\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_{-\infty}^{\tau} r E_\varphi c d\tau. \tag{5}$$

В дальнейшем будем полагать, что пространственно-временное поведение электромагнитных полей в рассматриваемой задаче таково, что

$$\left| \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right| \gg \left| \frac{\partial}{\partial r} \right|,$$

поэтому будем пренебрегать в уравнениях Максвелла пространственными производными по сравнению с временными от тех же самых величин (высокочастотное приближение) [1]. Поскольку

$$r E_\alpha = \frac{\partial}{c \partial \tau} \int_{-\infty}^{\tau} r E_\alpha c d\tau \gg \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\tau} r E_\alpha c d\tau;$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r E_\alpha) = \frac{\partial^2}{c \partial \tau \partial r} \int_{-\infty}^{\tau} r E_\alpha c d\tau \gg \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_{-\infty}^{\tau} r E_\alpha c d\tau;$$

$$E_r = \frac{\partial}{c \partial \tau} \int_{-\infty}^{\tau} E_r c d\tau \gg \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\tau} E_r c d\tau,$$

где $\alpha = \theta, \varphi$, то уравнения (4), (5) для поперечных компонент электрического поля упрощаются до вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) &= -\frac{2\pi r}{c}j_\theta + \frac{1}{2}\frac{\partial E_r}{\partial \theta} + \frac{1}{2\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) &= -\frac{2\pi r}{c}j_\varphi + \frac{1}{2\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{2}\frac{\partial H_r}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (6)$$

а формулы (2), (3) для определения поперечных компонент магнитного поля будут следующими:

$$rH_\varphi = rE_\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\tau} E_r c d\tau; \quad rH_\theta = -rE_\varphi - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{-\infty}^{\tau} E_r c d\tau. \quad (7)$$

Выражения (6), (7) совместно с уравнениями для определения радиальных компонент генерируемого электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial \tau} &= -\frac{4\pi}{c}j_r + \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \cdot H_\varphi) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} \right); \\ \frac{1}{c} \frac{\partial H_r}{\partial \tau} &= \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \cdot E_\varphi) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

образуют полную трехмерную систему электродинамических уравнений в высокочастотном приближении, применимую для исследования параметров компоненты E_1 ЭМИ ВЯВ.

Рассмотрим вопрос о соленоидальных свойствах магнитного поля в высокочастотном приближении. В переменных (t, r, θ, φ) имеем

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 H_r + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} H_\theta \sin\theta + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_\varphi = 0.$$

После перехода от переменной t к $\tau = t - r/c$ будем иметь

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} H_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 H_r + \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} H_\theta \sin\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} H_\varphi \right) = 0.$$

Пренебрегая в этом соотношении производной компоненты H_r по переменной r по сравнению с производной H_r по переменной τ , получаем следующее условие соленоидальности магнитного поля в высокочастотном приближении:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial H_r}{\partial \tau} = \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} H_\theta \sin\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} H_\varphi \right).$$

Нетрудно проверить, что это соотношение является следствием уравнений (7) и второго уравнения из (8), т. е. условие соленоидальности в этом приближении выполнено.

Обычно при численном решении вместо уравнений (7) используются их следствия:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \tau} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_\theta}{\partial \tau} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta}; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial H_\theta}{\partial \tau} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \tau} - \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_r. \quad (9)$$

Сделаем следующее замечание по поводу полученных уравнений. Из уравнений (6) видно, что

$$\frac{\partial E_r}{\partial \theta} \sim \frac{\partial}{\partial r} r E_\theta; \quad \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \sim \frac{\partial}{\partial r} r E_\varphi.$$

Поэтому представляется естественным (хотя это напрямую не соответствует основному принципу, использованному при выводе уравнений высокочастотного приближения) в уравнениях (9) пренебречь производными E_r по угловым переменным по сравнению с остальными слагаемыми. Далее будет показано, что такой подход вполне оправдан.

Аналитическое решение модельной задачи

Получим с использованием уравнений (1) и уравнений высокочастотного приближения (6), (8), (9) аналитическое решение модельной задачи, аналогичной рассмотренной ранее в работе [6]. Предположим, следуя [6], что среда, в которой находится источник гамма-излучения, является непроводящей. Будем полагать, что в системе координат (r, θ, φ) все функции не зависят от φ , а плотность тока \vec{j} имеет вид

$$\vec{j} = (j_r, j_\theta, 0).$$

В этом случае при подходящих дополнительных условиях ненулевыми компонентами будут только E_r , E_θ — компоненты напряженности электрического поля и H_φ — компонента напряженности магнитного поля. Следуя [6], предположим, что $j_r = j_1(r, \tau) \cos \theta$; $j_\theta = j_2(r, \tau) \sin \theta$. Тогда решение уравнений Максвелла (1) можно находить в виде

$$E_r = E(r, \tau) \cos \theta; \quad E_\theta = e(r, \tau) \sin \theta; \quad H_\varphi = h(r, \tau) \sin \theta.$$

Для дальнейшего изложения удобно перейти к безразмерным переменным и функциям. Выберем в качестве единиц измерения следующие ($[a]$ означает единицу измерения величины a):

$$[\tau] = t_x; \quad [r] = r_x = ct_x; \quad [j] = \frac{h_x}{4\pi t_x}; \quad [E] = [e] = [h] = h_x.$$

С использованием этих единиц уравнения системы (1) для функций E , e , h приводятся к виду (за безразмерными величинами сохранены те же обозначения, что и за размерными)

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} + j_1 = \frac{2}{r}h; \tag{10}$$

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} + j_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r h + \frac{\partial h}{\partial \tau}; \tag{11}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = -\frac{1}{r}E - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r e + \frac{\partial e}{\partial \tau}. \tag{12}$$

Получим из системы (10)–(12) уравнение для функции $v = rh$. Из (11), (12) имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} r (e + h) + r j_2 + E = 0. \tag{13}$$

Из (10), (11) находим

$$E = - \int_0^\tau j_1 d\tau' + \frac{2}{r} \int_0^\tau h d\tau'; \quad r e = r h - \frac{\partial}{\partial r} r \int_0^\tau h d\tau' - \int_0^\tau r j_2 d\tau'.$$

Подставляя эти выражения в (13) и дифференцируя результирующее соотношение по τ , для функции v получаем уравнение

$$2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial r} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{2v}{r^2} \right) + j; \tag{14}$$

где

$$j = j_1 + \frac{\partial}{\partial r} r j_2 - \frac{\partial}{\partial \tau} r j_2.$$

Требуется определить решение этого уравнения, которое равно нулю при $\tau = 0$ и ограничено при $r \rightarrow 0$ и при $r \rightarrow \infty$. В работе [6] такое решение найдено для $j = f(r) \varphi(\tau)$ с функцией

$$f(r) = r e^{-\alpha r}. \tag{15}$$

Это решение имеет вид

$$v(r, \tau) = \Phi(\tau) f_0(r) + f_1(r) \frac{d\Phi}{d\tau}, \quad (16)$$

где

$$f_0(r) = \frac{1}{r} \left[1 - e^{-\alpha r} \left(1 + \alpha r + \frac{\alpha^2 r^2}{2} \right) \right]; \quad f_1(r) = 1 - e^{-\alpha r} (1 + \alpha r);$$

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^\tau (\tau - x) e^{-\alpha(\tau-x)/2} \varphi(x) dx. \quad (17)$$

Для рассматриваемого случая будем полагать, что

$$j_1 = \varphi(\tau) f(r); \quad j_2 = \varepsilon j_1,$$

где ε — некоторый параметр. Нетрудно убедиться, что при таком выборе j_1, j_2

$$j = \varphi_1(\tau) f(r) - \varphi_2(\tau) r f(r), \quad (18)$$

где

$$\varphi_1(\tau) = (1 + 2\varepsilon) \varphi; \quad \varphi_2(\tau) = \left(\alpha \varphi + \frac{d\varphi}{d\tau} \right) \varepsilon.$$

Очевидно, что решение уравнения (14) с функцией j (18) можно представить в виде

$$v(r, \tau) = v_1(r, \tau) - v_2(r, \tau),$$

где $v_1(r, \tau)$ определяются по формуле (16) с использованием в (17) функции $\varphi_1(x)$ вместо $\varphi(x)$. Поскольку для выбранной функции $f(r)$

$$r f(r) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} f(r), \quad (19)$$

можно воспользоваться этим обстоятельством и вычислить $v_2(r, \tau)$, исходя из выражения для $v_1(r, \tau)$, которое перепишем в виде

$$v_1(r, \tau) = \int_0^\tau \varphi_1(x) \Phi_1(\tau - x, r) dx.$$

Здесь

$$\Phi_1(\tau, r) = \frac{1}{2\alpha^2} \left[f_0(r) \tau + f_1(r) \left(1 - \frac{\alpha}{2} \tau \right) \right] e^{-\alpha\tau/2}.$$

Так как формула (19) имеет место для произвольной функции $\varphi_1(x)$, то вид функции $\Phi_1(\tau, r)$ полностью определяется функцией $f(r)$. Учитывая соотношение (19), получаем, что функция $v_2(r, \tau)$ может быть представлена в виде

$$v_2(r, \tau) = \int_0^\tau \varphi_2(x) \Phi_2(\tau - x, r) dx,$$

где

$$\Phi_2(\tau, r) = -\frac{\partial \Phi_1(\tau, r)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha^3} e^{-\alpha\tau/2} \left[r f_0(r) + \tau f_0(r) + \left(\frac{\alpha}{4} f_0(r) - \frac{\alpha^2}{8} f_1(r) \right) \tau^2 \right].$$

Таким образом, точное решение уравнения (14) с функцией j (18) определено. Получим теперь приближенные решения этого уравнения, используя различные варианты учета производной по θ в

уравнениях (6), (8), (9) (напомним, что в рассматриваемой задаче все функции не зависят от φ и $E_\varphi = 0$, $H_r = H_\theta = 0$).

Вариант 1. В уравнениях (6), (8), (9) пренебрегается всеми производными по θ . В этом случае для функции $v = rh$ получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} v = -\frac{r}{2} j_2,$$

решение которого $v_0(r, \tau)$ легко вычислить:

$$v_0(r, \tau) = -\frac{\varepsilon}{\alpha^3} \varphi(\tau) r f_0(r).$$

Вариант 2. Производной по θ пренебрегается только в уравнении (9). В этом случае для функции $v = rh$ получим уравнение

$$2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial r} = -\frac{2v}{r^2} + j_a,$$

в котором, в отличие от (18),

$$j_a = j_1(r, \tau) - \varepsilon \frac{d\varphi}{d\tau} r f(r).$$

Ограниченное решение этого уравнения несложно найти, используя преобразование Лапласа по τ ; это решение

$$v_a(r, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^r dx \int_0^\tau d\tau' j_a(x, \tau') J_0 \left(2 \sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r} \right) (\tau - \tau')} \right), \quad (20)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Вариант 3. В уравнениях (6), (8), (9) все производные по θ сохранены. В этом случае также можно написать одно уравнение для функции $v = rh$, однако авторам не удалось получить для него аналитическое решение. При численном решении удобно сохранить систему трех уравнений для функций E , v , $u = re$. Эта система имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} + j_1 = \frac{2}{r^2} v; \quad 2 \frac{\partial}{\partial r} u = -r j_2 - E; \quad \frac{\partial}{\partial \tau} (v - u) = -E. \quad (21)$$

При численном решении уравнений (21) использовалась полностью неявная схема бегущего счета. Шаги по переменным τ , r выбирались таким образом, чтобы при замене последнего уравнения в (21) на уравнение $u = v$ численное решение этих уравнений с необходимой для сравнений точностью совпадало с (20). В дальнейшем функция v , получаемая при решении уравнений (21), будет обозначаться через v_e .

Сравнение приближенных решений v_0 , v_a , v_e с точным решением v уравнений Максвелла проведем для функции [7]

$$\varphi(\tau) = \frac{(\gamma + \beta) \exp(\gamma(\tau - \tau_0))}{\beta + \gamma \exp((\gamma + \beta)(\tau - \tau_0))}$$

со следующими параметрами:

$$\gamma = 1,5 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}; \quad \beta = 3 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}; \quad \tau_0 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1};$$

значение параметра α в (15) положим равным $\alpha \approx 3,3 \text{ км}^{-1}$. Выбирая за единицу измерения τ $t_x = 10^{-6} \text{ с}$, получаем следующие значения параметров в формулах для плотности тока:

$$\alpha = 1; \quad \gamma = 150; \quad \beta = 30; \quad \tau_0 = 0,2.$$

Единица измерения h_x для компонент полей может быть выбрана произвольно; на нижеследующих рисунках приводятся безразмерные значения функций.

Прежде чем проводить сравнение различных решений, рассмотрим более детально точное решение $v(r, \tau)$. При значениях r таких, что $\alpha r \gg 1$ (т. е. вне зоны токов), $f_0(r) \approx 1/r$, $f_1(r) \approx 1$ и, следовательно,

$$\Phi_1(r, \tau) \approx \frac{1}{2\alpha^2} e^{-\alpha\tau/2} \left(1 - \frac{\alpha\tau}{2}\right); \quad \Phi_2(r, \tau) \approx \frac{1}{\alpha^3} e^{-\alpha\tau/2} \left(1 - \frac{\alpha^2\tau^2}{8}\right).$$

Это означает, что при $\alpha r \gg 1$ $v(r, \tau)$ слабо зависит от радиуса r . Поэтому, чтобы более полно сравнить точное и приближенные решения, выберем контрольные точки по r как в зоне токов ($\alpha r \sim 1$), так и вне ее ($\alpha r \gg 1$), а именно положим $\alpha r = 1; 2; 5; 10$.

На рис. 1–4 представлены зависимости $v(\tau)$ в контрольных точках по r , полученные при различных значениях параметра ε . Видно, что эти зависимости содержат две четко выраженные полуволны: узкую отрицательную и более широкую положительную; для наглядности на рис. 1, б–4, б отдельно показаны зависимости $v(\tau)$, соответствующие положительной полуволне. Как следует из представленных данных, амплитуда отрицательной полуволны меняется пропорционально ε , амплитуда положительной полуволны зависит от ε значительно слабее. Сравнение $v(\tau)$ на рис. 3, 4 показывает, что при $\alpha r > 5$ функция $v(r, \tau)$ слабо зависит от r , что уже пояснялось выше.

С учетом проведенного обсуждения при сравнении приближенных решений с точным ограничимся случаем $\varepsilon = 0,4$. На рис. 5–8 показаны полученные при этом значении ε зависимости $v(\tau)$, $v_0(\tau)$,

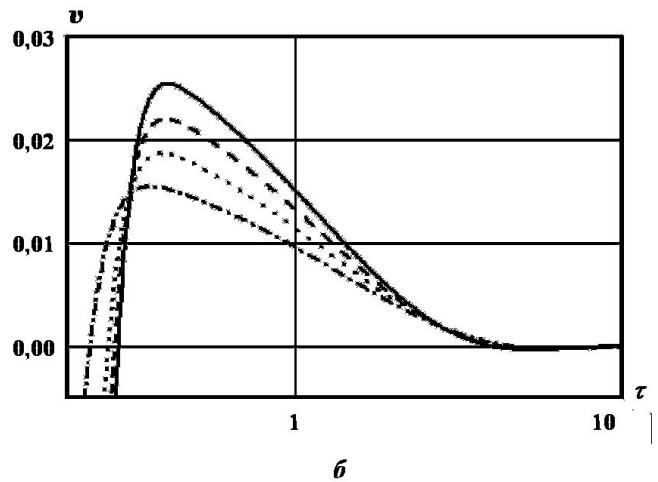
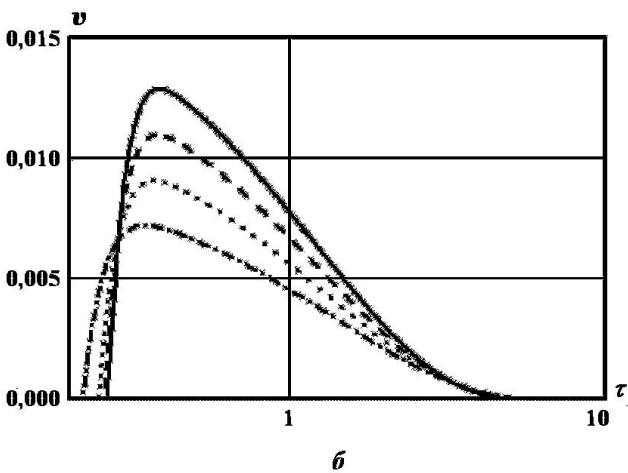
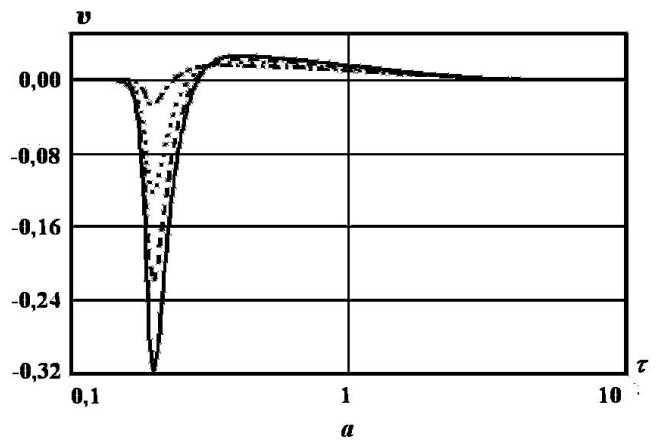
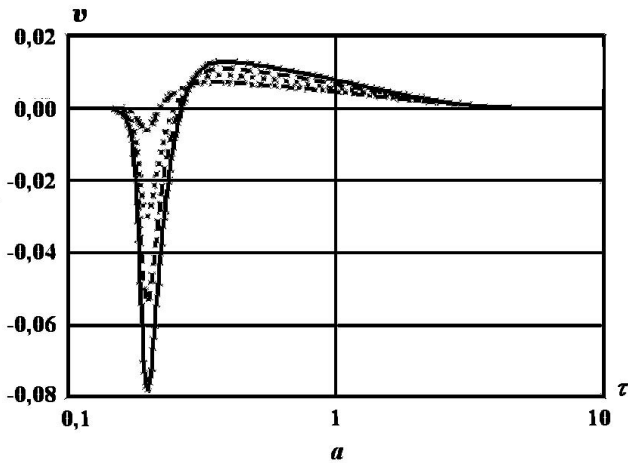


Рис. 1. Зависимости $v(\tau)$ при $\alpha r = 1$: а — общий вид; б — положительная полуволна; — — $\varepsilon = 1$; - - - - $\varepsilon = 0,7$; ····· $\varepsilon = 0,4$; - · - · - $\varepsilon = 0,1$

Рис. 2. Зависимости $v(\tau)$ при $\alpha r = 2$: а — общий вид; б — положительная полуволна; — — $\varepsilon = 1$; - - - - $\varepsilon = 0,7$; ····· $\varepsilon = 0,4$; - · - · - $\varepsilon = 0,1$

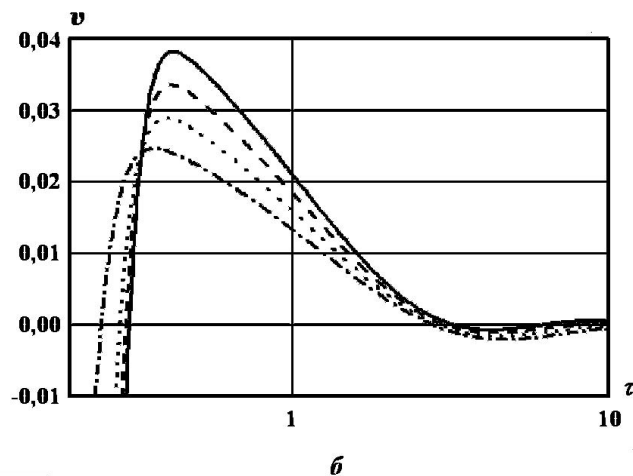
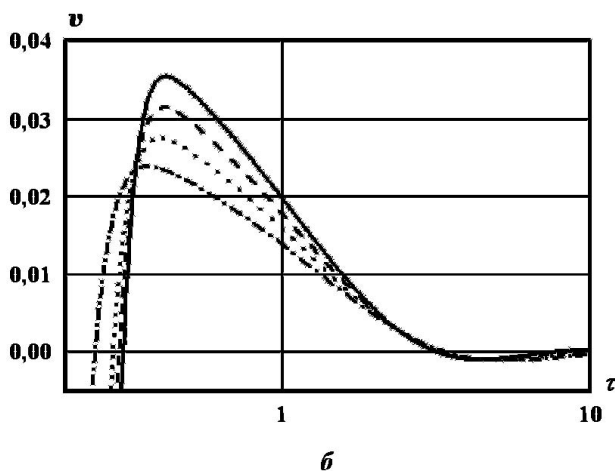
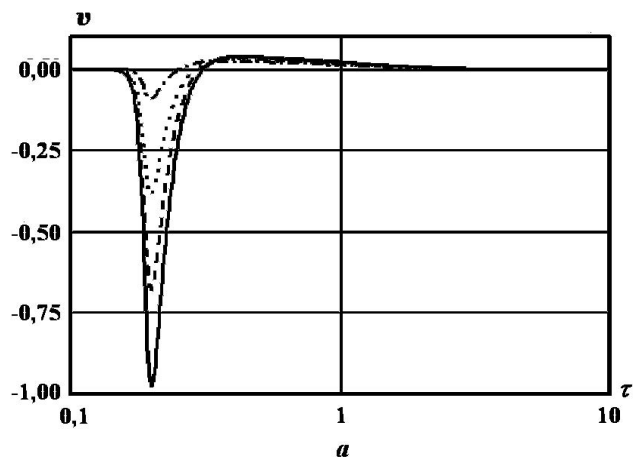
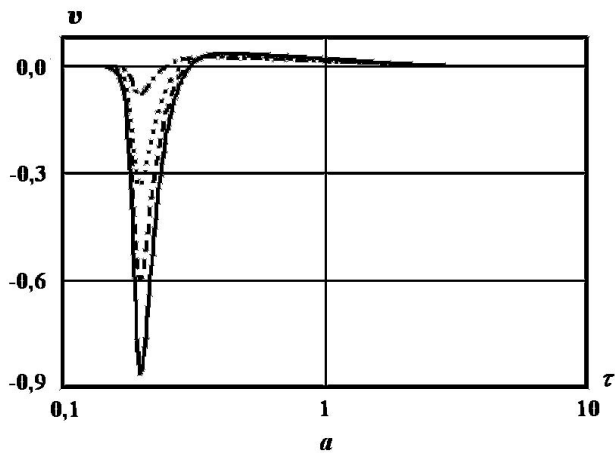


Рис. 3. Зависимости $v(\tau)$ при $\alpha r = 5$: а — общий вид; б — положительная полуволна; — — $\varepsilon = 1$; - - - $\varepsilon = 0,7$; \cdots — $\varepsilon = 0,4$; - · - · - $\varepsilon = 0,1$

Рис. 4. Зависимости $v(\tau)$ при $\alpha r = 10$: а — общий вид; б — положительная полуволна; — — $\varepsilon = 1$; - - - $\varepsilon = 0,7$; \cdots — $\varepsilon = 0,4$; - · - · - $\varepsilon = 0,1$

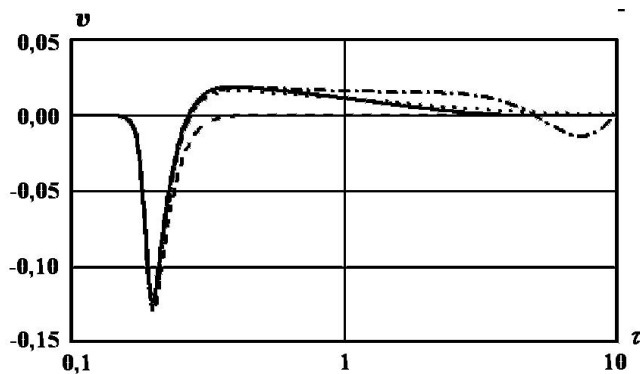
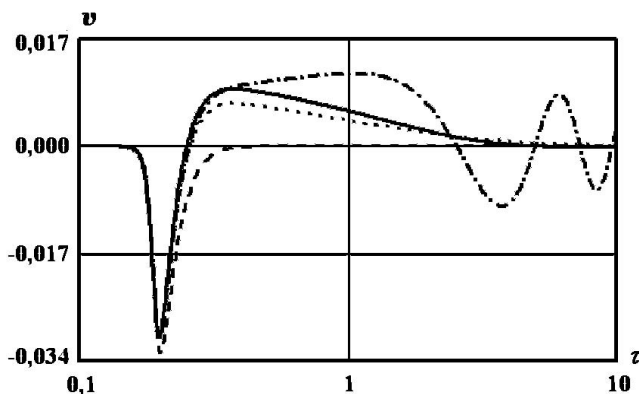


Рис. 5. Точное и приближенные решения при $\alpha r = 1$: — — $v(\tau)$; - - - $v_0(\tau)$; \cdots — $v_a(\tau)$; - · - · - $v_e(\tau)$

Рис. 6. Точное и приближенные решения при $\alpha r = 2$: — — $v(\tau)$; - - - $v_0(\tau)$; \cdots — $v_a(\tau)$; - · - · - $v_e(\tau)$

$v_a(\tau)$, $v_e(\tau)$ в контрольных точках $\alpha r = 1, 2, 5, 10$ соответственно. Для большей наглядности на рис. 7,б, 8,б вынесены зависимости, соответствующие положительной полуволне при $\alpha r = 5, 10$.

Из представленных данных следует, что во всех вариантах высокочастотного приближения отрицательная полуволна хорошо согласуется с точным решением. Отметим, что временная ширина

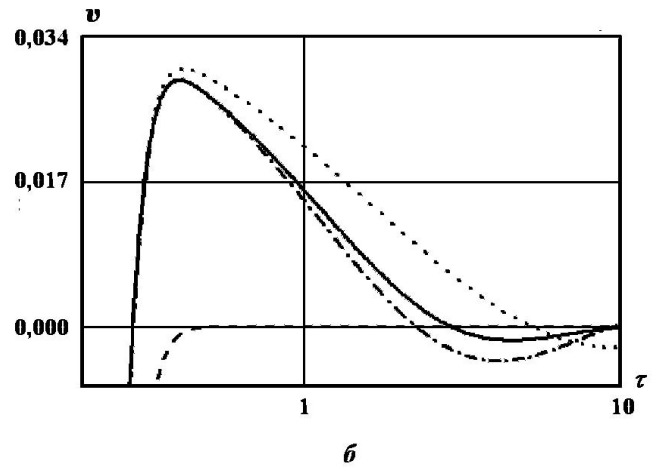
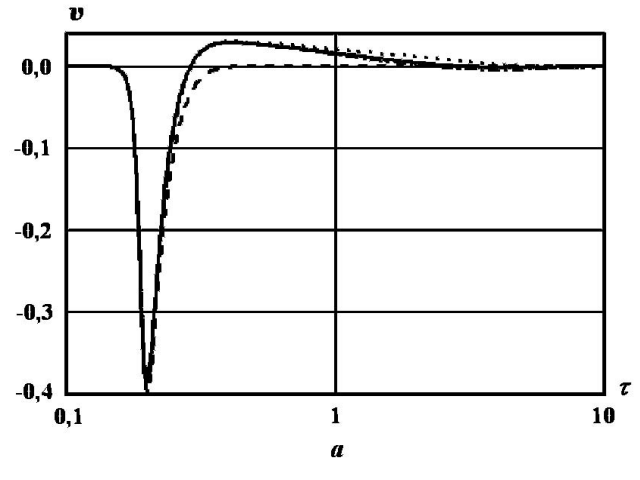
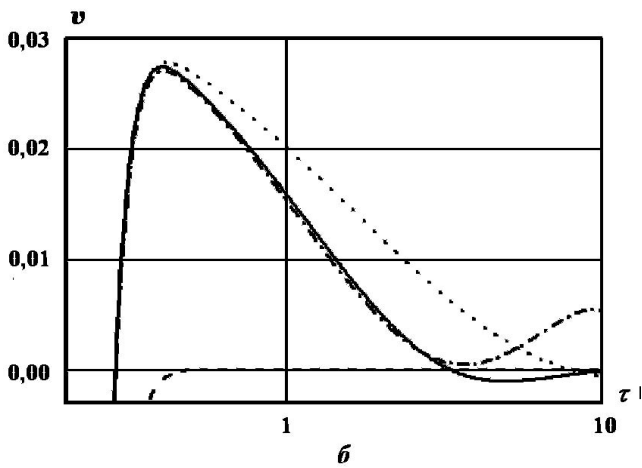
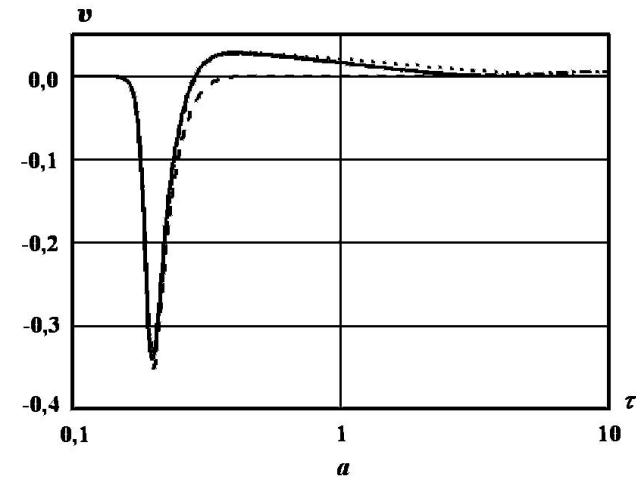


Рис. 7. Точное и приближенные решения при $\alpha r = 5$:
 a — общий вид; b — положительная полуволна; — — — $v(\tau)$; - - - - $v_0(\tau)$; ····· — $v_a(\tau)$; - · - · - $v_e(\tau)$

Рис. 8. Точное и приближенные решения при $\alpha r = 10$:
 a — общий вид; b — положительная полуволна; — — — $v(\tau)$; - - - - $v_0(\tau)$; ····· — $v_a(\tau)$; - · - · - $v_e(\tau)$

отрицательной полуволны соответствует характерной временной длительности τ_w функции $\varphi(\tau)$. Положительная полуволна в варианте 1 (напомним, что это традиционный вариант высокочастотного приближения) отсутствует. В варианте 2 положительная полуволна удовлетворительно описывается при всех рассмотренных значениях αr , в варианте 3 — только вне зоны токов (см. рис. 7, б, 8, б).

Таким образом, проведенный анализ различных вариантов высокочастотного приближения для уравнений Максвелла на модельной задаче показывает, что влияние производных по угловым переменным оказывается существенным на временах, больших характерной временной длительности τ_w функции $\varphi(\tau)$. Удержание этих производных в рамках высокочастотного приближения существенно увеличивает область его применимости по времени τ .

Заключение

В данной работе на представительной двумерной модельной задаче проведено сравнение точного решения уравнений Максвелла с решениями упрощенных уравнений, возникающих в различных вариантах высокочастотного приближения. Сравнение показало, что учет производных по угловым переменным в уравнениях высокочастотного приближения существенно расширяет границы применимости этого приближения по времени.

Пока этот факт проиллюстрирован лишь представительным модельным примером. В дальнейшем предполагается провести дополнительные исследования для того, чтобы подтвердить полученный

результат на задачах с более реалистичными источниками ЭМИ, в частности, при учете нестационарной проводимости среды в зоне токов.

Список литературы

1. *Karzas W. J., Latter R.* Detection of the electromagnetic radiation from nuclear explosions in space // *Phys. Rev.* 1965. Vol. 137, No 5B. P. 1369—1378.
2. *Golubev A. I., Kamchibekov M. D., Soldatov A. V., Sysoeva T. G., Terekhin V. A., Tikhonchuk V. T.* Nonlinear and kinetic effects in propagation of intense electromagnetic pulse through the atmosphere // *Electromagnetic waves and electronic systems.* 1998. Vol. 3, No 2—3. P. 93—99.
3. *Solovyev A. A., Terekhin V. A., Tikhonchuk V. T., Altgilbers L. L.* Electron kinetic effects in the atmosphere breakdown by an intense electromagnetic pulse // *Phys. Rev. E.* 1999. Vol. 60, No 6. P. 7360—7368.
4. *Golubev A. I., Sysoeva T. G., Terekhin V. A., Tikhonchuk V. T., Altgilbers L. L.* Kinetic model of the propagation of intense subnanosecond electromagnetic pulse through the lower atmosphere // *IEEE Plasma Science.* 2000. Vol. 28, No 1. P. 303—311.
5. *Голубев А. И., Камчибеков М. Д., Соловьев А. А., Сысоева Т. Г., Терехин В. А., Терехин А. В.* Нестационарные, нелинейные и кинетические эффекты при распространении мощного ЭМИ через атмосферу // *Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ.* 2002. Т. 3. С. 28—51.
6. *Голубев А. И., Исмаилова Н. А., Терехин В. А.* Тесты для двумерных методик расчета нестационарных электромагнитных полей, создаваемых источниками гамма-излучения // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 1991. Вып 1. С. 66—70.
7. *Голубев А. И., Исмаилова Н. А., Терехин В. А., Тихончук В. Т.* Влияние асимметрии окружающей среды на временную форму радиоимпульса воздушного ядерного взрыва // *Физика плазмы.* 1999. Т. 25, № 5. С. 428—434.

Статья поступила в редакцию 07.09.07.
