

УДК 517.9:532

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ ТЕСТ ДЛЯ МЕТОДИК РАСЧЕТА ГАЗОДИНАМИКИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

Б. П. Тихомиров  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Для одномерных уравнений газовой динамики с нелинейной теплопроводностью рассмотрена задача о разрывных бегущих волнах, распространяющихся по холодной среде с постоянной скоростью, и построено точное решение этой задачи, имеющее простое аналитическое представление, удобное для тестирования расчетных методик. Аналитическое решение сравнивается с решением, полученным разностным методом.

### Введение

В работе [1], посвященной исследованию бегущих температурно-гидродинамических волн в идеальном газе с излучением, показано, что система уравнений газовой динамики с теплопроводностью для некоторых коэффициентов теплопроводности специального вида допускает класс точных уравнений, имеющих простое аналитическое представление. Это решение описывает распространение с постоянной скоростью тепловой волны и волны сжатия по нулевому начальному фону при заданном режиме изменения температуры (потока) и давления (скорости) на поршне. Решение метастабильно. Оно существует до тех пор, пока температура на поршне не достигнет некоторого критического значения либо поток тепла не обратится в нуль.

В настоящей работе с помощью указанного непрерывного решения строятся составные решения [2], описывающие движение идеального газа с изотермическим скачком уплотнения. Разрывные решения получены в явной замкнутой форме, удобной для тестирования расчетных методик.

Работа состоит из двух разделов. В первом разделе рассматривается постановка задачи о бегущей волне и указывается класс точных решений непрерывной задачи о поршне. Во втором разделе строится аналитическое решение задачи о поршне с изотермическим скачком. Это решение сопоставляется с численным решением, полученным разностным методом. При численном интегрировании используется принцип расщеп-

ления по физическим процессам. Уравнения газовой динамики (с отключенной теплопроводностью) интегрируются по явной разностной схеме типа *предиктор-корректор*, записанной в полностью консервативной форме. Уравнение теплопроводности рассчитывается по полностью неявной разностной схеме.

### 1. Непрерывное решение задачи о поршне

В плоском одномерном случае рассматривается система уравнений газовой динамики с теплопроводностью, записанная в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0; \\ \frac{\partial E}{\partial t} + P \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial m} = 0; \quad W = -\chi_0 T^n F(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial m}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $m$  — массовая координата;  $u$  — скорость;  $P$  — давление;  $V$  — удельный объем;  $\rho$  — плотность;  $E$  — удельная внутренняя энергия;  $W$  — поток тепла;  $T$  — температура;  $\chi_0$ ,  $n$  — константы,  $n > 0$ . Функция, стоящая в выражении для потока тепла, имеет следующий вид:

$$F(\rho, T) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho}{\rho_0} \right) + \frac{aT^3}{3R\rho_0} \left( 7\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) \right], \quad (2)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $a$  — постоянная Стефана;  $R$  — газовая постоянная;  $\rho_0$  — начальная плотность. Предполагается, что эта функция неотрицательна.

Для замыкания рассматриваемой системы уравнений газодинамики с теплопроводностью используется уравнение состояния идеального газа с излучением:

$$P = R\rho T + \frac{a}{3}T^4; \quad E = \frac{R}{\gamma - 1}T + \frac{aT^4}{\rho}. \quad (3)$$

В работе [1] показано, что при условии (2) система уравнений (1), (3) допускает инвариантные решения типа бегущих волн, распространяющихся с постоянной массовой скоростью  $D$  по нулевому начальному фону

$$\rho = \rho_0; \quad T = 0; \quad u = 0; \quad W = 0. \quad (4)$$

Точное решение задачи (1)–(4) имеет простое аналитическое представление

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{M}(Dt - m), \quad M = \chi_0 \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^{2n} \frac{1}{DRR^n}; \\ T &= \begin{cases} (n\xi)^{1/n}, & \text{если } \xi > 0; \\ 0, & \text{если } \xi \leq 0; \end{cases} \\ V &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{3}T^4\right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{3}T^4\right)^2 - T}; \\ P &= 1 - V; \quad u = P; \\ E &= \frac{1}{\gamma - 1}T + \alpha T^4 V; \quad W = E - \frac{1}{2}P^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы (5) записаны в безразмерных переменных и содержат безразмерный параметр  $\alpha = aD^6 R^{-4} \rho_0^{-7}$ .

Переходя к размерным величинам, получаем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{R} \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^2 \bar{T}; \\ V &= \frac{1}{\rho_0} \bar{V}; \quad P = D \left(\frac{D}{\rho_0}\right) \bar{P}; \quad u = \frac{D}{\rho_0} \bar{u}; \\ E &= \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^2 \bar{E}; \quad W = D \left(\frac{D}{\rho_0}\right)^2 \bar{W}. \end{aligned} \quad (6)$$

В этих формулах безразмерные величины (5) написаны с чертой, а размерные — без черты. С целью упрощения обозначений, если особо не оговаривается, черта над безразмерными величинами в дальнейшем не ставится.

Решение рассматриваемой задачи метастабильно, т. е. существует только до некоторого конечного значения  $\xi_k$ , несмотря на то что температура определена при любых значениях независимой переменной. Метастабильность решения связана с двумя обстоятельствами: во-первых, с неоднозначной зависимостью удельного объема от температуры и, во-вторых, с

возможностью обращения в нуль коэффициента теплопроводности при ненулевой температуре.

Действительно, зависимость удельного объема от температуры (или, что то же самое при  $\xi > 0$ , от независимой переменной  $\xi$ ) имеет две ветви

$$V = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{3}T^4\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{3}T^4\right)^2 - T}. \quad (7)$$

Видно, что кривая имеет точку поворота  $(T_*, V_*)$ , соответствующее значение независимой переменной обозначается через  $\xi_*$ . Очевидно, что значение температуры в точке поворота равно 0,25 при  $\alpha = 0$  и меньше 0,25, если  $\alpha > 0$ .

Как установлено в работе [1], структура решения определяется знаком потока тепла в точке поворота. При положительном знаке решение существует до точки  $\xi = \xi_*$ , при отрицательном знаке решение можно построить только до точки  $\xi = \xi_{k0}$  ( $\xi_{k0} < \xi_*$ ), в которой коэффициент теплопроводности обращается в нуль. Температура, соответствующая значению  $\xi = \xi_{k0}$ , определяется из уравнения

$$F(\rho, T) = 0,$$

в котором в качестве удельного объема берется сверхзвуковая (знак плюс) ветвь функции (7).

Идея построения аналитического решения (6) становится особенно "прозрачной", когда температурные бегущие волны рассматриваются в неподвижном газе. В этом случае вместо системы (1) рассматривается одно уравнение — уравнение теплопроводности. Если функцию (2) взять в виде

$$F(\rho, T) = \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{\alpha}{R\rho} T^3,$$

то точное значение температуры совпадает с температурой, определяемой из (6).

Аналогичный результат получается и для более сложного уравнения состояния. Пусть уравнение состояния имеет вид

$$E = cT f(V, T),$$

где  $c$  — размерная константа, а  $f(V, T)$  — безразмерная неотрицательная функция, такая что внутренняя энергия и температура одновременно стремятся к нулю.

Если теперь в качестве функции (2) взять функцию  $f(V, T)$ , то распределение температуры будет таким же, как в классической постановке задачи о тепловой волне ( $f(V, T) = 1$ ).

Интересно, что оно не зависит от вида функции  $f(V, T)$  и полностью определяется константами  $\chi_0$ ,  $n$  и скоростью волны.

## 2. Разрывное решение. Численный пример

В работе [2] было установлено, что для идеального газа без излучения ( $a = 0$ ) из непрерывных бегущих волн можно образовать составное решение, описывающее изотермический скачок, на котором, как известно, температура непрерывна, а остальные величины терпят разрыв. Для идеального газа с излучением ( $a \neq 0$ ) возможность представления разрывного решения непрерывными бегущими волнами была подтверждена в работе [1].

Покажем, что для рассматриваемой задачи (1)–(3) разрывное решение типа изотермического скачка также можно описать с помощью непрерывных бегущих волн, опираясь в данном случае на аналитическое представление (6), (7).

Условия на изотермическом скачке можно записать в виде [1]:

$$\begin{aligned} V_2 &= 1 - V_1 - \frac{\alpha}{3} T_1^4; & P_2 &= 1 - V_2; & u_2 &= P_2; \\ W_2 &= \frac{1}{\gamma - 1} T_1 + \alpha T_1^4 V_2 - \frac{1}{2} (1 - V_2)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Обсудим теперь, как можно геометрически интерпретировать задачу о поршне в случае изотермического скачка. Заметим, что знак коэффициента теплопроводности определяется знаком функции (2), зависящей в общем случае от удельного объема и температуры. Очевидно, что эта функция обращается в нуль либо на верхней (знак плюс в формуле (7)), либо на нижней (знак минус) ветви кривой  $V = V(T)$ . Если это происходит в некоторой точке  $(T_{\text{ок}}, V_{\text{ок}})$  верхней кривой  $V = V_1(T)$ ,  $V_* \leq V \leq 1$ , то решение задачи о поршне существует только на отрезке  $[0, \xi_{\text{ок}}]$ , где  $\xi_{\text{ок}} \leq \xi_*$ , причем это решение непрерывно.

В том случае, когда функция (2) обращается в нуль на нижней кривой  $V = V_2(T)$ ,  $0 < V < V_*$ , можно построить как непрерывное, так и разрывное решение задачи о поршне.

Действительно, пусть функция (2) обращается в нуль в точке  $(T_c, V_2)$ , где  $0 < V_2 < V_*$ . Этой точке можно поставить в соответствие точку  $(T_c, V_1)$ , лежащую на первой ветви ( $V_* < V_1 < 1$ ) и имеющую ту же самую температуру. Легко видеть, что

$$T_c = V_1 V_2.$$

Нетрудно убедиться также в том, что при переходе от точки  $(T_1, V_1)$  первой кривой, где  $T_c \leq T_1 < T_*$ , к точке  $(T_1, V_2)$  второй кривой выполняются условия (8) на изотермическом скачке.

Итак, при  $T_1 \geq T_c$  разрывное решение задачи о поршне можно построить из двух непрерывных решений. В плоскости  $(T, V)$  первому решению соответствует верхняя кривая  $V = V(T)$  ( $0 \leq T \leq T_1$ ,  $1 \geq V \geq V_1$ ), второму решению — нижняя кривая  $V = V(T)$  ( $T_1 \leq T \leq T_*$ ,  $V_2 \leq V \leq V_*$ ).

Подчеркнем, что в качестве  $T_1$  можно взять любое значение температуры из промежутка  $[T_c, T_*]$ . При  $T_1 = T_*$  изотермический скачок отсутствует и непрерывное решение описывается верхней кривой. В случае идеального газа без излучения ( $\alpha = 0$ ) функция (2) обращается в нуль, когда удельный объем равен  $\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$ . Этому значению удельного объема соответствует температура  $2 \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1)^2}$ .

Удельные объемы перед фронтом и за фронтом ударной волны удовлетворяют соответственно неравенствам

$$\frac{1}{2} < V_1 \leq \frac{2}{\gamma + 1}; \quad \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \leq V_2 < \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что при  $\gamma \geq 3$  для идеального газа без излучения существует только непрерывное решение задачи о поршне. Однако для идеального газа с излучением в некоторой области изменения параметра  $\alpha$ , вообще говоря, можно построить и разрывное решение.

На рис. 1 в плоскости  $(T, V)$  изображены разрывные решения задачи о поршне для случая идеального газа без излучения ( $\alpha = 0$ ) и с излучением ( $\alpha = 87,68$ ) при значении параметра  $\gamma = 5/3$ .

Точное решение задачи о поршне в случае изотермического скачка описывается формулами (5), (6), в которых изменен алгоритм расчета удельного объема. Для расчета удельных объемов в зоне от точки с массовой координатой  $m = 0$  до изотермического скачка используется формула (7) со знаком плюс, а в зоне от изотермического скачка — формула (7) со знаком минус. Эти удельные объемы обозначаются соответственно через  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$ .

Пусть в момент времени  $t = t_c$  давление на поршне возрастает скачком. Очевидно, что пока изотермического скачка нет ( $t \leq t_c$ ) удельный объем равен  $\bar{V}_1/\rho_0$ . При  $t > t_c$  удельный объем

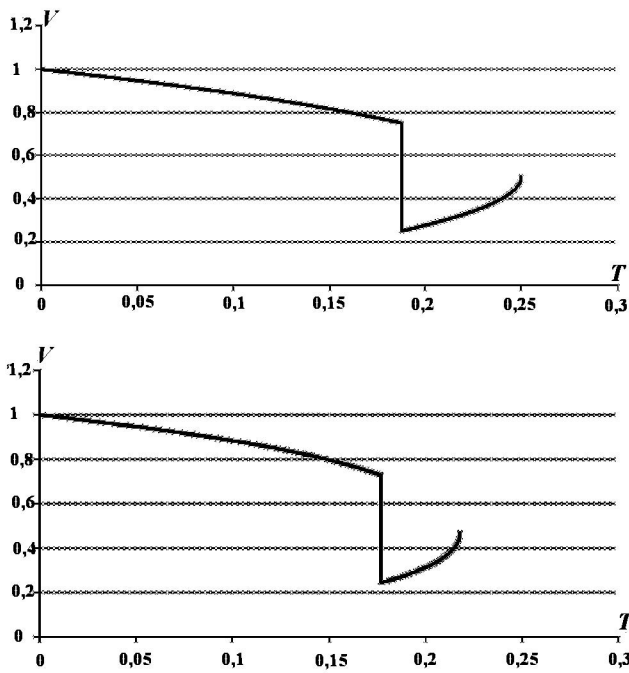


Рис. 1. Зависимость удельного объема от температуры в разрывном решении: сверху —  $a = 0$ ; внизу —  $a = 1,37$

следует вычислять с учетом положения изотермического скачка.

Итак, аналитическое решение задачи о поршне с изотермическим скачком описывается формулами (5), (6), в которых удельный объем (безразмерный) определяется следующим образом:

$$\bar{V} = \begin{cases} \bar{V}_1, & \text{если } \Delta t = t - t_c \leq 0; \\ \bar{V}_1, & \text{если } \Delta t > 0 \text{ и } m - D\Delta t > 0; \\ \bar{V}_2, & \text{если } \Delta t > 0 \text{ и } m - D\Delta t \leq 0. \end{cases}$$

Структура этого решения между поршнем и фронтом температурной волны показана на рис. 2. На нем приведены распределения скорости, температуры и плотности по массовой координате на момент времени  $t_k = t_* = 0,578757$ . Точное решение построено для констант

$$\begin{aligned} a = 1,37; \quad \gamma = 5/3; \quad \rho_0 = 1; \quad R = 8; \\ D = 8; \quad n = 4; \quad \chi_0 = 128; \quad t_c = 0,251377. \end{aligned} \quad (9)$$

При  $a = 0$  структура решения аналогична.

Момент времени, до которого существует решение, определяется через значение температуры в критической точке:

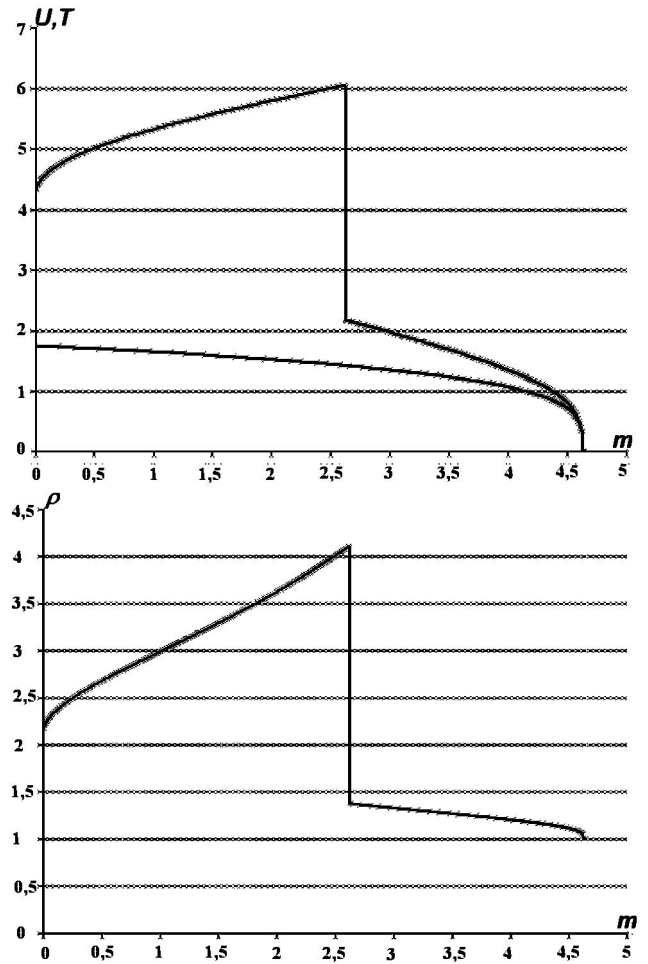


Рис. 2. Распределение скорости и температуры (вверху) и плотности (внизу) по массовой координате в точном решении задачи о поршне с изотермическим скачком,  $a = 1,37$ ,  $t = 0,57876$

$$t_k = t_* = \frac{\chi_0}{n} \frac{1}{D^2 R} \left[ \frac{1}{R} \left( \frac{D}{\rho_0} \right)^2 \frac{1}{T_*} \right]^n.$$

При  $a = 1,37$  ( $\alpha = 87,68$ ) температура в критической точке равна  $0,21805$ , поэтому для набора констант (9)  $t_* = 0,578757$ . При  $a = 0$  критическая температура равна  $0,25$  и  $t_k = 1$ .

Значение температуры на изотермическом скачке определяется моментом времени, в который задается скачок давления (или скорости) на поршне.

В табл. 1, 2 для идеального газа без излучения и с излучением соответственно приведены для разных значений показателя адиабаты момент времени  $t_c$ , начиная с которого может быть поставлен изотермический скачок, температура

Таблица 1

Температура и плотность на изотермическом скачке для идеального газа без излучения ( $\alpha = 0$ )

$\gamma$	$t_c$	$T_c$	$\rho_1$	$\rho_2$
4/3	0,0575520	0,12245	1,6667	7
1,4	0,0952599	0,13889	1,2	6
5/3	0,316406	0,1875	4/3	4
2	0,624295	0,22222	1,5	3
3	1	0,25	2	2

Таблица 2

Температура и плотность на изотермическом скачке для идеального газа с излучением ( $\alpha = 87,68$ )

$\gamma$	$t_c$	$T_c$	$\rho_1$	$\rho_2$
4/3	0,0558583	0,12154	1,1754	7
1,4	0,090053	0,13695	1,2145	6,0123
5/3	0,251377	0,17702	1,3732	4,1137
2	0,398442	0,19862	1,5432	3,2624
3	0,544668	0,21477	1,8506	2,5160

на изотермическом скачке  $T_c$ , плотности перед и за фронтом ударной волны.

Для подтверждения устойчивости построенного аналитического решения задача о поршне была решена численно разностным методом.

Система уравнений (1)–(3) интегрировалась методом расщепления. Расчет каждого временного слоя производился в два этапа. На первом этапе решалась система уравнений газовой динамики без теплопроводности по явной разностной схеме предиктор-корректор, являющейся одной из модификаций полностью консервативной разностной схемы, предложенной в работе [3]. Модифицированная схема принадлежит семейству разностных схем, называемых схемами с *предвычисленным* давлением [4]. В экономичном варианте ее краткое описание можно найти, например, в работе [5]. На втором этапе решается уравнение теплопроводности по полностью неявной разностной схеме.

Задача о поршне была решена численно для параметров, указанных в наборе констант (9) и табл. 1, 2. Опишем постановку задачи, взяв за основу константы (9).

В плоском слое  $0 \leq x \leq 8,2$  находится холодный неподвижный газ с плотностью  $\rho_0 = 1$ . В

качестве уравнения состояния используется уравнение состояния идеального газа с излучением:

$$P = 8\rho T + \frac{aT^4}{3}; \quad E = 12T + \frac{aT^4}{\rho}.$$

Коэффициент теплопроводности взят в виде

$$\kappa = 64 \left[ (4 - \rho) + \frac{a}{24} T^3 \left( \frac{7}{\rho} - 1 \right) \right] T^4.$$

Правая граница слоя неподвижна и температура на ней поддерживается равной нулю. На левой границе заданы температура и давление как функции времени:

$$T(0, t) = 2t^{0,25}; \quad P(0, t) = 64(1 - \bar{V}).$$

Здесь функция  $\bar{V}$  вычисляется следующим образом. Введем обозначения

$$\bar{T} = \frac{1}{8}T; \quad A = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha \bar{T}^4}{3} \right);$$

$$\bar{V}_1 = A + \sqrt{A^2 - \bar{T}}; \quad \bar{V}_2 = \bar{T}/\bar{V}_1.$$

Тогда

$$\bar{V} = \begin{cases} \bar{V}_1, & \text{если } t < t_c; \\ \bar{V}_2, & \text{если } t \geq t_c. \end{cases}$$

При этом  $\alpha = 0$ ,  $t_c = 0,316406$ , если расчет проводится без учета излучения ( $a = 0$ );  $\alpha = 87,68$ ,  $t_c = 0,251377$ , если излучение учитывается ( $a = 1,37$ ).

Для рассматриваемого конкретного примера аналитическое решение (5)–(7) принимает вид

$$T = \begin{cases} 2(t - m/8)^{0,25}, & \text{если } t - m/8 > 0; \\ 0, & \text{если } t - m/8 \leq 0; \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{3} (T/8)^{0,25} \right);$$

$$V_1 = A + \sqrt{A^2 - T/8}; \quad V_2 = T/(8V_1);$$

$$V = \begin{cases} V_1, & \text{если } t - t_c \leq 0; \\ V_1, & \text{если } t - t_c > 0 \text{ и } m - D(t - t_c) > 0; \\ V_2, & \text{если } t - t_c > 0 \text{ и } m - D(t - t_c) \leq 0. \end{cases}$$

$$u = 8(1 - V); \quad P = 8u.$$

Для данной конкретной задачи были проведены расчеты на равномерной сетке с числом счетных ячеек 164 и 1640 в режимах с излучением и без излучения. На рис. 3 (см. также цветную вкладку) приведены результаты сравнения численного и аналитического решений на момент окончания расчета  $t = 1$  ( $\alpha = 0$ ; 164 счетные ячейки). На графике гладкие кривые с одним скачком соответствуют точному решению, а осциллирующие кривые — приближенному.

лым возмущениям и, во-вторых, о приемлемой точности применяемого разностного метода.

### Заключение

В настоящей работе построено точное разрывное решение задачи о поршне, имеющее простое аналитическое представление, удобное для тестирования расчетных методик. Автор надеется, что в силу своей простоты это решение будет полезно разработчикам методик и программ численного решения задач газовой динамики с теплопроводностью.

### Список литературы

1. Тихомиров Б. П. О структуре бегущих волн в идеальном газе с излучением // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 2. С. 37–49.
2. Самарский А. А., Курдюмов С. П., Волосевич П. П. Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1965. Т. 5, № 2. С. 199–217.
3. Ладагин В. К., Пастушенко А. М. Об одной схеме расчета газодинамических движений // Числ. методы мех. спл. среды. 1977. Т. 8, № 2. С. 66–72.
4. Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф., Ладагин В. К. Построение консервативной схемы счета нестационарной двумерной газодинамики // Математические модели течений жидкости. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978. С. 51–63.
5. Дерюгин Ю. Н., Копышев В. П., Прошкин М. М., Тихомиров Б. П. К расчету детонации по модели FOREST FIRE разностным методом Годунова // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1990. Вып. 1. С. 48–52.

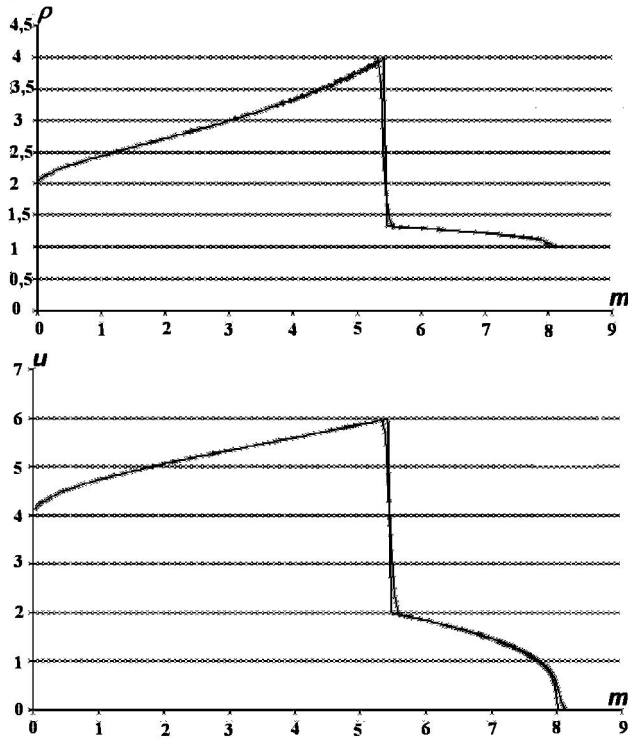


Рис. 3. Профили плотности (вверху) и скорости (внизу) в точном и приближенном решениях

На аналогичных сетках были также проведены расчеты задач для параметров, указанных в табл. 1, 2. На подробной сетке численные результаты с достаточно высокой точностью совпадают с аналитическим решением. На грубой сетке численные результаты также согласуются с точным результатом. Наибольшая погрешность, как и следовало ожидать, наблюдается на изотермическом скачке и на фронте температурной волны.

Хорошее согласие численных и точных результатов свидетельствует, во-первых, об устойчивости аналитического решения по отношению к ма-

Статья поступила в редакцию 17.06.08.