

УДК 552.52, 624.131.54

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ПОДЗЕМНОМ ЗАХОРОНЕНИИ ОТХОДОВ

Э. М. Храмченков, М. Г. Храмченков
(НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева КГУ, г. Казань)

Рассматривается математическая модель процессов массопереноса в ходе закачки раствора, содержащего загрязняющие компоненты, в пласт, перекрытый слабопроницаемым глинистым слоем (подземное захоронение жидких отходов). Новизна постановки задачи заключается в учете нелинейного воздействия загрязнения на буферные (защитные) свойства перекрывающего пласт набухающего глинистого слоя.

Ключевые слова: набухающие глины, водоносный пласт, загрязнение, миграция, водоупор, буферные свойства, подземное захоронение.

Введение

В связи со все более возрастающим количеством промышленных отходов (в том числе радиоактивных), технологии утилизации и переработки которых на настоящий момент времени отсутствуют, остро стоит вопрос об их длительном и относительно безопасном хранении. В частности, одним из способов консервации таких отходов является их подземное захоронение. При этом, как правило, вещество переводится в растворенное состояние и закачивается в хорошо изолированные от взаимодействия с зонами интенсивной фильтрации (водообмена) участки литосферы. Изоляция таких участков достигается за счет существенно ограничивающих массообмен горных пород, относящихся к так называемым водоупорам (флюидоупорам), окружающих выбранный под захоронение участок. Изолирующие (буферные) свойства водоупоров приходится особо учитывать при расчетах характеристик (в том числе технологических) подземного захоронения жидких отходов (загрязненных растворов).

Как правило, в состав пород, слагающих водоупоры, входят в значительном количестве глинистые минералы, поэтому сами породы относятся к глинистым породам. Глинистые породы характеризуются низкими значениями коэффициента фильтрации, высокой сорбционной способностью, что делает их подходящими для эффективной изоляции жидких загрязнений. Но эти породы характеризуются также и зависимостью коэффициента фильтрации от концентрации раствора (ростом коэффициента фильтрации с ростом концентрации), способностью набухать и потерей этой способности с ростом концентрации фильтрующегося раствора. При этом основным требованием к глинистым породам с точки зрения эффективного подземного захоронения отходов является исключение попадания загрязняющих веществ из пласта, выбранного под захоронение, в смежные водоносные пласты для предотвращения последующей миграции загрязнений в них. Ясно, что требование абсолютной изоляции к водоупору является невыполнимым. Поэтому приходится рассчитывать процесс проникновения примеси закачиваемого раствора через глинистый слой-водоупор в смежный с ним водоносный пласт для прогноза эффективной изоляции загрязнения.

Самым простым подходом к описанию буферных свойств глинистого водоупора является представление о нем как о бипористой среде — среде, в которой одна система пор, обычно называемых трещинами, является хорошо проницаемой с пористостью m_1 , а вторая, обычно называемая блоками, — слабопроницаемой с пористостью m_2 . При этом уравнение переноса примеси в такой среде без учета диффузии (гидродисперсии) описывается уравнениями [1]

$$m_1 \frac{\partial C_1}{\partial t} + \mathbf{q} \nabla C_1 + \gamma (C_1 - C_2) = 0; \quad m_2 \frac{\partial C_2}{\partial t} = \gamma (C_1 - C_2). \quad (1)$$

Здесь C_1 — концентрация примеси в трещинах; C_2 — концентрация примеси в блоках; γ — константа массообмена между трещинами и блоками; \mathbf{q} — скорость фильтрации. Очевидно, что предположение о быстром массообмене между трещинами и блоками (этому отвечает условие $\gamma \rightarrow \infty$) приводит к равенству $C_1 = C_2$. Тогда первое уравнение системы (1) сводится к уравнению

$$(m_1 + m_2) \frac{\partial C_1}{\partial t} + \mathbf{q} \nabla C_1 = 0, \quad (2)$$

которое описывает распространение запаздывающего фронта примеси (загрязнения) в пористой среде (эффект задержки загрязнения бипористой средой).

В случае, когда примесь сорбируется твердой фазой, для равновесной сорбции, отвечающей изотерме Генри с коэффициентом распределения Ω , имеем уравнение

$$m \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{q} \nabla C + \Omega \frac{\partial C}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Оно математически эквивалентно уравнению (2), поэтому часто в гидрогеоэкологии коэффициенты равновесной адсорбции (коэффициенты распределения) и поглощения примеси микропорами слабопроницаемых блоков "отождествляют" и вводят так называемый фактор задержки (retardation factor) $R_m = m_1 + m_2$ или $R_m = \Omega + m$. Иногда фактор задержки вводят так: $m_1 + m_2 = m_1 (1 + R')$, $R' = m_2/m_1$ (или $R' = \Omega/m$).

На практике бывает трудно разделить случай истинной адсорбции и поглощения примеси микропорами слабопроницаемых блоков или агрегатов. Наиболее типичным примером такой среды являются глинистые породы, характеризующиеся особенно большой удельной долей микропор. Другими словами, для глин $m_2 \gg m_1$. Далее будем исходить из того, что в глинах имеет место только поглощение примеси (загрязнения) микропорами и за счет этого эффективное задержание проникновения примеси через глинистый слой (изолирующий, или буферный эффект глинистых водоупоров). Однако в отличие от простой бипористой среды поглощение примеси слабопроницаемыми блоками глинистой породы подчиняется нелинейному уравнению [2], поэтому применение формул типа (2) или (3) приведет к существенной ошибке. Для расчета количества задержанной блоками примеси используем соответствующие соотношения из [2]. Они фактически эквивалентны уравнению нелинейной адсорбции. Последняя, как известно [1], приводит к размазыванию концентрационных фронтов, как и диффузия или гидродисперсия. В силу этого, чтобы изучить вклад нелинейного поглощения примеси микропорами блоков глинистой породы в буферные свойства водоупора вне зависимости от величины диффузионного размазывания, будем использовать так называемое бездиффузионное приближение, т. е. считать, что коэффициент диффузии (гидродисперсии) в уравнениях массопереноса равен нулю. Принципиально важным при описании изолирующих (буферных) свойств глинистых водоупоров является применение теории, позволяющей оперировать как механическими, так и физико-химическими параметрами глины. Кроме того, необходимо дополнительно учитывать влияние эффектов набухания глинистых минералов на способность раствора проникать через породу.

Предлагаемые модели позволяют эффективно реализовать сформулированные выше задачи. Следует, однако, заметить, что в данном случае возникают две новые неизвестные величины — концентрация примеси загрязняющего компонента в водном пласте и концентрация примеси этого компонента в глинистом слое. Таким образом, требуется дополнить систему уравнений, описывающую глинистый слой и водный пласт, с тем чтобы замкнуть ее для большего количества неизвестных. Очевидно, нужно ввести уравнения для нахождения концентраций примеси в водном пласте и в глинистом слое.

1. Уравнения физико-химической механики набухающих сред

Запишем основные уравнения механики для указанных систем. Начнем с уравнения баланса массы.

Для массы жидкой фазы имеем

$$\frac{\partial m \rho_f}{\partial t} + \operatorname{div} (m \rho_f \mathbf{V}_f) + j = 0, \quad \rho_f = \text{const.} \quad (4)$$

Здесь m — пористость; \mathbf{V}_f — скорость флюида в транспортных порах; ρ_f — плотность флюида; j — обменный поток между *скелетом* и транспортными порами; t — время.

Для массы вещества скелета имеем соответственно

$$\frac{\partial (1 - m) \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} [(1 - m) \rho_s \mathbf{V}_s] - j = 0, \quad \rho_s \neq \text{const.} \quad (5)$$

Здесь ρ_s — плотность твердой фазы; \mathbf{V}_s — скорость твердой фазы.

Масса представительного элемента объема V_0 пористой среды есть

$$M_s = \rho_s^0 V_s + \rho_f [(1 - m) V_0 - V_s], \quad V_s = \text{const}, \quad \rho_s^0 = \text{const.}$$

Здесь M_s — масса твердой фазы; V_s — объем твердой фазы; ρ_s^0 — плотность твердой фазы в начальный момент времени. Тогда для плотности вещества скелета имеем

$$\rho_s = \frac{M_s}{(1 - m) V_0} = \frac{\varepsilon V_s}{(1 - m) V_0} + \rho_f, \quad \varepsilon = \rho_s^0 - \rho_f. \quad (6)$$

Делим уравнения (4) и (5) на ρ_f и складываем результаты. С учетом (6) получаем

$$\operatorname{div} \frac{\kappa \mathbf{V}_s}{V_0} + \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} \mathbf{V}_s + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\kappa}{V_0} \right) = 0. \quad (7)$$

Вид уравнения (7) немедленно следует из определений усадки $V_0 = V_0^{(0)} (1 + \theta)$ ($V_0^{(0)}$ — начальное значение представительного объема среды), скорости фильтрации $\mathbf{q} = m (\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_s)$ и введения обозначения $\varepsilon V_s^0 / \rho_f = \kappa$. Уравнение (7) легко преобразуется к виду

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + \kappa a (1 - \theta) (-\mathbf{V}_s \nabla \theta + \operatorname{div} \mathbf{V}_s) + \operatorname{div} \mathbf{V}_s - a \kappa e^{-\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \quad a = \frac{1}{V_0^{(0)}}. \quad (8)$$

Очевидно, что $\mathbf{V}_s \nabla \theta \rightarrow 0$ как величина второго порядка малости. Тогда из (8) следует

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} \mathbf{V}_s + \kappa a (1 - \theta) \left(\operatorname{div} \mathbf{V}_s - \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = 0. \quad (9)$$

Определим $\operatorname{div} \mathbf{V}_s = \frac{\partial \theta}{\partial t}$. Тогда из (9) окончательно получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \quad (10)$$

Перейдем теперь к уравнению баланса количества движения. Запишем его в форме уравнения равновесия всех фаз

$$G_{ij} = (1 - m) \sigma_{ij}^s - m p \delta_{ij} = (1 - m) (\sigma_{ij}^s + p \delta_{ij}) - p \delta_{ij}, \quad (11)$$

где G_{ij} — тензор внешней нагрузки; σ_{ij}^s — тензор истинных напряжений скелета; σ — след тензора истинных напряжений скелета; p — давление в жидкой фазе; δ_{ij} — дельта-символ Кронекера. После введения обозначения

$$(1 - m) (\sigma_{ij}^s + p \delta_{ij}) = \sigma_{ij}^f$$

уравнение (11) примет традиционный для теории фильтрационной консолидации вид

$$G_{ij} = \sigma_{ij}^f - p \delta_{ij}. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь процесс набухания подробнее. В рассуждениях будем опираться на концепцию осмотической ячейки, развитую в [2], в соответствии с которой в равновесных условиях осмотическое давление находится из равенства химических потенциалов ионов раствора внутри скелета и в транспортных порах:

$$\mu_k = \bar{\mu}_k, \quad k = 1, 2.$$

Здесь μ_k — химический потенциал иона в растворе (индекс 1 относится к катиону, индекс 2 — к аниону). Выбирая в качестве примера для расчета 1—1-электролит (катионы и анионы имеют заряд 1 в единицах элементарного заряда соответствующего знака) и используя стандартное представление для вида химического потенциала, получаем для концентраций ионов так называемое условие доннановского равновесия [3]

$$C_1 C_2 = C^2 = \bar{C}_1 \bar{C}_2. \quad (13)$$

Здесь C — концентрация электролита в транспортных порах; C_1 — концентрация катионов в растворе; C_2 — концентрация анионов в растворе.

Однако система уравнений остается не замкнутой. Используем для ее замыкания условие электрической нейтральности системы *твердая фаза скелета — поровый раствор*:

$$(\bar{C}_1 - \bar{C}_2) [(1 - m) V_0 - V_s] = e, \quad e' = \frac{e}{(1 - m) V_0 - V_s}, \quad (14)$$

где e — обменная емкость глины. Физически уравнение (14) означает, что твердые частицы скелета несут избыточный (для определенности отрицательный) электрический заряд. Этот заряд компенсируется катионами порового раствора, так что имеется избыток катионов по сравнению с анионами порового раствора, приводящий к появлению осмотических сил. Описанный сценарий целиком относится к таким набухающим системам, как глины, а также ряду других.

Решение уравнения (13) с учетом (14) есть

$$\bar{C}_1 = \frac{e'}{2} + \sqrt{\frac{e'^2}{4} + C^2}; \quad \bar{C}_2 = -\frac{e'}{2} + \sqrt{\frac{e'^2}{4} + C^2}. \quad (15)$$

Тогда из (15) для осмотического давления π имеем

$$\pi = \frac{RT}{2} \left(\sqrt{e'^2 + 4C^2} - 2C \right). \quad (16)$$

При $C = 0$

$$\pi = \frac{1}{2} RT e' = \frac{1}{2} \frac{RT e}{(1 - m) V_0 - V_s}. \quad (17)$$

На частицы скелета действуют две силы — осмотическое давление в поровом растворе и эффективное напряжение, препятствующее набуханию. Используя определения эффективного напряжения и осмотического давления, получаем очевидное соотношение

$$\sigma^f = (1 - m) \pi. \quad (18)$$

Таким образом, уравнения (17) и (18) замыкают общую систему уравнений механики процесса набухания.

Реологию набухающих систем исследуем на примере одномерной задачи набухания/усадки набухающего слоя под действием приложенной к слою постоянной нагрузки. Постановка задачи следует из уравнений (10), (12), (17), (18), дополненных законом Дарси для скорости фильтрации и определением набухания/усадки:

$$\Gamma = \sigma^f + p, \quad \Gamma = \text{const}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z} = 0; \quad (20)$$

$$q = -\frac{k}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad k = k_0 + Bm, \quad k_0 = \text{const}, \quad B = \text{const}; \quad (21)$$

$$V_0 = V_0^{(0)} (1 + \theta); \quad (22)$$

$$(1 - m) \pi = \sigma^f; \quad (23)$$

$$\pi = \frac{0,5eRT}{(1 - m) V_0 - V_s}. \quad (24)$$

Здесь Γ — модуль внешней нагрузки; k — проницаемость среды; η — вязкость воды; q — модуль скорости фильтрации \mathbf{q} .

Таким образом, искомыми функциями данной системы уравнений являются σ^f , p , ϑ , m , k , q , V_0 , π . Постоянными величинами модели являются Γ , η , k_0 , A , $V_0^{(0)}$, ρ_w , ρ_s , e , α , R , T . Граничные условия имеют вид (граничное условие первого рода)

$$p|_{z=0} = \Gamma, \quad p|_{z=z_0} = p_0 \quad (25)$$

либо (граничное условие второго рода)

$$\left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad p|_{z=z_0} = p_0. \quad (26)$$

Начальное условие есть условие равенства нулю начальной усадки:

$$\theta(z, 0) = 0.$$

Схема процесса усадки набухающего глинистого слоя приведена на рис. 1.

Вообще говоря, вид реологического соотношения в данном случае неизвестен, поскольку предположение об упругом характере реакции на приложенную нагрузку справедливо только для малых деформаций среды. Поступим следующим образом. Предположим, что транспортная пористость среды мала, так что можно считать $m \approx 0$ (это предположение справедливо во многих случаях, например, для таких природных набухающих систем, как глины). Поскольку одна переменная в системе (19)–(24) определена, то система становится замкнутой.

Всегда удобно проводить вычисления и дальнейший анализ результатов, приведя полученную систему уравнений к безразмерному виду. Для этого введем характерный масштаб времени T_0 , характерный масштаб длины L , безразмерное время $\tau = t/T_0$, а также безразмерный комплекс $\delta = \frac{eRT}{2\Gamma V_0^{(0)}}$. Тогда, обозначив $\bar{p} = p/\Gamma$, $\bar{\sigma} = \sigma^f/\Gamma$, $\bar{\pi} = \pi/\Gamma$, $y = z/L$, $v_s = V_s/V_0^{(0)}$, $v_0 = V_0/V_0^{(0)}$, $\chi = \frac{T_0 k \Gamma}{\eta L^2}$, получим из системы (19)–(24)

$$\bar{p} + \bar{\sigma} = 1; \quad (27)$$

$$\bar{\pi} = \frac{\delta}{v_0 - v_s}; \quad (28)$$

$$v_0 = 1 + \theta; \quad (29)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \chi \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^2}; \quad (30)$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\pi}. \quad (31)$$

Из (27)–(29) и (31) легко получить

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\delta}{(1 - \bar{p})^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau}. \quad (32)$$

Тогда из (30) с учетом (32) следует

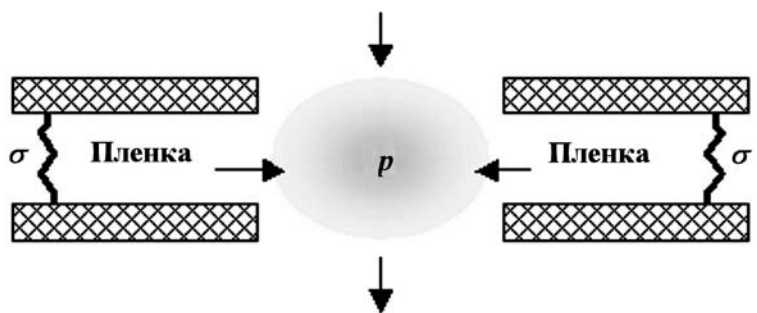


Рис. 1. Схема процесса консолидации глинистого слоя

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} = \bar{\chi} (1 - \bar{p})^2 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^2}, \quad \bar{\chi} = \frac{\chi}{\delta}. \quad (33)$$

Уравнение (33) хорошо известно в литературе как нелинейное уравнение теплопроводности. В рассматриваемом случае оно описывает процесс фильтрации воды (отжатие воды из слоя под действием постоянной нагрузки) в агрегированной пористой среде с набухающим скелетом. Характерный размер агрегатов пористой матрицы есть V_0 . Известны его точные и автомодельные решения [4]. Далее полученное уравнение решалось численно по схеме, предложенной в [5].

Итак, получено уравнение (33), описывающее распределение давления в слое глины. Проведем замену

$$\bar{p} = 1 - \varphi. \quad (34)$$

Теперь можно переписать уравнение (33) в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \bar{\chi} \varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \bar{\chi} = \frac{\chi}{\delta}.$$

Учитывая, что для глин характерно $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \rightarrow 0$, можно записать

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\chi} \varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad \bar{\chi} = \frac{\chi}{\delta}. \quad (35)$$

Таким образом, получено одномерное квазилинейное уравнение. Согласно [5] для него можно записать неявную разностную схему вида

$$\frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h} \left(a_{i+1}(y) \frac{\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i}{h} - a_i(y) \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}}{h} \right), \quad (36)$$

где $a_i(y) = 0,5 (k(y_{i-1}) + k(y_i))$. В рассматриваемом случае $k(\varphi) = \bar{\chi} \varphi^2$.

Схема (36) линейна относительно функции \hat{y} . Следовательно, на каждом временном слое вычисляется искомая функция через значения y на предыдущем временном слое. Известно, что погрешность аппроксимации схемы (36) составляет $O(\tau + h^2)$ [5]. Схема является абсолютно устойчивой, поэтому шаги выбираются из соображений точности.

Введем сетку, определенную в прямоугольнике $D = (0 \leq y \leq 1; 0 \leq t \leq 1)$. Пусть

$$w = \left\{ (y_i, t_k) : y_i = ih_y, t_k = k\tau, h_y = \frac{1}{N_y}, \tau = \frac{1}{N_t} \right\}.$$

Возьмем число узлов для разбиения по оси y равным 100, число узлов для разбиения по оси t равным 10 000. Таким образом, погрешность аппроксимации схемы составляет $O(\tau + h^2) = O(0,0001)$.

Запишем схему (36) для уравнения (35):

$$\begin{aligned} a_i(\varphi) \hat{\varphi}_{i-1} \tau - \hat{\varphi}_i \left(a_{i+1}(\varphi) \tau + \tau a_i(\varphi) + h_y^2 \right) + a_{i+1}(\varphi) \tau \hat{\varphi}_{i+1} &= -\varphi_i h_y^2, \\ a_i(\varphi) &= 0,5 (\bar{\chi} \varphi_{i-1}^2 + \bar{\chi} \varphi_i^2), \\ \varphi_i &= \varphi(y_i). \end{aligned} \quad (37)$$

Для разрешения полученной системы использовался метод трехдиагональной прогонки:

$$A_i f_{i-1} - C_i f_i + B_i f_{i+1} = -F_i.$$

Запишем значения коэффициентов A, B, C, F для рассматриваемой задачи, учитывая что $f_i = \hat{\varphi}_i$. Из (37) легко находятся соответствующие соотношения. Очевидно, что

$$A_i = a_i(\varphi) \tau; \quad B_i = a_{i+1}(\varphi) \tau; \quad C_i = a_{i+1}(\varphi) \tau + \tau a_i(\varphi) + h_y^2; \quad F_i = \varphi_i h_y^2.$$

Как известно, для нахождения коэффициентов прогонки систему (37) следует дополнить граничными условиями. Граничные условия первого рода для исходной задачи были определены соотношениями (25). Перейдя к терминам безразмерной задачи, запишем

$$p|_{y=0} = c_1; \quad p|_{y=1} = c_2,$$

где соответствующие константы для расчетов были определены следующим образом: $c_1 = \Gamma/\Gamma = 1$, $c_2 = p_0/\Gamma = 0$.

Приняв во внимание (34), запишем условия на границе для искомой функции φ :

$$\varphi|_{y=1} = 1 - p|_{y=1} = \varphi_{N_y} = 1; \quad \varphi|_{y=0} = 1 - p|_{y=0} = \varphi_0 = 0.$$

Далее применялся стандартный вариант метода прогонки, т. е. построение прогоночных коэффициентов вида

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}.$$

Соответственно первые коэффициенты прогонки вычислялись через граничные условия. В процессе обратного хода прогонки вычислялись значения давления в глинистом слое. Усадка вычислялась после нахождения давления. Из (28), (29), (31) следует

$$\theta = v_s - 1 + \frac{\delta}{1 - \bar{p}}.$$

Отсюда находится величина усадки.

Поскольку экспериментальные данные о распределении давления и усадки в деформируемом слое и данные по их физико-химическим свойствам, которые должны определяться параллельно в реологических опытах, зачастую отсутствуют, значения параметров модели выбирались из соображений удобства расчетов. Поэтому выводы данного раздела носят в большей степени качественный характер. Вариация значений параметров не меняет вида получаемых зависимостей.

Расчеты подтвердили ожидания физического характера, предъявляемые к модели. Так, очень интересным, на взгляд авторов, является профиль давления для случая использования граничного условия (25). Видно, что распределение давления по слою зависит от величины $\bar{\chi}$ (рис. 2).

Приведенный график построен для некоторого промежуточного момента времени. Можно наблюдать, что с ростом $\bar{\chi}$ распределение давления приближается к стационарному, причем вид кривой стационарного распределения давления во всех случаях один и тот же, вне зависимости от заданной величины $\bar{\chi}$. Следует отметить, что наиболее близкой к кривой стационарного распределения давления является кривая 1 (см. рис. 2).

Своеобразный вид имеют графики распределения усадки (рис. 3). Видно, что зона входа потока соответствует зоне набухания (положительные значения θ), а зона отвода потока — зоне усадки (отрицательные θ), так что деформация оказывается неоднородной по профилю. Интересно, что графики усадки для двух видов граничных условий практически совпадают. Дело в том, что для второго случая (условие (26)), вода начинает выжиматься из слоя. Если на левой границе ей есть, куда вытекать, и образуется зона усадки, то на правой границе воде вытекать некуда и формируется зона набухания.

Графики на рисунке построены для различных моментов времени. Видно, что в течение всего процесса характерный вид кривой не меняется, меняется лишь область положительных усадок. На больших временах большая часть значений усадки становится отрицательной, что соответствует логике процесса. При этом важно отметить, что распределение усадки по слою значительно зависит от параметра δ . На рис. 4 приведен график зависимости распределения усадки по слою от величины δ для некоторого промежуточного момента времени.

На рис. 5 приведены соответствующие графики зависимости средней по слою скорости деформаций от времени для различных значений δ . В ходе численных экспериментов было установлено, что величина характерного пика напрямую зависит от δ : чем меньше δ , тем меньше пик. Можно отметить хорошее качественное совпадение поведения приведенных кривых с данными эксперимента [6].

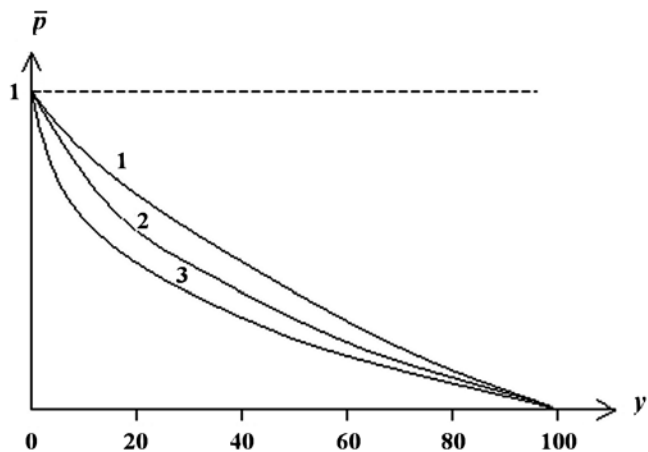


Рис. 2. Вид кривой распределения давления в слое: 1 — $\bar{\chi} = 10$; 2 — $\bar{\chi} = 5$; 3 — $\bar{\chi} = 1$

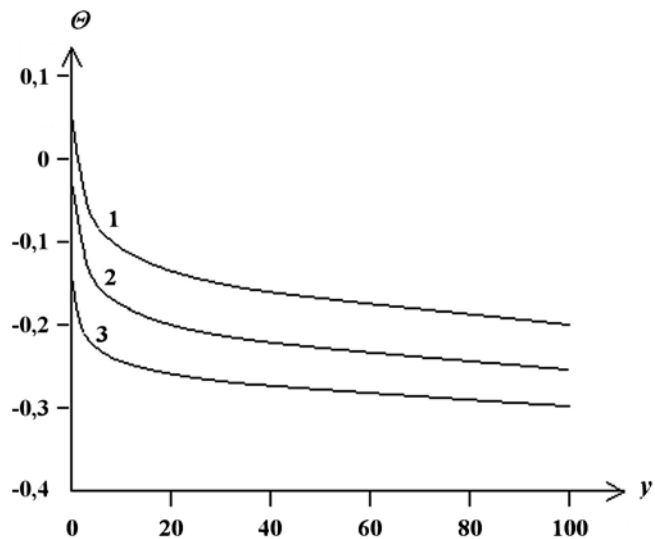


Рис. 3. Распределение усадки по слою в различные моменты времени: 1 — в начальной фазе процесса; 2 — в середине процесса; 3 — в завершающей стадии

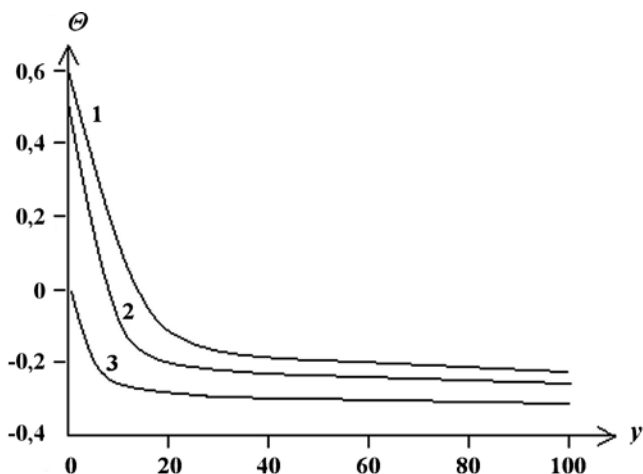


Рис. 4. Распределение усадки по слою в зависимости от δ : 1 — $\delta = 0,08$; 2 — $\delta = 0,05$; 3 — $\delta = 0,02$

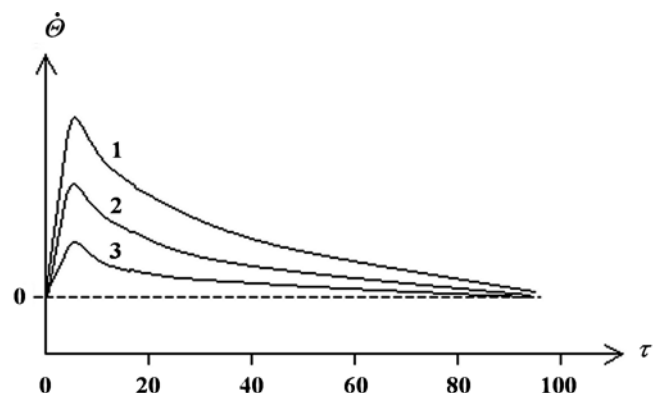


Рис. 5. Зависимости средней по слою скорости деформации от времени для различных значений δ : 1 — $\delta = 1 \cdot 10^{-2}$; 2 — $\delta = 7 \cdot 10^{-3}$; 3 — $\delta = 2 \cdot 10^{-3}$

Чтобы проверить точность вычислений, осуществленных с помощью рассмотренной численной схемы, были проведены сравнения с точным решением для нелинейных нестационарных уравнений типа

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(T^m \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Точное решение было взято в виде $T(x) = (Ax + B)^{1/(1+m)}$, где A, B — произвольные постоянные величины [4]. Эксперименты показали наличие практически точного количественного совпадения численного и точного решений задачи.

Для иллюстрации хорошего совпадения результатов расчетов по модели воспользуемся стационарным приближением модели (19)–(24). Предположив, что процесс набухания/усадки завершен и, таким образом, $p = 0$, запишем на основании (19)–(24)

$$\pi = \frac{eRT}{2(V_0 - V_s)}, \quad \sigma^f = \pi, \quad \sigma^f = \Gamma.$$

Отсюда следует

$$\frac{\rho_w e RT \rho_s V_s}{2 \rho_s V_s [\rho_w (V_0 - V_s)]} = \Gamma.$$

Величина

$$\frac{\rho_w (V_0 - V_s)}{\rho_s V_s} = w_{\text{вес}}$$

называется относительной весовой влажностью [7] и характеризует вес содержащейся в глине воды по отношению к весу собственно твердых частиц скелета (вес глины в сухом состоянии).

С учетом введенных обозначений можно записать

$$\frac{\rho_w e RT}{2 \rho_s V_s w_{\text{вес}}} = \Gamma$$

и получить, таким образом, зависимость так называемой пластической прочности глины от влажности [8]. Имеется (рис. 6) хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных.

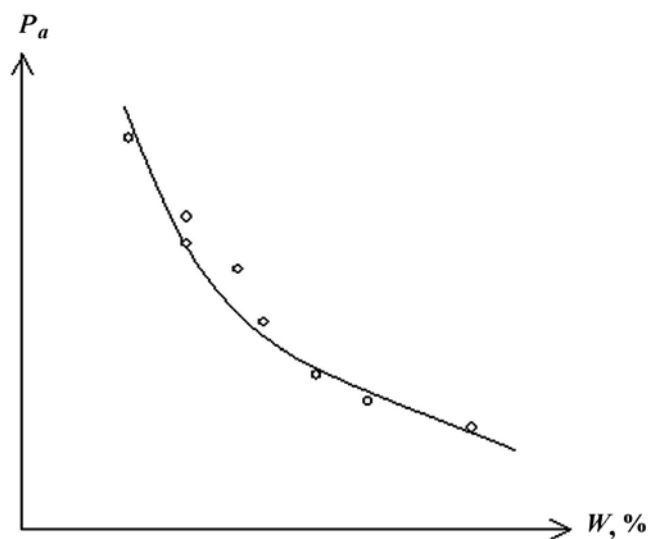


Рис. 6. Зависимость пластической прочности от влажности: — — расчет; \circ — эксперимент

2. Моделирование водоотдачи глинистого слоя в пласт, вскрытый скважиной

В разд. 1 была предложена модель описания реологических свойств пористых сред с набухающим скелетом, важная для понимания физико-механического поведения природных набухающих сред в целом. Рассмотрим теперь задачу о водоносном пласте, вскрытом симметричной совершенной скважиной и перекрытом сверху мощной толщей набухающих глинистых пород (рис. 7). На рисунке использованы обозначения: r_c — внешний радиус скважины; R_k — радиус контура водного пласта; H — толщина водного пласта; χ_a — коэффициент пьезопроводности водного пласта; J — поток воды из глинистого слоя в водный пласт.

Выбор такого объекта не случаен. Известно, например, что при длительной эксплуатации месторождений пресных подземных вод, т. е. в период времени, близкий к моменту исчерпания гарантированных запасов воды, остро встает необходимость учета дополнительного водопритока в пласт из лежащей выше глинистой толщи. Прогноз такого притока позволил бы увеличить срок эксплуатации водозабора. Проблема становится особенно актуальной в последнее время в связи с возросшим загрязнением природных подземных вод, ведущим к существенному снижению сроков эксплуатации действующих водозаборов. Решение этой задачи отвечает второй цели исследования, о которой речь шла выше.

Уравнение фильтрации сжимаемой жидкости в объемно-сжимаемой пористой среде [9] имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi_a \Delta p,$$

где p — давление в водоносном пласте; χ_a — коэффициент пьезопроводности водоносного пласта.

Согласно схеме Мятиева—Гиринского [10] фильтрация в слабопроницаемом глинистом слое происходит вертикально, а в водоносном пласте — горизонтально. Следовательно, в цилиндрической системе координат для притока к симметричной совершенной скважине имеем

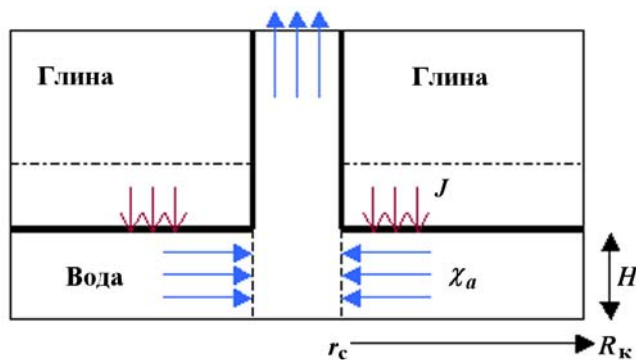


Рис. 7. Схема процесса водоотдачи глинистого слоя в пласт, вскрытый скважиной

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi_a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \chi_a \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (38)$$

Усредняя уравнение (38) по высоте пласта (по координате z от 0 до H), получаем следующее уравнение для давления p :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi_a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + J, \quad J = \frac{\chi_c}{H} \frac{\partial w}{\partial z} (z = 0), \quad (39)$$

где J — поток воды из глинистого слоя. Граничные условия на скважине $r = r_c$ и контуре питания $r = R_k$ имеют соответственно вид

$$p(r_c) = p_c; \quad p(r_k) = p_k.$$

Начальное распределение давления в водоносном пласте зададим зависимостью

$$p(r, 0) = (p_k - p_c) \left(1 - \exp \left(-\frac{r - r_c}{r_c} \right) \right) + p_c.$$

Введем безразмерные переменные $\bar{\sigma} = \sigma^f / \Gamma$; $\bar{w} = w / \Gamma$; $\bar{\pi} = \pi / \Gamma$; $\bar{\tau} = t / T_0$; $\bar{q} = q / U$; $\bar{z} = z / z_0$; $T_0 U / z_0 \approx 1$. Для оценки характерной скорости U имеем $U = K \Gamma / (\rho_w g z_0)$, $\rho_w g k / \eta = K$, где ρ_w — плотность воды; g — ускорение силы тяжести. Принимая $\Gamma \approx 2$ МПа, $z_0 \approx 1$ м, можно примерно оценить значение U . Коэффициент фильтрации K является физической характеристикой пласта. По экспериментальным данным для глин значение коэффициента фильтрации составляет $\approx 10^{-3}$ м/сут.

В итоге запишем систему уравнений (27)—(31) с учетом обозначения давления в глинистом слое (будем его обозначать через w):

$$\bar{\sigma} + \bar{w} = 1; \quad (40)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{z}} = 0; \quad (41)$$

$$\bar{q} = -\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}; \quad (42)$$

$$f = V_s (\delta_1 \exp \theta - 1), \quad \delta_1 = \frac{V_0^{(0)}}{V_s}, \quad V_0^{(0)} = 1, \quad V_s = \frac{2}{3}; \quad (43)$$

$$\bar{\pi} = \bar{\sigma}; \quad (44)$$

$$\bar{\pi} = \frac{\delta}{\delta_1 \exp \theta - 1}, \quad \delta \approx 2. \quad (45)$$

Функция f отвечает за содержание воды в составе твердой фазы.

Полученную систему уравнений необходимо дополнить начальными и граничными условиями. Начальные условия запишем в следующем виде:

$$\bar{w}(\bar{z}, 0) = (\bar{p} - 1) \exp(-\bar{\alpha} \bar{z}) + 1, \quad \bar{\alpha} = 10^{-3}. \quad (46)$$

Исходя из соображений, изложенных в разд. 1, для верхней и нижней границ глинистого слоя соответственно запишем

$$\bar{w}(0, \tau) = 1; \quad \bar{w}(1, \tau) = \bar{p}. \quad (47)$$

Далее система уравнений (40)—(47) решается численно.

Запишем уравнение (39) в безразмерном виде. Для этого введем новые переменные $\bar{p} = p / \Gamma$; $\bar{r} = r / R_k$; $\bar{J} = J / \Gamma$, где $R_k \approx 100$ м. Тогда

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\tau}} = \frac{\chi_a z_0}{U R_k^2} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{z_0 \bar{J}}{U}, \quad \bar{J} = \frac{k}{\beta_a \eta H z_0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = \frac{k \rho_w g}{\eta \beta_a \rho_w g H z_0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = \frac{K}{\beta_a \rho_w g H z_0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}.$$

Проведя несложные математические преобразования, можно найти вид безразмерного уравнения для давления в водоносном пласте:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\tau}} = A \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) + B \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}. \quad (48)$$

Оценим каждый из комплексов:

$$A = \frac{\chi_a z_0}{U R_k^2}; \quad B = \frac{K}{U \beta_a g \rho_w H}; \quad U = K \frac{\Gamma}{\rho_w g z_0} \Rightarrow B = \frac{z_0}{\beta_a \Gamma H}.$$

Поскольку $A = 5 \cdot 10^2$, уравнение (48) принимает вид

$$\bar{A} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \bar{A} = \frac{A}{B}.$$

Заметим, что последнее уравнение получено из (48) с учетом малости множителя $\frac{1}{B}$. Граничные условия (первого рода):

$$\bar{p}(\varepsilon, \bar{\tau}) = \bar{p}_\varepsilon; \quad \bar{p}(R_k, \bar{\tau}) = \bar{p}_k.$$

Численная схема для вычисления параметров глинистого слоя была описана в разд. 1. С помощью нее вычисляется распределение давления в глине, а также усадка глинистого слоя. Теперь перейдем к описанию разностных уравнений для водоносного пласта.

После замены переменных

$$x = \ln(r), \quad r = \exp(x),$$

получим

$$\bar{A} \exp(-2x) \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (49)$$

Очевидно, что это уравнение легко поддается численному решению с помощью метода прогонки.

Запишем разностный аналог уравнения (49):

$$\bar{A} \exp(-2j h_x) \frac{\bar{p}[j-1] - 2\bar{p}[j] + \bar{p}[j+1]}{h_x^2} + \frac{w[j, 1] - w[0, j]}{h_z} = 0. \quad (50)$$

Для удобства преобразуем уравнение (50) к виду

$$\bar{p}[j-1] - 2\bar{p}[j] + \bar{p}[j+1] = - \frac{h_x^2 (w[j, 1] - w[0, j])}{h_z \bar{A} \exp(-2j h_x)}.$$

Теперь можно легко записать для метода прогонки

$$A_i = 1; \quad B_i = 1; \quad C_i = 2; \quad F_i = \frac{(w[j, 1] - w[0, j]) h_x^2}{h_z \bar{A} \exp(-2j h_x)}.$$

Чтобы завершить рассмотрение численной схемы задачи, необходимо выписать значения шагов и способ задания узлов сетки:

$$\omega = \left\{ (x_j, z_i, t_l) : x_j = j h_x, h_x = \frac{\ln(\varepsilon)}{N_x}; z_i = i h_z, h_z = \frac{1}{N_z}; t_l = l h_\tau, h_\tau = \frac{1}{N_t} \right\}.$$

Численные эксперименты показали, что схема является достаточно устойчивой к изменению частоты разбиения сетки.

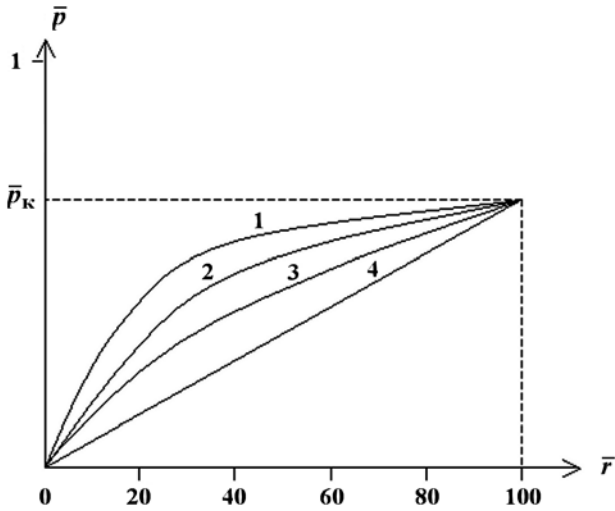


Рис. 8. Распределение давления в пласте в разные моменты времени: 1 — начальный момент времени; 2—3 — промежуточные моменты времени; 4 — стационарное распределение

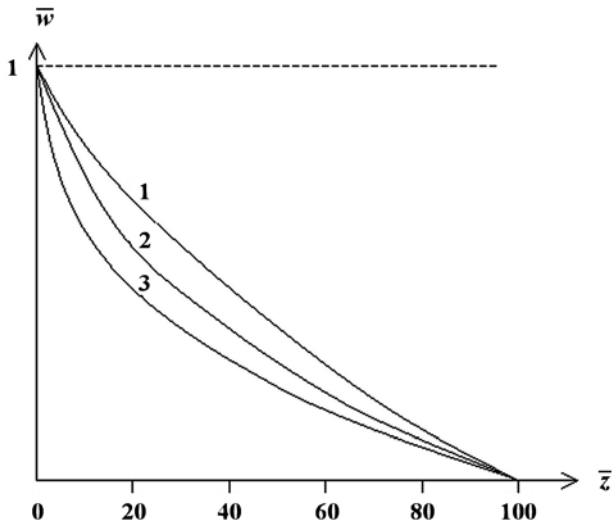


Рис. 9. Распределение давления в глине в разные моменты времени: 1 — начальный момент времени; 2 — промежуточный момент времени; 3 — стационарное распределение

Общая идея численного решения заключалась в следующем. На каждом временном шаге сначала решалась задача нахождения давления в водоносном пласте, затем в каждой точке разбиения оси x решалась задача для глинистого слоя, причем в качестве граничного условия задавалось соответствующее давление. Соответственно поток воды из глинистого слоя в водоносный пласт находился на каждом временном шаге в ходе вычисления значений давления в водоносном пласте.

На рис. 8 приведены графики распределения давления в пласте в разные моменты времени. Шаг разбиения по r выбран 10^{-2} , так что значение $r = 1$ соответствует 100 шагам.

На рис. 9 приведено распределение давления в слое глины в разные моменты времени.

Зависимости средней усадки от радиуса в разные моменты времени приведены на рис. 10.

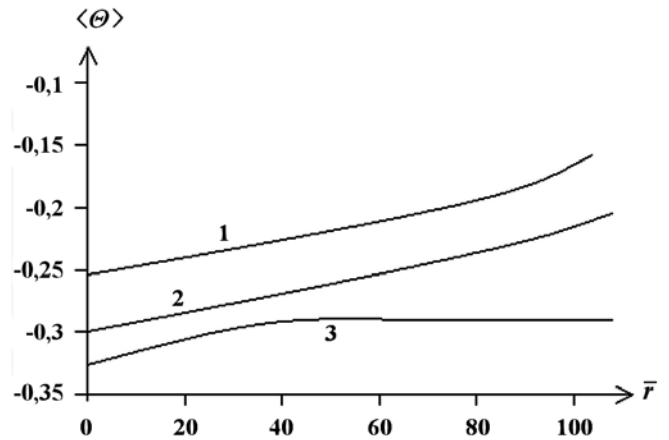


Рис. 10. Зависимости средней усадки от радиуса в разные моменты времени: 1 — в начале процесса; 2 — в некоторый промежуточный момент; 3 — в конечный момент времени

3. Моделирование процессов при подземном захоронении жидких отходов

В разд. 1 и 2 были предложены модель описания реологических свойств пористых сред с набухающим скелетом и модель нелинейных эффектов водоотдачи набухающего глинистого слоя при отборе воды из совершенной скважины. Теперь обратимся к описанию процессов массопереноса при закачке в пласт, перекрытый водоизолирующим глинистым слоем (водупором). Массоперенос в глинистом слое будем описывать в приближении бипористой среды [1].

Запишем уравнение баланса массы для концентрации примеси в глинистом слое. Будем считать, что относительный объем транспортных (хорошо проницаемых) пор в глинистом слое m_c пренебрежимо мал, так что емкостные свойства глины определяются емкостью блоков. Таким образом, можно записать

$$\frac{\partial (q_c C)}{\partial z} + \frac{\partial (m_{c,b} C_{c,b})}{\partial t} = 0.$$

Индекс c относится к транспортным порам глинистого слоя, а индекс $c.b.$ — к глинистым блокам (агрегатам). Для катионов и анионов порового раствора в глинистых блоках было получено ранее

$$\bar{C}_1 = \frac{e'}{2} + \sqrt{\frac{e'^2}{4} + C^2}; \quad \bar{C}_2 = -\frac{e'}{2} + \sqrt{\frac{e'^2}{4} + C^2},$$

где $e' = \frac{2\pi}{RT}$; $\pi = \frac{eRT}{2(V_0 - V_s)}$. Замечая, что $C_{c,b} = \bar{C}_1 + \bar{C}_2$, запишем

$$\frac{\partial (q_c C)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 - \frac{V_s}{V_0}\right) \sqrt{(e')^2 + 4C^2} \right] = 0.$$

Как и для глинистого слоя, для пласта требуется ввести еще одно уравнение для нахождения новой неизвестной величины — концентрации примеси в фильтрующемся растворе. Запишем уравнение баланса массы концентрации примеси в пласте:

$$m_a \frac{\partial c_w}{\partial t} + \operatorname{div} (q c_w) = 0. \quad (51)$$

Индекс a отмечает принадлежность соответствующего параметра водоносному пласту; c_w — концентрация примеси, закачиваемой в водоносный пласт. В радиальной системе координат уравнение (51) примет вид

$$m_a \frac{\partial c_w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (q_z c_w) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r c_w) = 0.$$

Усредняя полученное уравнение по z и учитывая, что $q_r = -\frac{k_a}{\eta} \frac{\partial p}{\partial r}$; $q_z(z_0, t) = -\frac{k_c}{\eta} \frac{\partial w}{\partial z}(0, t)$, получаем

$$m_a \frac{\partial c_w}{\partial t} - \frac{k_a}{\eta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} c_w \right) = c_w \frac{k_c}{H\eta} \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (52)$$

С учетом полученных ранее результатов запишем безразмерные уравнения процесса для глинистого слоя. Будем считать, что начальное значение концентрации в пласте известно и одинаково во всех точках пласта. Необходимо также учесть, что выражение для величины e' будет выглядеть как $e' = \frac{2\pi c_0}{\delta_4 \Gamma}$; $\bar{c}_c = \frac{C}{c_0}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} + \bar{w} &= 1; \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{q}_c}{\partial \bar{z}} &= 0; \\ \bar{q}_c &= -\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}; \\ f &= V_s (\delta_1 \exp \theta - 1), \quad \delta_1 = \frac{V_0^{(0)}}{V_s}, \quad V_0^{(0)} = 1, \quad V_s = \frac{2}{3}; \\ \bar{\pi} &= \frac{\delta}{\delta_1 \exp \theta - 1}, \quad \delta \approx 2; \\ \frac{\partial f}{\partial \tau} &= \bar{\alpha} (\bar{\Pi} - \bar{\sigma}), \quad \bar{\alpha} = T_0 \alpha \Gamma; \\ \bar{\Pi} &= \sqrt{4\bar{\pi}^2 + \delta_4^2 \bar{c}_c^2} - \delta_4 \bar{c}_c; \\ \frac{\partial (\bar{q}_c \bar{c}_c)}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(1 - \frac{1}{\delta_1 \exp \theta}\right) \sqrt{\frac{4\bar{\pi}^2}{\delta_4^2} + 4\bar{c}_c^2} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Полученную систему уравнений необходимо замкнуть при помощи граничных и начальных условий:

$$\begin{aligned}\bar{w}(\bar{z}, \bar{r}, 0) &= \bar{p}(\bar{r}, 0); & \bar{c}_c &= 0. \\ \bar{c}_c(0, \tau) &= \bar{c}_w; & \bar{w}(0, \tau) &= \bar{p}; & \bar{w}(1, \tau) &= \delta_5.\end{aligned}$$

Заметим, что вместо условия равновесия (18) здесь используется уравнение кинетики набухания (53), α — константа скорости набухания.

Получим безразмерный вид уравнения массопереноса в пласте. Поскольку начальное значение концентрации в пласте на входе есть c_0 и $\bar{c}_w = c_w/c_0$, имеем из (52)

$$m_a \frac{\partial c_w}{\partial t} - \frac{k_a z_0 \Gamma}{\eta U r_\infty^2} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \bar{c}_w \right) = \bar{c}_w \frac{k_c \Gamma}{H \eta U} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}.$$

Вводя обозначения $E = \frac{k_a z_0 \Gamma}{\eta U r_\infty^2} \approx 10^{-2}$; $F = \frac{k_c \Gamma}{H \eta U} = \frac{k_c \Gamma \rho_w g}{H \eta U \rho_w g} = \frac{K \Gamma}{H U \rho_w g} \approx 1$ и учитывая введенные ранее обозначения, получаем систему уравнений для пласта:

$$\begin{aligned}\bar{A} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} &= 0, & \bar{A} &= 10^{-1}; \\ m_a \frac{\partial \bar{c}_w}{\partial t} - E \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \bar{c}_w \right) &= \bar{c}_w F \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}.\end{aligned}$$

Начальные условия для концентрации в пласте:

$$\bar{c}_w(\bar{r}, 0) = 0.$$

Граничные условия первого рода:

$$\bar{c}_w(\varepsilon, \tau) = 1; \quad \bar{p}(\varepsilon, \tau) = \frac{p_b}{\Gamma}; \quad \bar{w}(1, \tau) = \delta_5.$$

Граничные условия второго рода:

$$\bar{c}_w(\varepsilon, \tau) = 1; \quad q_r(\varepsilon, \tau) = \text{const}; \quad \bar{w}(1, \tau) = \delta_5.$$

Задача была решена численно, использовалась та же разностная схема, что и в разд. 2.

Представляют интерес графики распределения концентрации примеси в пласте и в глине по радиусу. Если график распределения концентрации примеси в пласте по радиусу (рис. 11) имеет достаточно традиционный вид, то график распределения осредненной по высоте слоя глины концентрации примеси по радиусу (рис. 12) необычен. Из него следует, что среднее значение концентрации

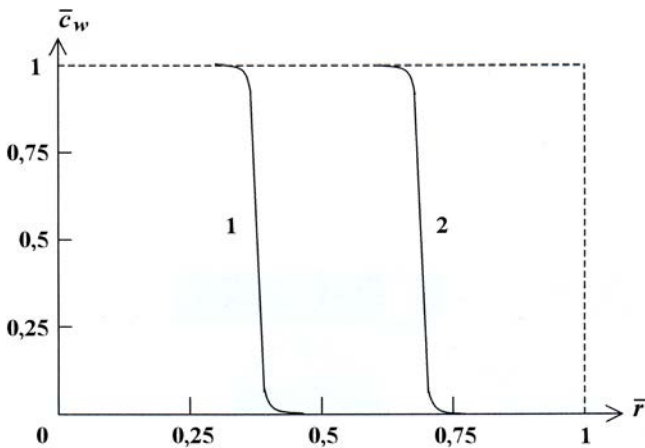


Рис. 11. Зависимость концентрации примеси в пласте от радиуса: 1 — $\tau = 0,5\tau_{st}$; 2 — $\tau = \tau_{st}$ (τ_{st} — время выхода на стационарную стадию)

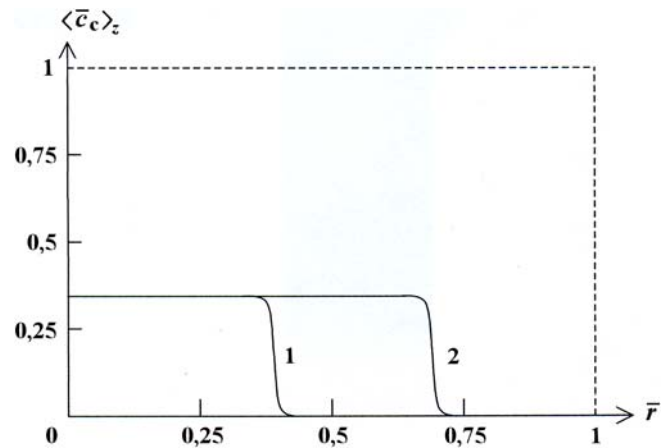


Рис. 12. Зависимость концентрации примеси в глине от радиуса: 1 — $\tau = 0,5\tau_{st}$; 2 — $\tau = \tau_{st}$ (τ_{st} — время выхода на стационарную стадию)

примеси в слое глины всегда меньше пластовых значений. Это обусловлено нелинейными соотношениями для поглощения примеси микропорами глины и не является артефактом усреднения.

Другая особенность процесса проявилась в различных значениях усадки глины без учета и с учетом эффекта набухания ($\delta = 0$ или $\delta \neq 0$ соответственно). Так, при учете эффекта набухания усадка слоя меньше, чем в отсутствие действия сил набухания. Таким образом, закачка загрязненных растворов в пласт будет сказываться прежде всего на деформировании разделяющего глинистого слоя, а не на динамике проникновения раствора через глину. Физически этот эффект вполне понятен. Усадка в предлагаемой модели реализуется через отжим воды из глинистых блоков. Осмотическое давление препятствует отжиму воды, что и проявляется в меньших значениях усадки глинистого слоя.

Заключение

Подводя итог, остановимся на основных результатах настоящей работы:

1. На основе методов механики и термодинамики набухающих систем разработаны модели массопереноса в природных набухающих средах и в рамках этих моделей исследовано влияние различных факторов на физико-механические и физико-химические характеристики этих сред.
2. На основе разработанных моделей решена задача об отборе воды из водоносного пласта, перекрытого взаимодействующим с ним слабопроницаемым набухающим глинистым слоем. Решение этой задачи представляет большой практический интерес для прогноза длительной эксплуатации водозаборных скважин водоносных пластов.
3. На базе методов теории массопереноса в набухающих средах разработана модель процесса закачки в пласт, перекрытый набухающим глинистым слоем, раствора, содержащего загрязняющие природную среду компоненты (задача о подземном захоронении жидких загрязнений).

Работа выполнена при поддержке МНТЦ (гранты 3193 и 3590).

Список литературы

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
2. Храмченков М. Г. Элементы физико-химической механики природных пористых сред. Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2003.
3. Гуггенгейм Э. М. Современная термодинамика, изложенная по методу У. Гиббса. М.-Л.: Госхимиздат, 1941.
4. Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М.: Факториал, 1998.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
6. Круглицкий Н. Н. Основы физико-химической механики. Киев: Вища школа, 1976.
7. Горькова И. М., Корбанова И. Г., Окнина Н. А. и др. Природа прочности и деформационные особенности глинистых пород в зависимости от условий формирования и увлажнения. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
8. Ничипоренко С. П., Круглицкий Н. Н., Панасевич А. А., Хилько В. В. Физико-химическая механика дисперсных минералов. Киев: Наукова думка, 1974.
9. Николаевский В. Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996.
10. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.

Статья поступила в редакцию 18.04.08.
