

УДК 519.6

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕКОТОРЫХ ФОРМ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ НА ХАРАКТЕР "ЭНТРОПИЙНОГО СЛЕДА" ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ

А. М. Стенин, Е. А. Соловьева  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Работа посвящена вопросу уменьшения ошибок в значениях величин в области *энтропийных следов*, возникающих в численных расчетах газодинамических задач в лагранжевых координатах с помощью разностных схем сквозного счета ударных волн.

В систему уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах консервативным образом вводятся искусственные диффузии массы, импульса и полной энергии. Получены формулы для искусственных вязкостей в уравнении неразрывности, в уравнениях движения и энергии в лагранжевых координатах.

Результаты проведенных тестовых расчетов демонстрируют высокую эффективность новой системы вязкостей.

### Введение

В 1950 г. в работе [1] Нейманом и Рихтмайером был предложен метод сквозного (без выделения разрывов) счета ударных волн (УВ) с помощью квадратичной (порядка  $O(h^2)$ ,  $h$  — шаг сетки по пространству) искусственной вязкости, которая вводится в систему уравнений газодинамики в лагранжевых координатах как аддитивная добавка к давлению. Позднее для уменьшения амплитуды осцилляций, возникающих за фронтом *размазанной* УВ, квадратичная искусственная вязкость стала использоваться в комбинации с линейной (порядка  $O(h)$ ) вязкостью. С тех пор этот метод получил широкое распространение. Он используется во многих методиках численного решения задач газовой динамики.

Известно, что одним из существенных недостатков разностных схем сквозного счета с классической искусственной вязкостью, предназначенных для численного решения системы уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах, является появление в численном решении так называемого *энтропийного следа*. Энтропийный след проявляется в виде ошибок конечной величины в значениях плотности и внутренней энергии в окрестности внешних границ счетных областей и в окрестности внутренних границ раздела между разными веществами после прохождения через эти границы УВ, а также при столкновении УВ даже в однородном веществе. В области энтропийного следа численные значения плотности и энергии могут в несколько раз отличаться от их истинных значений. В процессе счета эти ошибки не сглаживаются и не исчезают, поскольку отклонения плотности и энергии от их истинных значений имеют противоположные знаки и в случае уравнения состояния идеального газа (здесь рассматриваются только такие уравнения состояния) не проявляются в значениях давления и скорости. В расчетах одномерных задач, обладающих плоской симметрией, энтропийный след обычно занимает несколько ячеек ( $\leq 10$ ) пространственной сетки. Однако в случае цилиндрической и особенно сферической симметрии течений после отражения УВ от центра системы формируется энтропийный след, который может распространяться на существенно большее количество ячеек сетки. Расчеты на сходимость известной задачи Ноха [2] показали, что в случае сферической симметрии течения энтропийный след занимает более 150 ячеек сетки.

В работе [2] сформулированы некоторые проблемы, связанные с энтропийным следом. Там же для уменьшения энтропийного следа в численных расчетах был предложен метод искусственной

теплопроводности, который заключается в том, что наряду с классической искусственной вязкостью в уравнение энергии вводится дополнительная искусственная диффузия с малым коэффициентом.

Позднее Ю. А. Бондаренко [3] с помощью расчетов на сходимость показал, что энтропийный след, по-видимому, является свойством дифференциальных уравнений с классической искусственной вязкостью. На основании этого анализа он также предложил использовать для подавления энтропийных следов метод искусственной теплопроводности. Проведенные им и другими авторами расчеты показали, что в ряде задач при подходящем выборе коэффициента искусственной теплопроводности этот метод способствует существенному уменьшению энтропийного следа. Однако было замечено, что в расчетах задачи о выходе УВ из легкого вещества в тяжелое энтропийный след, хотя и уменьшается, но все же остается достаточно большим. Отклонение плотности от точного значения составляет почти 20 %.

В данной работе искусственные вязкости вводятся в уравнение неразрывности, в уравнение движения, а также в уравнение энергии.

### Искусственная диффузия массы, импульса и энергии

Возьмем в качестве исходной систему уравнений газовой динамики, записанную в виде законов сохранения в эйлеровых координатах, и введем искусственную диффузию массы в уравнение неразрывности, искусственную диффузию импульса в уравнение движения и искусственную диффузию полной энергии в уравнение энергии. Для одномерных течений, обладающих плоской симметрией, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( C_U l \frac{\partial \rho}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u + p) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( C_U l \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho e u + p u) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( C_U l \frac{\partial(\rho e)}{\partial x} \right); \\ p &= (\gamma - 1) \rho E, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $t$  — время;  $x$  — эйлерова пространственная координата;  $\rho$  — плотность;  $u$  — скорость;  $p$  — давление;  $e = E + u^2/2$  — полная энергия;  $E$  — удельная внутренняя энергия;  $\gamma$  — показатель адиабаты в уравнении состояния идеального газа. Величина  $C_U$  в правых частях системы (1) представляет собой коэффициент вязкости, имеющий размерность скорости;  $l$  — малый параметр размерности длины.

Переходя к лагранжевым координатам, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{DV}{Dt} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial m}; \\ \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial m} + \frac{\partial q_U}{\partial m}; \\ \frac{DE}{Dt} &= -p \frac{\partial u}{\partial m} + q_U \frac{\partial u}{\partial m} + \frac{\partial q_E}{\partial m}, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\partial m = \rho dx$ ,  $m$  — лагранжева массовая координата;  $V = \frac{1}{\rho}$ ;  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x}$  обозначает производную по времени вдоль траектории  $\frac{dx}{dt} = \tilde{u}$ , где

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u - u_B, \quad u_B = -C_U \rho^2 \frac{\partial V}{\partial m}; \\ q_U &= C_U \rho^2 l \frac{\partial u}{\partial m}; \quad q_E = C_U \rho^2 l \frac{\partial E}{\partial m}. \end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что величина  $q_U$  в (3) представляет собой классическую искусственную вязкость,  $q_E$  — поток искусственной теплопроводности [2, 3]. Таким образом, в дополнение к классической искусственной вязкости и искусственной теплопроводности в систему уравнений (2) вводится вязкость  $u_b$ , которая имеет смысл скорости искусственной диффузии массы.

В случаях цилиндрической и сферической симметрии течений наряду с искусственной диффузией массы и искусственной теплопроводностью в уравнение движения вместо скалярной вязкости введем тензорную искусственную вязкость, аналогичную физической вязкости. Ранее искусственная вязкость такого типа, но без искусственной теплопроводности и без искусственной диффузии массы была предложена Валеном. В статье [2] приводятся результаты расчетов Валена для задачи Ноха в случае сферической симметрии течения со ссылкой на его неопубликованную работу.

Система уравнений газовой динамики с полным набором вязкостей в лагранжевых массовых координатах может быть записана в следующем виде, объединяющем все три вида симметрии течений:

$$\begin{aligned} \frac{DV}{Dt} &= \frac{\partial(x^\nu \tilde{u})}{\partial m}; \\ \frac{Du}{Dt} &= -x^\nu \frac{\partial p}{\partial m} + \frac{\partial(x^\nu q_x)}{\partial m} - \nu \frac{q_\varphi}{\rho x}; \\ \frac{DE}{Dt} &= -p \frac{\partial(x^\nu u)}{\partial m} + \frac{\partial(x^\nu q_E)}{\partial m} + x^\nu q_x \frac{\partial u}{\partial m} + \nu q_\varphi \frac{u}{\rho x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь значения  $\nu = 0, 1, 2$  соответствуют плоской, цилиндрической и сферической симметрии течений. Вязкости определяются формулами

$$\begin{aligned} u_b &= -C_U \rho l \frac{\partial V}{\partial x} = -C_U \rho^2 x^\nu l \frac{\partial V}{\partial m}; \\ q_x &= C_U \rho l \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\nu u}{2x} \right) = C_U \rho l \left( \rho x^\nu \frac{\partial u}{\partial m} - \frac{\nu u}{2x} \right); \\ q_\varphi &= -\frac{1}{\nu} C_U \rho l \left( \frac{\nu}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x} \right) = -\frac{1}{\nu} C_U \rho l \left( \frac{\nu}{2} \rho x^\nu \frac{\partial u}{\partial m} - \frac{u}{x} \right); \\ q_E &= C_U \rho l \frac{\partial E}{\partial x} = C_U \rho^2 x^\nu l \frac{\partial E}{\partial m}. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае  $\nu = 0$  полагаем  $q_\varphi = 0$ .

Для численного решения системы уравнений (4) используется полностью консервативная разностная схема типа *крест*, но с определением всех величин на моменты времени с целочисленными индексами. Консервативность схемы по полной энергии достигается благодаря расщеплению уравнения энергии на уравнения для двух полушагов, аналогично тому, как это было сделано в работе [4] для классических схем типа *крест*.

Вязкости  $q_x, q_\varphi$  определяются в ячейках сетки, а  $u_b, q_E$  — в узлах сетки. Малый параметр  $l$  размерности длины в разностных формулах, аппроксимирующих вязкости (5), всегда полагается равным локальному линейному размеру ячейки сетки для  $q_x, q_\varphi$ , а для  $u_b, q_E$  — линейному размеру узла сетки, вычисляемому по центрам соседних ячеек, в которых определены значения  $V, E$  ( $l = h$ ). Используются следующие разностные аналоги формул (5):

$$\begin{aligned} u_b &= -C_U \rho \Delta_x V; \quad q_x = C_U \rho \left( \Delta_x u - h \frac{\nu u}{2x} \right); \\ q_\varphi &= -\frac{1}{\nu} C_U \rho \left( \frac{\nu}{2} \Delta_x u - h \frac{u}{x} \right); \quad q_E = C_U \rho \Delta_x E. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь знак  $\Delta_x$  обозначает пространственную разность значений величин, определенных в узлах или ячейках. Как показали расчеты, способ усреднения в узлы для величин, определенных в ячейках, и способ усреднения в ячейки для величин, определенных в узлах, в формулах (6) существенного значения не имеют. Здесь можно использовать и среднее арифметическое.

Для аппроксимации величин вида  $\frac{f}{x}$  в формулах (6) и правых частях уравнений (4) использовался разностный аналог тождества

$$\frac{f}{x} = \frac{1}{\nu} \left( \frac{1}{x^\nu} \frac{\partial (x^\nu f)}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Размерный коэффициент  $C_U$  в (6) берется в виде комбинации коэффициентов порядка  $O(h)$  и  $O(1)$ :

$$C_U = \begin{cases} -C_1 \Delta_x u + C_0 C_W, & \Delta_x u < 0; \\ 0, & \Delta_x u \geq 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $C_W$  — местная изоэнтропическая скорость звука;  $C_1, C_0$  — безразмерные коэффициенты.

При проведении сравнительных расчетов классическая вязкость вычисляется по формуле

$$q = C_U \rho \Delta_x u \quad (8)$$

с тем же коэффициентом  $C_U$  вида (7).

Численные расчеты ряда задач с новым набором вязкостей (6) показали, что они способствуют существенному уменьшению ошибок в значениях плотностей и энергий в области энтропийного следа по сравнению с классической вязкостью (8).

На рис. 1 для примера приведены профили плотностей, полученные на момент времени  $t = 0,6$  в расчетах задачи Ноха [2], эквивалентной в случае плоской симметрии задаче о поршне, сжимающем газ с постоянной скоростью. Оба расчета были проведены с коэффициентом вязкости в виде (7) со значениями безразмерных коэффициентов  $C_1 = 2, C_0 = 0,2$ . Счетная сетка состояла из 100 ячеек, образующих в начальный момент времени разбиение, равномерное по расстоянию.

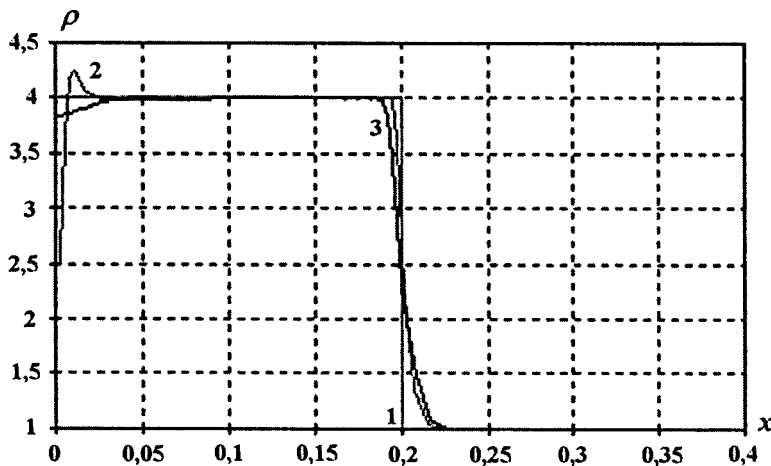


Рис. 1. Профили плотности: 1 — точное решение; 2 — расчет с вязкостью (8); 3 — расчет с вязкостями (6)

### Модификация вязкостей

Идея о возможности дальнейшего уменьшения счетной ошибки в области энтропийного следа возникает из рассмотрения уравнения для энтропии, которое может быть получено с помощью термодинамического тождества  $dE + pdV = TdS$ , где  $T$  — абсолютная температура [5]. В случае плоской симметрии течений для вязкостей в форме (3) это уравнение может быть приведено к следующему виду, записанному в эйлеровых координатах:

$$\frac{\partial (\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho S u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( C_U l \frac{\partial (\rho S)}{\partial x} \right) + \rho C_U l \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{T} C_U l \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} \right). \quad (9)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения описывает искусственную *самодиффузию* энтропии. Второе слагаемое соответствует дополнительному переносу энтропии со скоростью  $C_U l \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x}$  в зоне *размазывания* УВ вследствие искусственной теплопроводности. Третье слагаемое в правой части (9) представляет собой источник энтропии.

Для сеточных функций на пространственно-временной сетке последнее слагаемое в уравнении (9) с точностью до ошибок аппроксимации можно представить в виде

$$G = \frac{1}{T} C_U \rho \frac{1}{h} \left( (\Delta_x u)^2 - \Delta_x p \Delta_x V \right). \quad (10)$$

Имеет место равенство

$$(\Delta u)^2 = -\Delta p \Delta V, \quad (11)$$

которое следует из условий Гюгонио на УВ. Здесь знак  $\Delta$  обозначает разность значений соответствующей величины по разные стороны от фронта УВ. Следуя концепции Куропатенко [6], будем рассматривать размазанную УВ как последовательность УВ меньшей интенсивности. Критерием наличия таких УВ в каждой точке пространственной сетки является неравенство  $\Delta_x u < 0$ . Из равенства (11) следует, что источник энтропии  $G$  (10) в уравнении (9) пропорционален величине  $2(\Delta_x u)^2$  и, следовательно, положителен.

Авторы попытались модифицировать исходный набор вязкостей (6) с целью уменьшения источника энтропии в уравнении (9). Сначала был рассмотрен следующий вариант.

Вязкость в уравнении неразрывности полагалась равной нулю:  $u_v = 0$ . Вместо разностных аналогов вязкостей  $q_U, q_E$  (3) использовались следующие их модификации:

$$q_U = \begin{cases} C_U \rho \delta_x u, & \delta_x u < 0; \\ 0, & \delta_x u \geq 0; \end{cases} \quad \delta_x u = \Delta_x u + D; \quad (12)$$

$$D = \begin{cases} \sqrt{-\Delta_x p \Delta_x V}, & \Delta_x p \Delta_x V < 0; \\ 0, & \Delta_x p \Delta_x V \geq 0; \end{cases}$$

$$q_E = C_U \rho (\Delta_x E + p \Delta_x V).$$

Источник энтропии  $G$  (10) в этом случае будет иметь вид

$$G = \frac{1}{T} C_U \rho \left( \Delta_x u + \sqrt{-\Delta_x p \Delta_x V} \right) \frac{\Delta_x u}{h}.$$

Остальные слагаемые в правой части уравнения для энтропии (9) не изменятся.

Заметим, что если значения сеточных величин, по которым берутся пространственные разности в формулах для вязкостей (12), близки к значениям этих величин по разные стороны от фронта УВ, то источник энтропии, как следует из равенства (11), будет стремиться к нулю.

На рис. 2 приведен профиль плотностей, полученный в расчете с вязкостями (12) той же задачи Ноха для случая плоской симметрии, результаты которой приведены на рис. 1. Энтропийный след на левой границе области здесь не наблюдается. В данном расчете использовался коэффициент вязкости  $C_U$  в форме Куропатенко [6]:

$$C_U = \begin{cases} -\frac{\gamma+1}{4} \Delta_x u + \sqrt{\left(-\frac{\gamma+1}{4} \Delta_x u\right)^2 + C_W^2}, & \Delta_x u < 0; \\ 0, & \Delta_x u \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

В этом коэффициенте относительно велика доля слагаемого порядка  $O(1)$ , что обычно способствует эффективному подавлению осцилляций в численном решении, а заодно и увеличивает ширину зоны размазывания фронта УВ. Однако, как видно из рис. 2, несмотря на это, УВ в численном

решении с вязкостями (12) имеет очень крутой фронт и неприемлемо большие осцилляции в его окрестности. Для сглаживания этих осцилляций приходится использовать вязкость  $u_\nu$  в уравнении неразрывности.

Модифицированная по аналогии с (12) система вязкостей, включающая в себя и диффузию массы, может быть записана в следующем виде, объединяющем случаи плоской ( $\nu = 0$ ), цилиндрической ( $\nu = 1$ ) и сферической ( $\nu = 2$ ) симметрии течений:

$$u_\nu = -C_U \rho \Delta_x V; \quad q_x = C_U \rho \left( \delta_x u - h \frac{\nu u}{2x} \right); \quad q_\varphi = -\frac{1}{\nu} C_U \rho \left( \frac{\nu}{2} \delta_x u - h \frac{u}{x} \right);$$

$$\delta_x u = \begin{cases} \Delta_x u + D, & \Delta_x u + D < 0; \\ 0, & \Delta_x u + D \geq 0; \end{cases} \quad D = \begin{cases} \sqrt{-\Delta_x p \Delta_x V}, & \Delta_x p \Delta_x V < 0; \\ 0, & \Delta_x p \Delta_x V \geq 0; \end{cases} \quad (14)$$

$$q_E = C_U \rho (\Delta_x E + p \Delta_x V).$$

В случае плоской симметрии течений полагаем  $q_\varphi = 0$ .

На рис. 3 приводятся профили плотностей, полученные в расчетах с классической вязкостью (8) и с модифицированными вязкостями (14) той же задачи Ноха для случая плоской симметрии, результаты которой демонстрировались на рис. 1, 2. Оба расчета, представленные на этом рисунке, проведены с одним и тем же коэффициентом вязкости  $C_U$  в форме Куропатенко (13).

Рассмотрим теперь другой способ модификации исходной системы вязкостей (6). Снова будем использовать условия Гюгонио на УВ. Сначала рассмотрим случай плоской симметрии.

Из условий Гюгонио на УВ следуют соотношения

$$\Delta V = -\frac{\Delta u}{M}; \quad \Delta u = \frac{\Delta p}{M}; \quad \Delta E = -p_c \Delta V, \quad (15)$$

где  $p_c = 0,5(p_1 + p_2)$ ,  $p_1, p_2$  — значения давления по разные стороны от фронта УВ;  $\Delta$  обозначает скачок соответствующей величины на УВ;  $M$  — массовая скорость УВ, удовлетворяющая равенству

$$M = \pm \sqrt{-\frac{\Delta p}{\Delta V}}. \quad (16)$$

Вместо разностных аналогов вязкостей (3) в случае плоской симметрии течений рассмотрим модифицированные вязкости:

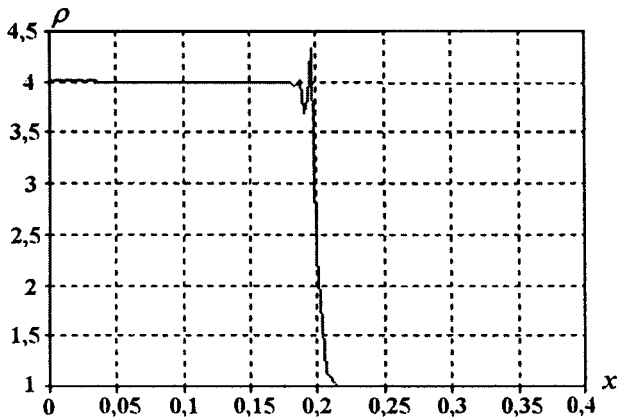


Рис. 2. Профиль плотности в расчете с вязкостью (12)

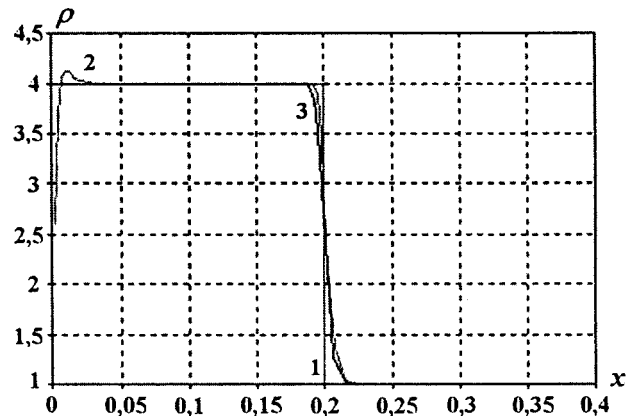


Рис. 3. Профили плотности: 1 — точное решение; 2 — расчет с вязкостью (8); 3 — расчет с вязкостями (14)

$$\begin{aligned} u_{\text{в}} &= C_U \rho \left( \Delta_x V + \alpha \frac{\Delta_x u}{M} \right); \\ q_U &= C_U \rho \left( \Delta_x u - \alpha \frac{\Delta_x p}{M} \right); \\ q_E &= C_U \rho (\Delta_x E + \alpha p \Delta_x V), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\alpha$  — безразмерный коэффициент,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . При  $\alpha = 1$  согласно равенствам (15) на УВ каждая из этих вязкостей будет стремиться к нулю. А это, как было видно на примере вязкостей (12), приводит к неприемлемо большим осцилляциям величин в численных расчетах. Поэтому в (17) нужно выбирать значения  $0 \leq \alpha < 1$ . Будем вычислять значение коэффициента  $\alpha$  по формуле

$$\alpha = \frac{\tau}{\Delta m} M = \frac{\tau}{\rho \Delta x} M. \quad (18)$$

Рассматривая размазанную УВ согласно [6] как последовательность УВ меньшей интенсивности, можно считать, что коэффициент  $\alpha$  (18) имеет смысл отношения массы, протекающей через фронт УВ, расположенный в данной ячейке (или узле) сетки, за один шаг по времени, к массе самой ячейки (или узла). Неравенство  $\alpha < 1$  обеспечивается выбором шага по времени.

Подставляя  $\alpha$  из (18) в формулы для вязкостей (17) и учитывая знак массовой скорости УВ (16), получаем формулы для модифицированной вторым способом системы вязкостей в случае плоской симметрии течений.

Выпишем для этой модификации вязкостей формулы, объединяющие случаи плоской ( $\nu = 0$ ), цилиндрической ( $\nu = 1$ ) и сферической ( $\nu = 2$ ) симметрии течений:

$$\begin{aligned} u_{\text{в}} &= -C_U \rho \cdot \begin{cases} \Delta_x V + \frac{x^\nu \tau}{\Delta m} \Delta_x u, & \Delta_x V \geq 0; \\ \Delta_x V - \frac{x^\nu \tau}{\Delta m} \Delta_x u, & \Delta_x V < 0; \end{cases} \\ q_x &= C_U \rho \left( \delta_x u - h \frac{\nu u}{2x} \right); \quad q_\varphi = -\frac{1}{\nu} C_U \rho \left( \frac{\nu}{2} \delta_x u - h \frac{u}{x} \right); \\ \delta_x u &= \begin{cases} \Delta_x u + \frac{x^\nu \tau}{\Delta m} |\Delta_x p|, & \Delta_x u + \frac{x^\nu \tau}{\Delta m} |\Delta_x p| < 0; \\ 0, & \Delta_x u + \frac{x^\nu \tau}{\Delta m} |\Delta_x p| \geq 0; \end{cases} \\ q_E &= C_U \rho \cdot \begin{cases} \Delta_x E + \frac{x^\nu \tau}{\Delta m} p D, & \Delta_x V \geq 0; \\ \Delta_x E - \frac{x^\nu \tau}{\Delta m} p D, & \Delta_x V < 0; \end{cases} \\ D &= \begin{cases} \sqrt{-\Delta_x p \Delta_x V}, & \Delta_x p \Delta_x V < 0; \\ 0, & \Delta_x p \Delta_x V \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $\Delta m = x^\nu \rho h$ . В случае плоской симметрии течений полагаем  $q_\varphi = 0$ .

### Результаты расчетов

Рассмотрим результаты ряда расчетов одномерных задач для всех трех типов симметрии течений. В случае плоской симметрии течений рассчитывался ряд типичных задач, моделирующих ситуации, часто встречающиеся на практике. В случаях цилиндрической и сферической симметрии рассчитывалась задача Ноха, вызывающая значительные трудности при ее численном решении с классической вязкостью.

Все расчеты выполнялись с использованием модифицированных вязкостей (19). Результаты проведенных расчетов сравниваются с результатами, полученными при использовании классической

вязкости (8), и с аналитическими решениями. Во всех расчетах брался коэффициент вязкости  $C_U$  в виде (7) со значениями безразмерных коэффициентов  $C_1 = 2$ ,  $C_0 = 0,2$ .

**Столкновение УВ одинаковой интенсивности.** Начальные данные:  $0 \leq x \leq 2X_0$ ,  $X_0 = 1$ ;  $E(x, t = 0) = 0$ ;  $\rho(x, t = 0) = 1$ ;  $u(x, t = 0) = 0$ ;  $\gamma = 5/3$ .

Граничные условия: слева  $u_0(t) = 1$ ; справа  $u_1(t) = -1$ .

Начальная сетка: 200 ячеек, равномерное по расстоянию разбиение.

Результаты расчета задачи представлены на рис. 4.

**Столкновение УВ разной интенсивности.** Начальные данные:  $0 \leq x \leq 3,34$ ;  $E(x, t = 0) = 0,08$ ;  $\rho(x, t = 0) = 1$ ;  $u(x, t = 0) = 0$ ;  $\gamma = 3$ .

Граничные условия: слева  $p_0(t) = 0,9$ ; справа  $p_1(t) = 1,8$ .

Начальная сетка: 334 ячейки, равномерное по расстоянию разбиение.

Результаты расчета задачи представлены на рис. 5.

**Выход УВ из легкого вещества в тяжелое вещество.** Начальные данные:

- для  $0 \leq x \leq 1,5$  (тяжелое вещество)  $E(x, t = 0) = 0$ ;  $\rho(x, t = 0) = 25$ ;  $u(x, t = 0) = 0$ ;

- для  $1,5 \leq x \leq 16,5$  (легкое вещество)  $E(x, t = 0) = 0$ ;  $\rho(x, t = 0) = 1$ ;  $u(x, t = 0) = 0$ .

Показатель адиабаты для обоих веществ  $\gamma = 5/3$ .

Граничные условия: слева  $u_0 = 0$ ; справа  $p_1 = 1$ .

Начальная сетка в тяжелом веществе — 100 ячеек, равномерное по расстоянию разбиение; в легком веществе — 200 ячеек, равномерное по расстоянию разбиение.

Результаты расчета задачи представлены на рис. 6.

**Выход УВ из тяжелого вещества в легкое вещество.** Начальные данные:

- для  $0 \leq x \leq 1$  (легкое вещество)  $E(x, t = 0) = 0$ ;  $\rho(x, t = 0) = 1$ ;  $u(x, t = 0) = 0$ ;

- для  $1 \leq x \leq 2,5$  (тяжелое вещество)  $E(x, t = 0) = 0$ ;  $\rho(x, t = 0) = 25$ ;  $u(x, t = 0) = 0$ .

Показатель адиабаты для обоих веществ  $\gamma = 5/3$ .

Граничные условия: слева  $u_0 = 0$ ; справа  $p_1 = 1$ .

Начальная сетка в тяжелом веществе — 200 ячеек, равномерное по расстоянию разбиение; в легком веществе — 200 ячеек, равномерное по расстоянию разбиение.

Результаты расчета задачи представлены на рис. 7.

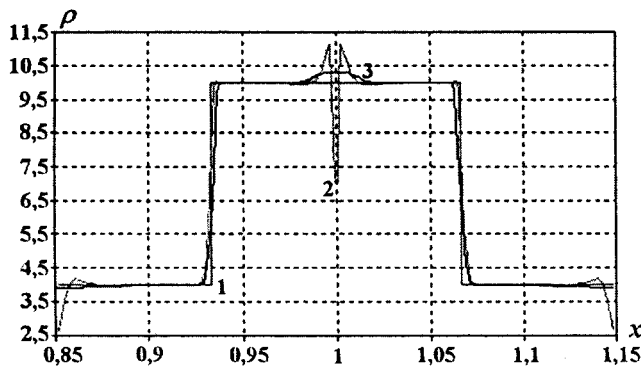


Рис. 4. Столкновение УВ одинаковой интенсивности. Профили плотности,  $t = 0,85$ : 1 — точное решение; 2 — расчет с классической вязкостью; 3 — расчет с вязкостями (19)

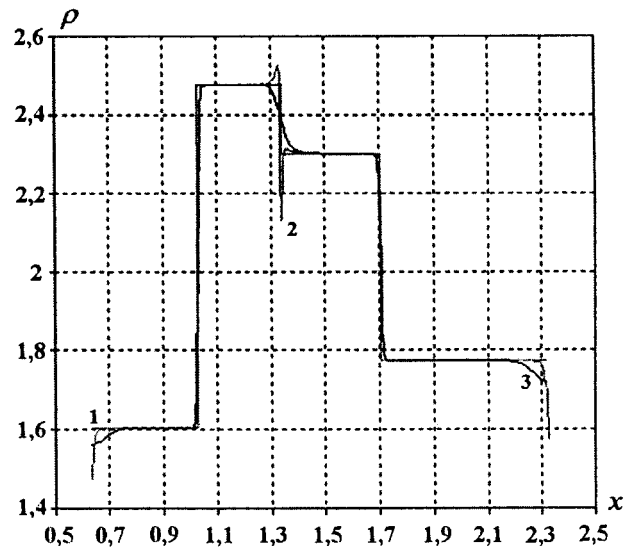


Рис. 5. Столкновение УВ разной интенсивности. Профили плотности,  $t = 1,2$ : 1 — точное решение; 2 — расчет с классической вязкостью; 3 — расчет с вязкостями (19)



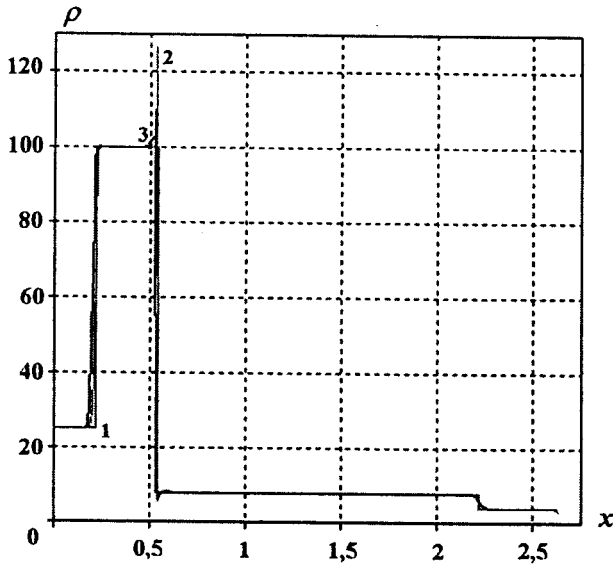


Рис. 6. Выход УВ из легкого вещества в тяжелое вещество. Профили плотности,  $t = 16$ : 1 — точное решение; 2 — расчет с классической вязкостью; 3 — расчет с вязкостями (19)

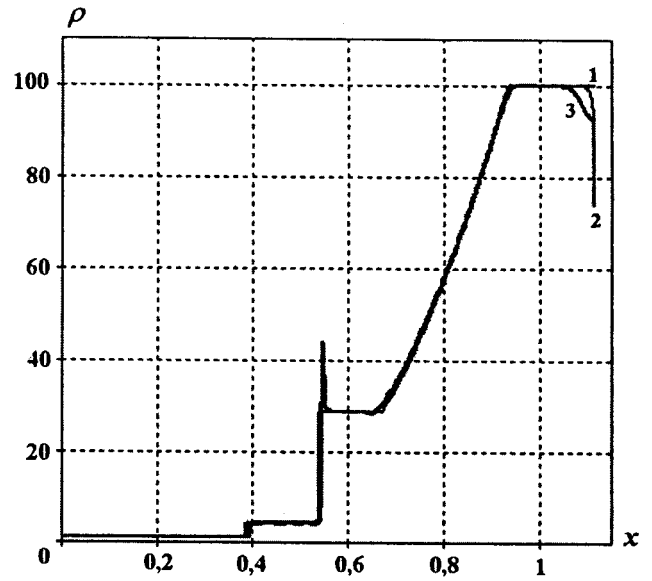


Рис. 7. Выход УВ из тяжелого вещества в легкое вещество. Профили плотности,  $t = 8$ : 1 — точное решение; 2 — расчет с классической вязкостью; 3 — расчет с вязкостями (19)

**Выход УВ из тяжелого вещества с малой сжимаемостью в легкое вещество с большой сжимаемостью.** Начальные данные:

- для  $0 \leq x \leq 100$  (тяжелое вещество)  $E(x, t = 0) = 0$ ;  $\rho(x, t = 0) = 10$ ;  $u(x, t = 0) = 0$ ;  $\gamma = 3$ ;
- для  $100 \leq x \leq 150$  (легкое вещество)  $E(x, t = 0) = 0$ ;  $\rho(x, t = 0) = 1$ ;  $u(x, t = 0) = 0$ ;  $\gamma = 1,2$ .

Граничные условия: слева  $p_0 = 10$ ; справа  $u_1 = 0$ .

Начальная сетка в тяжелом веществе — 200 ячеек, равномерное по расстоянию разбиение; в легком веществе — 100 ячеек, равномерное по расстоянию разбиение.

Результаты расчета задачи представлены на рис. 8.

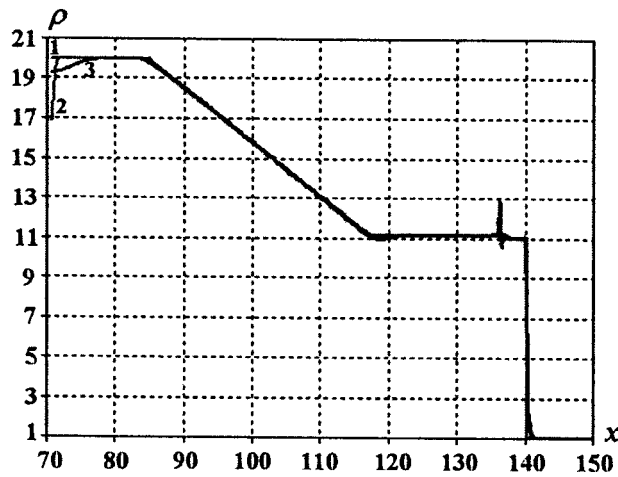


Рис. 8. Выход УВ из тяжелого вещества с малой сжимаемостью в легкое вещество с большой сжимаемостью. Профили плотности,  $t = 100$ : 1 — точное решение; 2 — расчет с классической вязкостью; 3 — расчет с вязкостями (19)

**Задача Ноха [2] с цилиндрической симметрией течения.** Начальные данные:  $E(x, t = 0) = 0$ ;  $\rho(x, t = 0) = 1$ ;  $u(x, t = 0) = -1$ ;  $\gamma = 5/3$ .

Граничные условия: слева  $u_0(t) = 0$ ; справа  $u_1(t) = -1$ .

Начальная сетка: 100 ячеек, равномерное по расстоянию разбиение.

На рис. 9, 10 представлены соответственно профили плотности и давления, полученные в расчетах с классической вязкостью и с вязкостями по формуле (19).

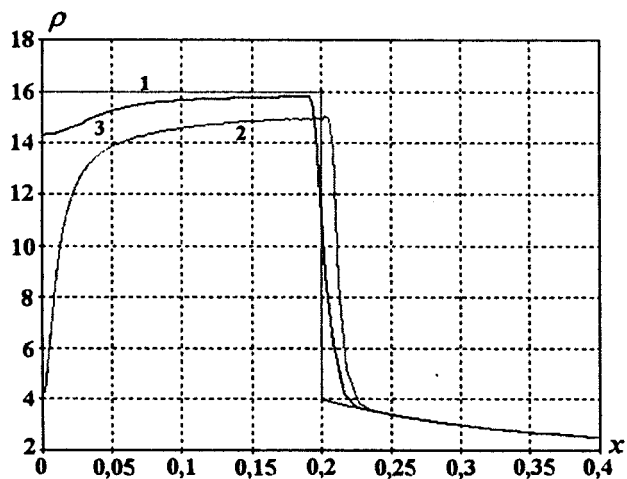


Рис. 9. Задача Ноха, цилиндрическая симметрия. Профили плотности,  $t = 0,6$ : 1 — точное решение; 2 — расчет с вязкостью (8); 3 — расчет с вязкостями (19)

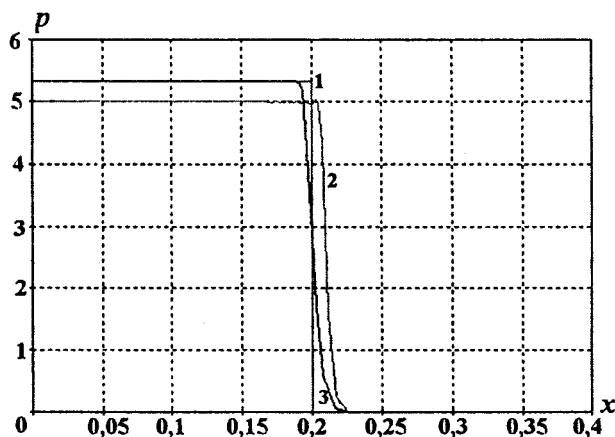


Рис. 10. Задача Ноха, цилиндрическая симметрия. Профили давления,  $t = 0,6$ : 1 — точное решение; 2 — расчет с вязкостью (8); 3 — расчет с вязкостями (19)

**Задача Ноха [2] со сферической симметрией течения.** Постановка задачи полностью совпадает с постановкой задачи для предыдущего случая цилиндрической симметрии течения.

На рис. 11, 12 представлены профили плотности и давления соответственно.

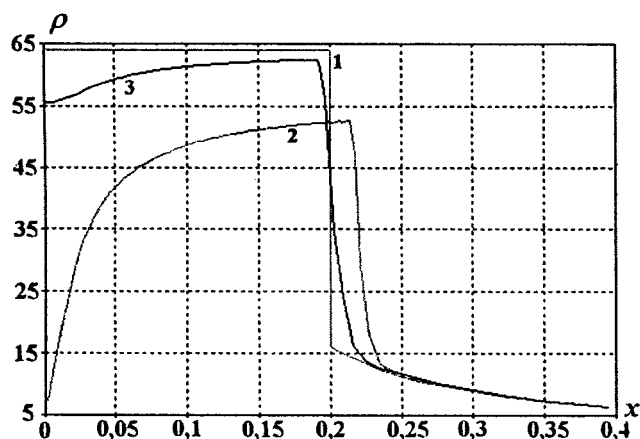


Рис. 11. Задача Ноха, сферическая симметрия. Профили плотности,  $t = 0,6$ : 1 — точное решение; 2 — расчет с вязкостью (8); 3 — расчет с вязкостями (19)

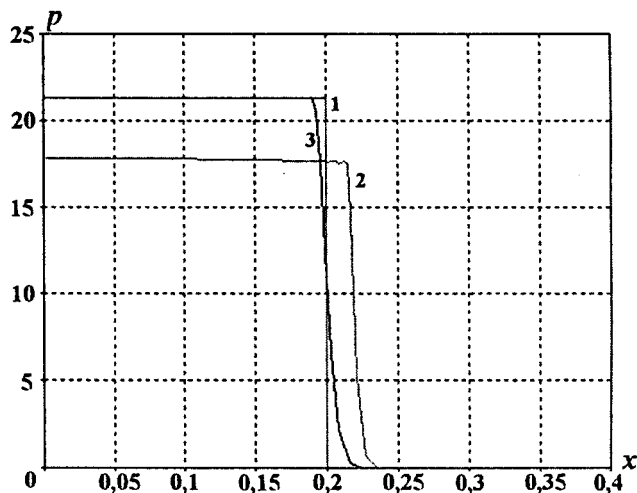


Рис. 12. Задача Ноха, сферическая симметрия. Профили давления,  $t = 0,6$ : 1 — точное решение; 2 — расчет с вязкостью (8); 3 — расчет с вязкостями (19)

Наилучшие результаты в расчетах задачи Ноха как в случае цилиндрической, так и в случае сферической симметрии течения были получены с использованием набора вязкостей, которые вычисляются по следующим формулам:

$$u_{\text{в}} = -C_U \beta \rho \Delta_x V; \quad q_x = C_U \rho \left( \delta_x u - h \frac{\nu u}{2x} \right); \quad q_\varphi = -\frac{1}{\nu} C_U \rho \left( \frac{\nu}{2} \delta_x u - h \frac{u}{x} \right);$$

$$\delta_x u = \begin{cases} \Delta_x u + \beta D, & \Delta_x u + D < 0; \\ 0, & \Delta_x u + D \geq 0; \end{cases} \quad D = \begin{cases} \sqrt{-\Delta_x p \Delta_x V}, & \Delta_x p \Delta_x V < 0; \\ 0, & \Delta_x p \Delta_x V \geq 0; \end{cases} \quad (20)$$

$$q_E = C_U \rho (\Delta_x H - \beta V \Delta_x p).$$

Здесь  $H$  — энтальпия,  $H = E + pV$ ;  $\beta$  — безразмерный коэффициент.

Если при вычислении вязкостей значение удельного объема в узле сетки вычисляется как среднее арифметическое значений удельных объемов в соседних ячейках, то при  $\beta = 1$  вязкости (20) полностью эквивалентны вязкостям (14).

На рис. 13, 14 приводятся профили плотностей, полученные в расчетах задачи Ноха с использованием вязкостей (20) для случаев цилиндрической и сферической симметрии течения соответственно. В этих расчетах использовался коэффициент  $\beta = 0,25$ . Коэффициент  $C_U$  брался в точности таким же, как и в остальных расчетах. Профили давлений не приводятся. Они так же хорошо согласуются с аналитическим решением, как на рис. 10, 12.

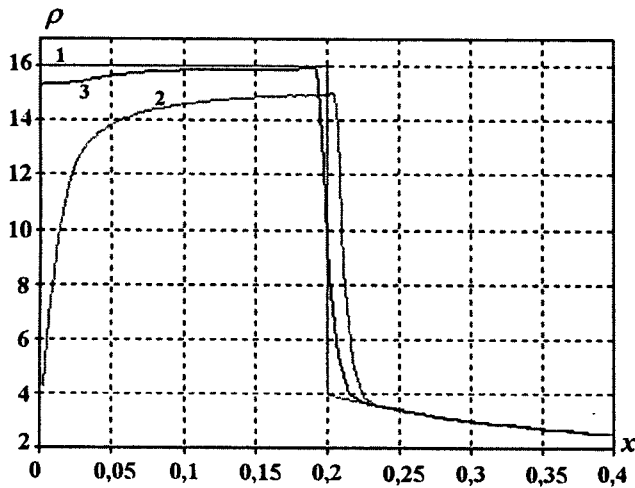


Рис. 13. Задача Ноха, цилиндрическая симметрия. Профили плотности,  $t = 0,6$ : 1 — точное решение; 2 — расчет с классической вязкостью; 3 — расчет с вязкостями (20)

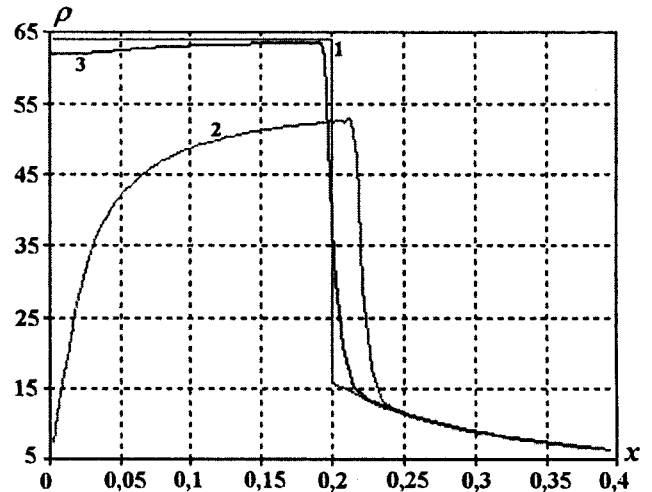


Рис. 14. Задача Ноха, сферическая симметрия. Профили плотности,  $t = 0,6$ : 1 — точное решение; 2 — расчет с классической вязкостью; 3 — расчет с вязкостями (20)

### Заключение

Расчеты показали, что при использовании новых вязкостей (19) максимальное отклонение плотности от точного значения в области энтропийного следа в большинстве случаев не превышает 3–4%. В некоторых расчетах энтропийный след не наблюдается вовсе. При одинаковых безразмерных коэффициентах  $C_1, C_0$  вязкости (19) практически не увеличивают ширину зоны размазывания фронта УВ по сравнению с классической вязкостью. При значениях  $C_1 = 2, C_0 = 0,2$ , которые использовались в расчетах, профили величин получаются достаточно гладкими и не имеют заметных осцилляций.

Максимальное отклонение плотности от точного значения в расчете задачи Ноха для случая цилиндрической симметрии (см. рис. 13) с новыми вязкостями (20) составляет 4,4%, а в расчете с классической вязкостью — 73,3%. Значение давления за фронтом УВ и положение фронта УВ в расчете с новыми вязкостями хорошо согласуются с аналитическим решением (см. рис. 10). В то же время в расчете с классической вязкостью значение давления за фронтом УВ на 6,5% меньше истинного, а фронт УВ заметно опережает фронт в аналитическом решении.

В расчетах задачи Ноха для случая сферической симметрии течения максимальное отклонение от точного значения плотности, рассчитанной с новыми вязкостями (20) (см. рис. 14), составляет 3,1%, а рассчитанной с классической вязкостью — 88,7%. Здесь также можно отметить хорошее согласие с аналитическим решением значения давления за фронтом УВ и положения фронта УВ в расчете с новыми вязкостями (см. рис. 11). В расчете с классической вязкостью отличие значения давления за фронтом УВ от аналитического решения еще больше, чем в случае цилиндрической симметрии, а фронт УВ еще больше опережает фронт в аналитическом решении.

### Список литературы

1. *Von Neumann J., Richtmyer R. D.* A method for the numerical calculations of hydrodynamic shocks // *J. Appl. Phys.* 1950. Vol. 21, No 3. P. 232—237.
2. *Noh W. F.* Errors for calculation of strong shocks using an artificial viscosity and artificial heat flux // *J. Comp. Phys.* 1987. Vol. 72, No 1. P. 78—120.
3. *Бондаренко Ю. А.* Энтропийный след в расчетах на сходимость при взаимодействии ударных волн // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики. Тез. докл. 11-й Всерос. конф. Пущино, 5—9 октября 1996 г. / Под ред. А. В. Забродина, А. М. Молчанова, В. М. Тихомирова. Пущино, 1996. С. 15—17.
4. *Бондаренко Ю. А.* Консервативное расщепление уравнения энергии в разностных схемах типа "крест" для лагранжевой газодинамики // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 1997. Т. 37, № 8. С. 1020—1023.
5. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
6. *Куропатенко В. Ф.* Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики // *Изв. высш. учеб. заведений. Математика.* 1962. № 3(28). С. 75—83.

Статья поступила в редакцию 16.10.07.

---