

УДК 519.6

МЕТОД СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ SPH ДЛЯ РАСЧЕТОВ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СО СФЕРИЧЕСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЯМИ

А. Д. Зубов, А. М. Лебедев
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Описаны новые формулы SPH-аппроксимации для одномерного случая сферической и цилиндрической симметрий. Проведены расчеты по численному определению порядка сходимости метода SPH на основе решения задачи Вудварда—Колеллы "Blast Waves". Показано, что SPH-метод имеет *практический* первый порядок точности на негладких решениях. Приведены результаты расчетов модельных газодинамических задач о распаде произвольного разрыва для сферически-симметричного случая, о точечном взрыве, о сходящейся автомодельной ударной волне (для адиабатического и гомотермического газов), задачи Ноха.

Ключевые слова: бессеточные методы, метод сглаженных частиц SPH, вычислительная газовая динамика.

Введение

Интенсивное совершенствование вычислительной техники в последние десятилетия способствовало активному развитию особой группы вычислительных алгоритмов — *методов частиц* [1]. С точки зрения эффективности и безавстности численного моделирования особый интерес представляют так называемые *бессеточные* методы (gridless, meshless, meshfree methods) [1]. Характерной особенностью бессеточных методов частиц является идея перехода к дискретной аппроксимации, состоящая в модельном представлении среды в виде конечного множества индивидуальных элементов — частиц, взаимодействующих друг с другом. Каждая частица является носителем некоторого набора характеристик — атрибутов моделируемой среды, таких как давление, температура, скорость и т. п. [1].

Наибольшую популярность среди бессеточных методов частиц в настоящее время имеет метод сглаженных частиц SPH, предложенный в 1977 г. независимо Люси [2], а также Джинголдом и Монэненом [3], сначала для решения не одномерных астрофизических задач. Это метод частиц для приближенного интегрирования уравнений в частных производных, в частности для численного моделирования задач механики сплошной среды.

Уравнения, получаемые в результате SPH-аппроксимации уравнений газовой динамики для случаев сферической и цилиндрической симметрий, до сих пор не являются общепринятыми. В данной работе представлено описание аппроксимации методом сглаженных частиц системы уравнений газовой динамики для указанных случаев. Приведены результаты расчетов тестовых газодинамических задач. Для определения точности и численного порядка сходимости решения по методу SPH при увеличении числа частиц была рассмотрена задача Вудварда—Колеллы "Blast Waves". Показано, что SPH-метод имеет *практический* первый порядок точности по пространственной переменной на негладких решениях. Среди других рассмотренных модельных газодинамических задач наибольший интерес представляют задачи о распаде произвольного разрыва для сферически-симметричного случая, о точечном взрыве, о сходящейся автомодельной ударной волне (для адиабатического и гомотермического газов) и задача Ноха. Результаты расчетов тестовых задач хорошо согласуются с точными и эталонными решениями.

Новая SPH-аппроксимация для одномерного случая сферической и цилиндрической симметрий

SPH-формулировка уравнений газовой динамики для случаев сферической и цилиндрической симметрий до сих пор не является общепринятой, и ее оптимальное определение представляет значительный интерес.

Система уравнений газовой динамики в одномерном случае имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left(\frac{1}{r^\nu} \frac{\partial r^\nu U}{\partial r} \right); \quad \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}; \quad \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{\rho} P \left(\frac{1}{r^\nu} \frac{\partial r^\nu U}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где ν — параметр, отвечающий за тип симметрии. Значения $\nu = 0, 1, 2$ соответствуют случаям плоской, цилиндрической и сферической симметрий соответственно.

В SPH-подходе [2, 3] операторы дифференцирования по пространству в правых частях системы (1) записываются с помощью интегральных соотношений по конечному пространственному носителю с дифференцируемым ядром $W(|x|; h)$. С помощью формулы интегрирования по частям дифференцирование по пространству переводится с параметров течения на известную функцию ядра. Окончательные уравнения SPH-метода, имеющие вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получают дискретизацией — переходом от интеграла к сумме.

Для удобства введем обозначения параметров частиц. Нижним индексом обозначим номер частицы, верхним — номер временного шага. Теперь газодинамические параметры частицы с центром в точке r_i в момент времени t_n можно записать следующим образом: плотность $\rho_i^n = \rho(r_i, t_n)$; давление $P_i^n = P(r_i, t_n)$; скорость $U_i^n = U(r_i, t_n)$; удельная внутренняя энергия $E_i^n = E(r_i, t_n)$ и т. д. Массу каждой частицы считаем неизменной с течением времени.

Формулы SPH-аппроксимации с учетом искусственной вязкости Π_{ij} имеют вид

$$\left\langle \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} \right\rangle = \sum_{j \in I(i)} \frac{m_j}{(r_j^n)^\nu} \left(\left(\frac{r_i^n}{r_j^n} \right)^\nu U_i^n - U_j^n \right) \left(\frac{\partial W(|r - r_j^n|; h_{ij}^n)}{\partial r} \Big|_{r=r_i^n} \right); \quad (2)$$

$$\left\langle \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} \right\rangle = - \sum_{j \in I(i)} \frac{m_j}{(r_j^n)^\nu} \left(\frac{P_i^n}{(\rho_i^n)^2} + \frac{P_j^n}{(\rho_j^n)^2} + \Pi_{ij} \right) \left(\frac{\partial W(|r - r_j^n|; h_{ij}^n)}{\partial r} \Big|_{r=r_i^n} \right); \quad (3)$$

$$\left\langle \frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\tau} \right\rangle = \sum_{j \in I(i)} \frac{m_j}{(r_j^n)^\nu} \left(\left(\frac{r_i^n}{r_j^n} \right)^\nu U_i^n - U_j^n \right) \left(\frac{P_i^n}{(\rho_i^n)^2} + 0,5\Pi_{ij} \right) \left(\frac{\partial W(|r - r_j^n|; h_{ij}^n)}{\partial r} \Big|_{r_i^n} \right); \quad (4)$$

$$\left\langle \frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau} \right\rangle = U_i^{n+1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Описанная система уравнений замыкается уравнением состояния $P = P(\rho, E)$. Пересчет параметров частиц заключается в поочередном выполнении одного шага по времени методом Эйлера для системы (2)—(5) по каждой частице (с индексом i). Для каждой из них предварительно вычисляется сумма по ближайшим соседним j -м частицам. Множество индексов частиц, взаимодействующих с i -й частицей, обозначено $I(i)$.

В приведенных уравнениях используется обозначение $h_{ij} = (h_i + h_j)/2$, которое позволяет использовать для вычисления силы, действующей на i -ю частицу со стороны j -й, ту же длину сглаживания, что и для вычисления силы, действующей в обратном направлении.

Для нахождения плотности вместо SPH-аппроксимации уравнения неразрывности (2) можно использовать соотношение

$$\langle \rho_i \rangle = \sum_{j \in I(i)} m_j W(|r_i - r_j|; h_{ij}).$$

В расчетах использовалась искусственная вязкость, впервые предложенная В. Ф. Куропатенко [4]:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{C}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}}, & ((r^\nu U)_i - (r^\nu U)_j)(r_i - r_j) < 0; \\ 0, & ((r^\nu U)_i - (r^\nu U)_j)(r_i - r_j) \geq 0; \end{cases}$$

$$\mu_{ij} = \frac{h \left((r^\nu U)_i - (r^\nu U)_j \right) (r_i - r_j)}{\bar{r}_{ij}^\nu (r_i - r_j)^2 + \eta^2 h^2},$$

где $\bar{r}_{ij}^\nu = (r_i + r_j)/2$, $\bar{C}_{ij} = (C_i + C_j)/2$, $\bar{\rho}_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$, C — скорость звука.

Для учета сферической симметрии (для цилиндрической симметрии — аналогично), в отличие от используемой в работе [5] аппроксимации со специальным, несимметричным видом функции ядра $W_{3S1}(r_j, r_i; h_{ij})$, в настоящей работе используется классическое, симметричное ядро $W(|r_i - r_j|; h_{ij})$. И только при $r_i < 2h_i$ осуществляется переход на формулы [5]. Это повышает устойчивость алгоритма и уменьшает время счета.

Задача Вудварда—Колеллы "Blast Waves".

Определение практического порядка сходимости метода SPH

Метод сплаженных частиц имеет второй порядок сходимости на гладких решениях [6]. Для определения численного порядка сходимости решения по SPH-методу на негладких решениях была рассмотрена хорошо известная задача Вудварда—Колеллы "Blast Waves" [7]. В этой задаче моделируется сложное нестационарное взаимодействие двух сильных ударных волн.

В начальный момент времени $t = 0$ область $x \in [0, 1]$ заполнена покоящимся идеальным газом с $\gamma = 1,4$ и плотностью $\rho = 1$. Распределение давления имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 1000, & x \in (0, 0,1]; \\ 0,01, & x \in (0,1, 0,9); \\ 100, & x \in [0,9, 1). \end{cases}$$

На границах области задано граничное условие непротекания. Время окончания расчета $t = 0,038$.

Изменение координат частиц описывалось кинематическим соотношением с поправкой [8]:

$$\frac{dr_i}{dt} = U_i + \sum_j \frac{m_j}{\bar{\rho}_{ij}} (U_j - U_i) W_{ij}^*, \quad \bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{2} (\rho_i + \rho_j).$$

Была проведена серия из шести расчетов с числом частиц $N_k = 250 \cdot 2^{k-1}$, $k = 1, \dots, 6$. В начальный момент времени частицы равномерно заполняли расчетную область так, что расстояние между ними составляло $h_k = 1/N_k$, $k = 1, \dots, 6$. Решение задачи Вудварда—Колеллы для числа частиц $N = 250$ и $N = 8000$ представлено на рис. 1.

Полученные решения сравнивались с *эталонным* расчетом, обозначенным далее индексом $k = 0$, по методике ВОЛНА [9] высокого порядка точности. Сначала результаты расчетов по SPH-методу интерполировались на подробную сетку эталонного решения, затем находилась норма L_1 разности с эталонным решением. Численный (практический) порядок сходимости SPH-метода на негладких решениях определялся по формуле

$$\alpha_k = \log_2 \frac{\|\rho_k - \rho_0\|_{L_1}}{\|\rho_{k+1} - \rho_0\|_{L_1}}, \quad k = 1, \dots, 5, \quad (6)$$

где ρ_0 — эталонная плотность.

Вопрос о непрерывном представлении получаемых решений в произвольной точке x расчетной области решается с помощью выражения для гладкой аппроксимации

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{\rho_i} f(x_i) W(|x - x_i|, h).$$

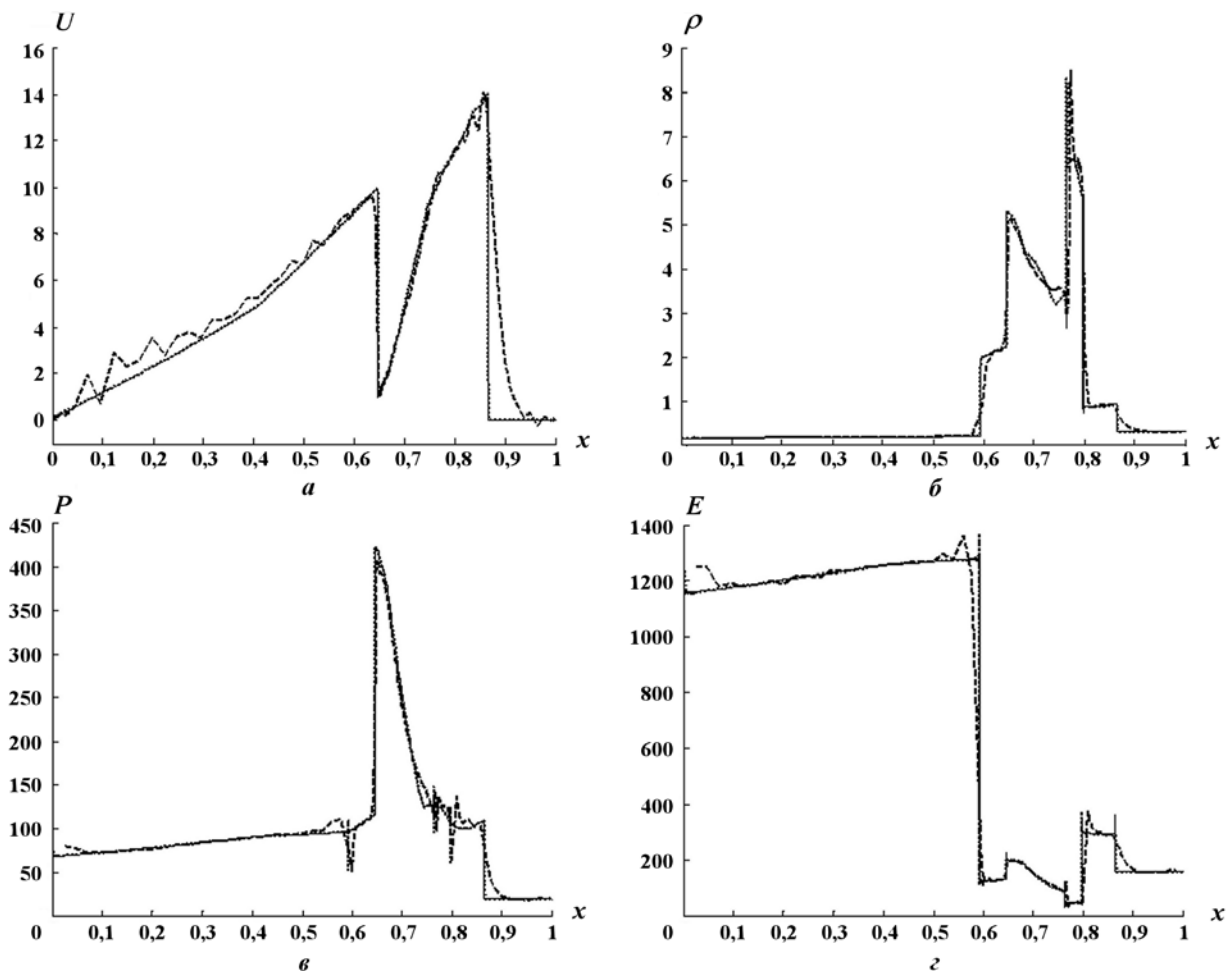


Рис. 1. Профили скорости (а), плотности (б), давления (в) и внутренней энергии (г) на момент времени $t = 0,038$: - - - $N = 250$; ··· — $N = 8000$; — — расчет по методике ВОЛНА

Расчеты показали, что SPH-метод имеет приблизительный порядок сходимости 0,87–0,98 на негладких решениях. Значения практического порядка сходимости SPH-метода α_k , вычисленные по формуле (6), приведены в таблице.

На рис. 2 из работы [10] представлена погрешность вычисления (относительная L_1 -норма) плотности для задачи Вудварда–Колеллы, решенной различными методами: по схемам Годунова и Мак-Кормака, методу антидиффузии с коррекцией потока (FCT-метод), PPM-методу (Piecewise Parabolic Method) и др. (обозначения методов взяты из [7]). На этом рисунке добавлена кривая погрешности решения по SPH-методу. Видно, что SPH-метод не уступает по точности большинству эйлеровых методов, в том числе неоднородных.

Сравнение с лагранжевыми методами показывает, что для достижения одинаковой точности SPH-методу требуется примерно в 2–4 раза больше частиц, чем ячеек в лагранжевых методах. Это связано с тем, что у каждой SPH-частицы должно быть несколько соседей для получения нужной аппроксимации. Тем не менее порядок сходимости на негладких решениях, так же как и в лучших лагранжевых и эйлеровых методах второго порядка точности на гладких решениях, примерно равен 1.

Значения практического порядка сходимости метода SPH

k	1	2	3	4	5
α_k	0,97	0,92	0,98	0,96	0,87

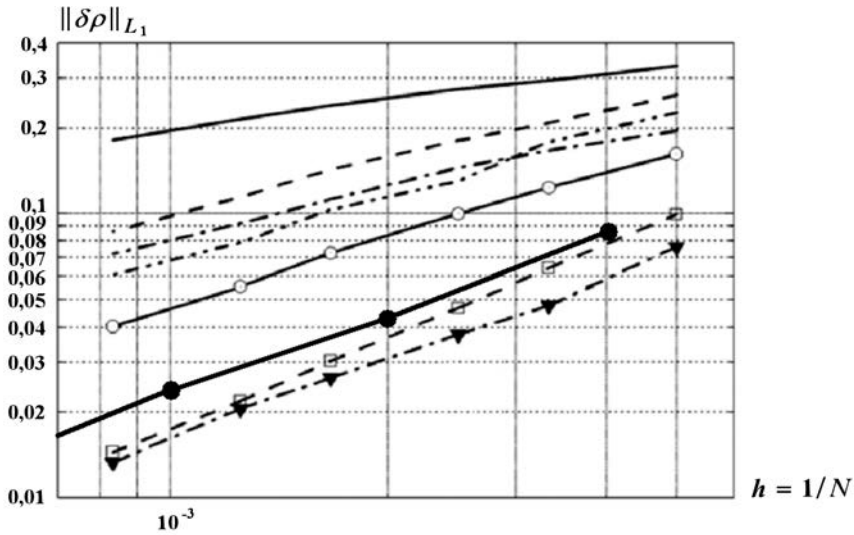


Рис. 2. Зависимость погрешности от шага сетки h : — — схема Годунова; - - - - схема Мак-Кормака; - · - · - BVC; - · · - · - ETB-FCT; -○- MUSCL; -□- PPMDE; -·▼·- PPMLR; -●- SPH-метод

Задача о сферически-симметричном распаде разрыва

Постановка задачи о распаде произвольного разрыва взята из [5]. В начальный момент времени $t = 0$ область высокого давления $r \in [0, 1]$ с параметрами $P = 1$, $\rho = 1$, $U = 0$ граничит с областью низкого давления $r \in (1, 2]$, $P = 0,1$, $\rho = 0,125$, $U = 0$. Показатель адиабаты газа во всей расчетной области $\gamma = 1,4$. На границах области задано граничное условие непротекания.

Решение задачи приведено на рис. 3. В этом расчете использовалось 300 равномерно распределенных частиц. Из рисунка видно хорошее согласие результатов с эталонным решением по методике

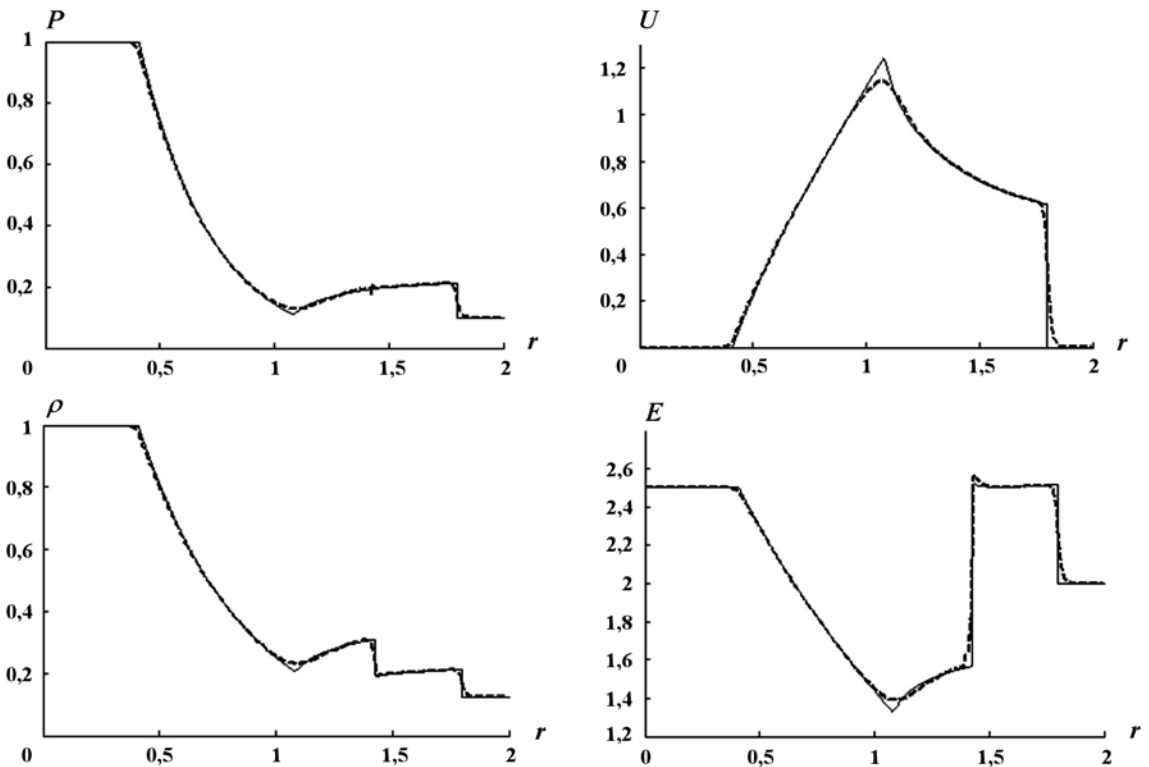


Рис. 3. Решение задачи о распаде произвольного разрыва, $t = 0,5$: — — эталонное решение; - - - — SPH-метод при $N = 300$

ВОЛНА [9]. При небольшом числе частиц решение по методу SPH хорошо описывает все особенности решения.

Точечный взрыв

Постановка задачи о точечном взрыве взята из [5, 11]. В шаре малого радиуса $r_0 = 0,1$ задана начальная внутренняя энергия единицы массы $E_{0,1} = 10^7$; в сферическом слое $0,1 \leq r \leq 20$ $E_{0,2} = 0$. Скорость газа в начальный момент времени равна нулю, плотность — единице. На границе области задано условие *жесткая стенка*. В начальный момент времени частицы равномерно распределены по радиусу, в области высокой плотности энергии находилось 100 частиц.

Профили скорости, плотности, давления и внутренней энергии на момент времени $t = 0,5$ представлены на рис. 4. Из рисунка видно удовлетворительное согласие результатов с теоретическим решением. Дисбаланс полной энергии составил 1,6%. Положение фронта УВ и амплитуда основных параметров вблизи фронта передаются с достаточной степенью точности. На контактном разрыве наблюдается энтропийный след. Видно также, что в малоплотной и горячей области в районе центра возникают осцилляции решения.

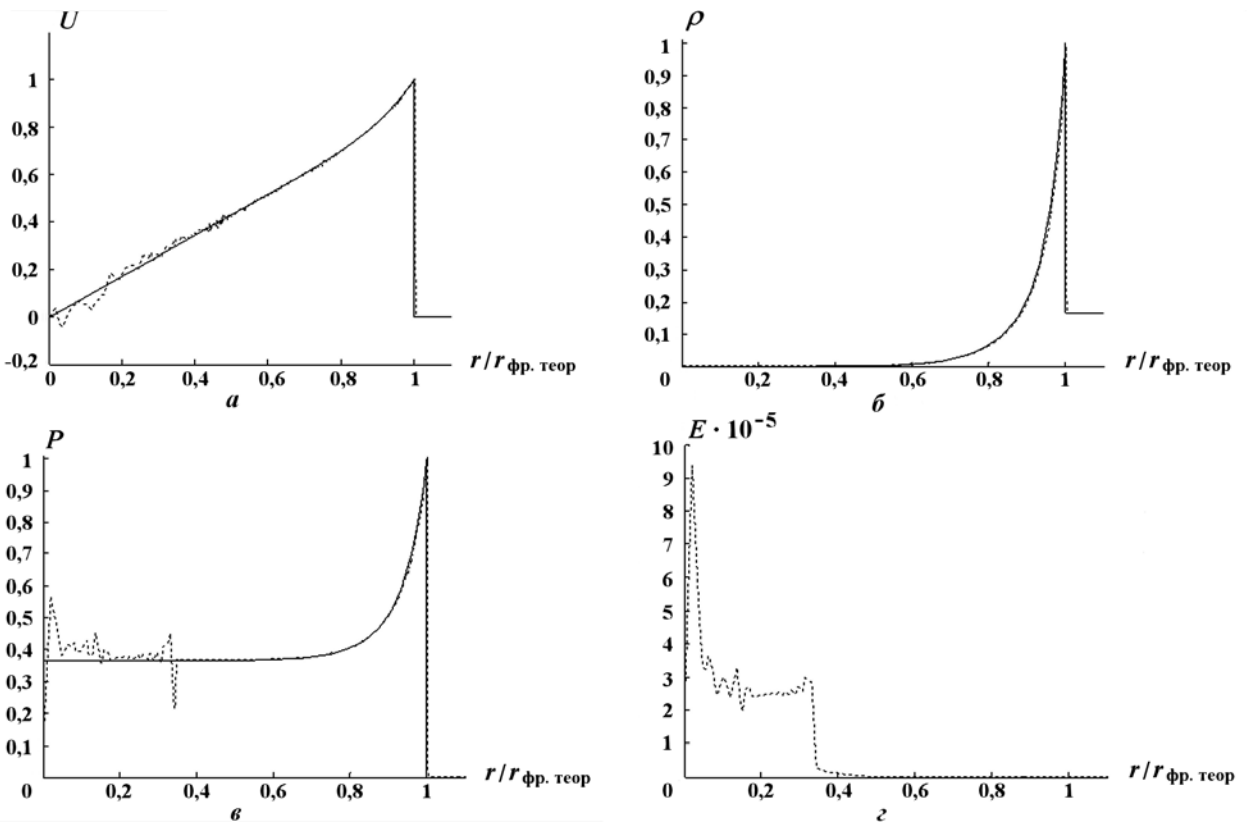


Рис. 4. Профили скорости (а), плотности (б), давления (в) и внутренней энергии (г) из решения задачи о точечном взрыве на момент времени $t = 0,5$: - - - — SPH-метод; — — точное решение

Задача Ноха

Постановка задачи Ноха взята из [12]. Идеальный газ с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$, плотностью $\rho_0 = 1$ и нулевым давлением заполняет сферическую область радиусом $r_0 = 1$. В начальный момент времени $U = -1$, т. е. вещество движется к центру симметрии. На внешней границе задана нормальная скорость $u^{norm} = -1$. Численные результаты получены для числа частиц $N = 500$ и $N = 2\,500$. Время окончания расчета $t = 0,6$.

На рис. 5 приведены профили скорости и плотности на конечный момент времени. Из рисунка видно, что при увеличении числа частиц численное решение сходится к точному.

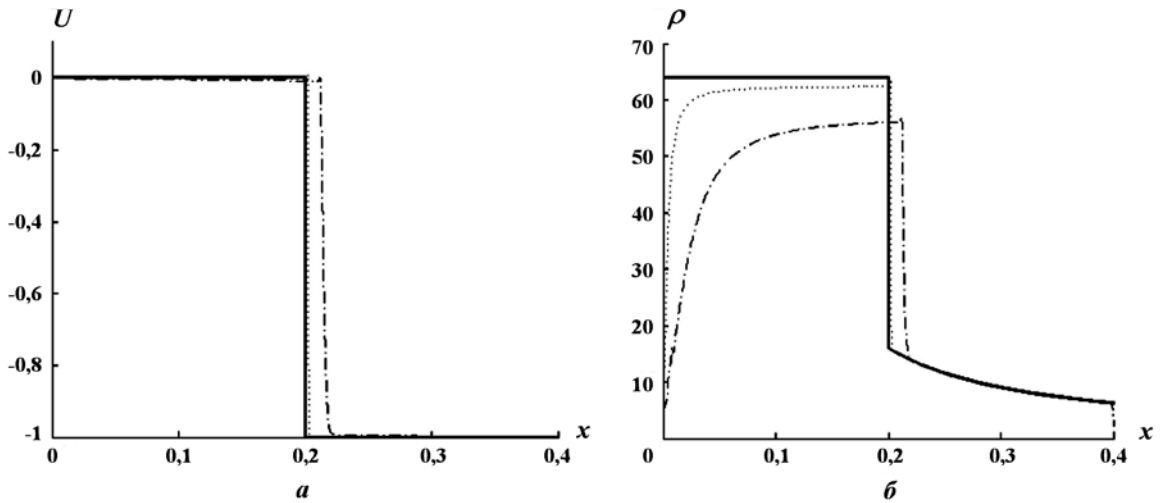


Рис. 5. Профили скорости (а) и плотности (б) из решения задачи Ноха: $-\cdot-\cdot-$ $N = 500$; \cdots — $N = 2500$; $—$ — точное решение

Адиабатическая автомодельная сходящаяся сферическая ударная волна

Рассматривается автомодельная задача о сжатии адиабатической сферической ударной волны и последующем отражении ее от центра. Для этой задачи известно точное решение (см. например, [11, 13]). Цель теста заключается в проверке точности расчета положения фронта нестационарной сходящейся ударной волны, состояния за ее фронтом и описания отражения волны от центра.

Точное автомодельное решение ищется в предположении, что сферическая ударная волна движется из бесконечности по покоящемуся холодному идеальному газу постоянной плотности, т. е. перед волной $U = P = 0$, $\rho = 1$, $P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, $\gamma = 5/3$. Фокусировка и отражение ударной волны от центра происходит в момент времени $t_{\text{ф}} = 0,5958$. При $t_{\text{гр}} = 0,7895$ отраженная от центра волна выходит на поршень.

Так как численное решение задачи в бесконечной области невозможно, то ударную волну формируют при помощи сжатия области $\{r, r \in [0, 1]\}$ жестким сферическим поршнем с заданной скоростью $U_{\text{гр}}(t)$, полученной из точного решения.

На рис. 6, 7 приведены решения на моменты времени $t = 0,5$ (до фокусировки) и $t = 0,7$ (после фокусировки). Численные профили величин хорошо согласуются с точным решением. Сильные осцилляции амплитуды на внешней границе не влияют на точность расчета ударной волны.

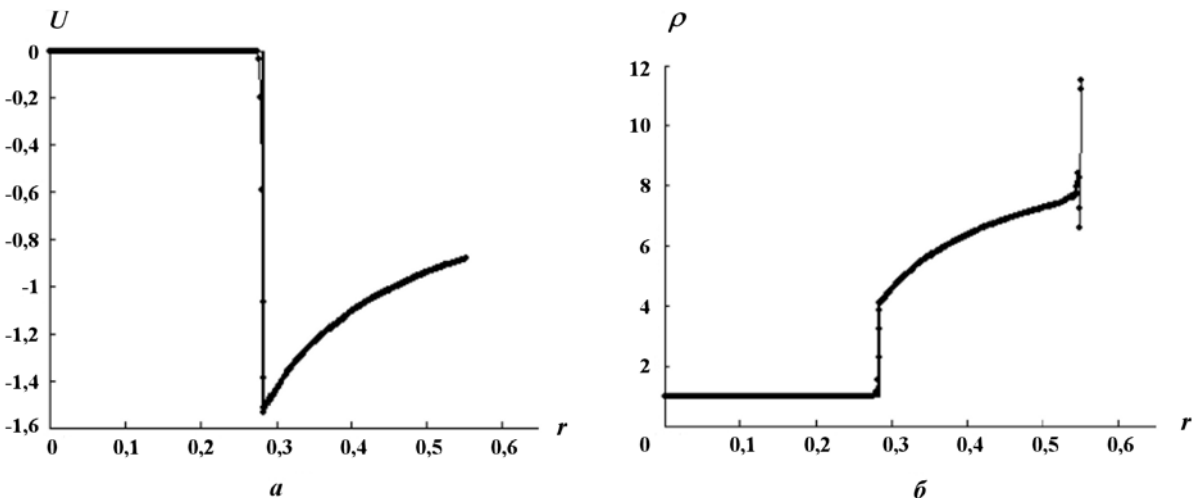


Рис. 6. Сравнение профилей скорости (а) и плотности (б) с точным решением, $t = 0,5$: $—$ — точное решение; $—\blacklozenge—$ — численное решение

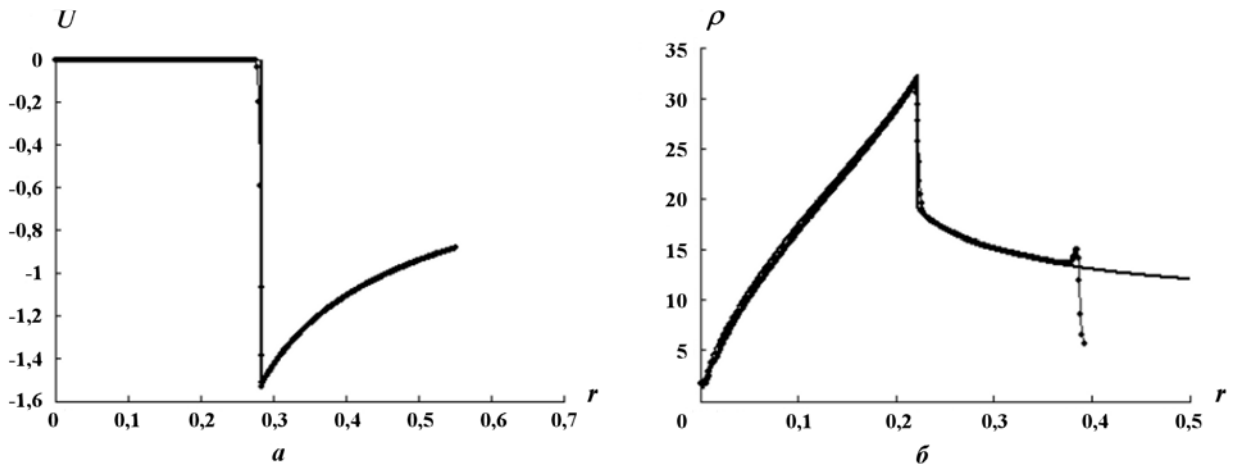


Рис. 7. Сравнение профилей скорости (а) и плотности (б) с точным решением, $t = 0,7$: — — точное решение; -◆- — численное решение

Гомотермическая автомодельная сходящаяся сферическая ударная волна

Задача о схождении автомодельной сферической и цилиндрической ударной волны и последующем отражении ее от центра (оси) симметрии при нулевом градиенте температуры, т. е. при условии гомотермичности, рассматривалась в [14]. Связь давления с плотностью в таком случае представляется в виде $P = c^2 \rho$, $c = c_T = \sqrt{RT/\mu}$, где R — универсальная газовая постоянная, а μ — молекулярный вес. Волна движется по покоящемуся газу с $U = 0$ и $\rho = 1$.

Здесь приводятся результаты численного решения для случая сферической ударной волны. Цель теста заключается в проверке точности расчета положения фронта нестационарной сходящейся ударной волны, состояния за ее фронтом.

Ударная волна формируется при помощи сжатия области $\{r, r \in [0, 1]\}$ жестким сферическим поршнем с заданной скоростью $U_{\text{гр}}(t)$, полученной из точного решения. Фокусировка и отражение ударной волны от центра происходит в момент времени $t_{\text{ф}} = 0$. Расчет начинается в момент времени $t = -0,4$.

На рис. 8 приведено решение на моменты времени $t = -0,1$; $-0,02$; $-0,0008$ (до фокусировки). Численные профили величин хорошо согласуются с точным решением, хотя в районе границы

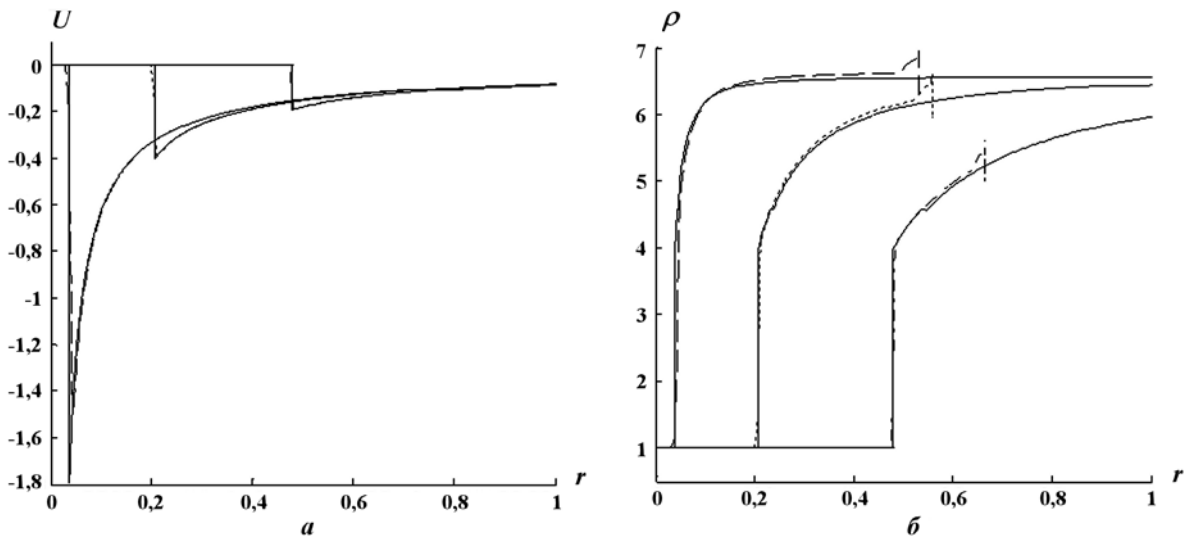


Рис. 8. Профили скорости (а) и плотности (б) до фокусировки: - - - - $t = -0,1$; ···· — $t = -0,02$; — — — — $t = -0,0008$; — — — — точное решение

поршня наблюдаются, как и в адиабатическом случае, отклонения от точного решения, но гораздо меньшей амплитуды.

Заключение

В работе приведено описание нового вычислительного алгоритма метода сглаженных частиц SPH для одномерного случая сферической и цилиндрической симметрий. Расчеты ряда модельных газодинамических задач показали хорошую точность решений по методу сглаженных частиц в сравнении с точными и эталонными решениями. Численное определение порядка сходимости метода SPH на основе решения задачи Вудварда—Колеллы "Blast Waves" показало, что метод имеет практический первый порядок точности на негладких решениях. Результаты расчетов некоторых задач оставляют ряд вопросов для дальнейшего исследования, например уточнения постановки граничных условий, устранения паразитных выбросов термодинамических величин на границе сильно разноплотных сред, устранения осцилляций этих величин в малоплотных, горячих областях и т. д.

Список литературы

1. *Liu G. R.* Mesh free methods: moving beyond the finite element method. CRC Press LLC, 2003.
2. *Lucy L.* A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // *Astronom. J.* 1977. Vol. 82. P. 1013.
3. *Gingold R. A., Monaghan J. J.* Smoothed Particle Hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 1977. Vol. 181. P. 375—389.
4. *Куропатенко В. Ф.* Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики // *Изв. вузов. Сер. Математика.* 1962. № 3 (28). С. 75—83.
5. *Omang M., Borve S., Trulsen J.* SPH in spherical and cylindrical coordinates // *J. Comp. Phys.* 2006. Vol. 213, Issue 1. P. 391—412.
6. *Monaghan J. J.* Smoothed particle hydrodynamics // *Rep. Prog. Phys.* 2005. Vol. 68. P. 1703—1759.
7. *Woodward P., Collella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *J. Comp. Phys.* 1984. Vol. 54. P. 115—173.
8. *Monaghan J. J.* On the problem of penetration in Particle Methods // *Ibid.* 1989. Vol. 82, No 1. P. 1—15.
9. *Куропатенко В. Ф., Коваленко Г. В., Кузнецова В. И. и др.* Комплекс программ "Волна" и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред. Часть 1. Неоднородный разностный метод // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 1989. Вып. 2. С. 9—17.
10. *Бондаренко Ю. А., Башуров В. В., Янцлжик Ю. В.* Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики. Обзор зарубежной литературы: Препринт № 88-203. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2003.
11. *Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И. и др.* Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 1. Требования к тестам. Тесты 1—7 // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 1991. Вып. 2. С. 3—9.
12. *Noh W. F.* Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and artificial heat flux // *J. Comp. Phys.* 1978. Vol. 72. P. 78—120.
13. *Зубов А. Д., Пронин Я. В.* О некоторых точных решениях газодинамики для тестирования численных методов // *Тез. Межд. конф. "VII Забабахинские науч. чтения".* Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2005. С. 202.

14. *Зубов А. Д.* Автомоделная сходящаяся ударная волна в гомотермическом газе // Забабахинские науч. чтения: Сб. материалов IX Межд. конф. 10—14 сентября 2007 г. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2007. С. 26—27.

Статья поступила в редакцию 02.10.08.
