

УДК 517.9:533.7:536.46

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ И ДИСПЕРСИИ НА ДОПУСТИМОСТЬ СКАЧКОВ РАЗРЕЖЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИХ НА ФРОНТЕ ЭНЕРГОВЫДЕЛЕНИЯ, БЕГУЩЕГО С ЗАДАННОЙ МАССОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Ю. А. Бондаренко
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Исследуются свойства скачков разрежения, возникающих на фронте точечного энерговыделения, бегущего с заданной массовой скоростью. Решения с такими скачками появляются при численном моделировании детонации Чепмена—Жуге на подробных сетках. Найдены условия допустимости скачков разрежения в трех случаях: 1) при использовании размазанного бегущего энерговыделения; 2) при использовании для размазывания скачка вязкости, "работающей" на разрежении; 3) при размазывании скачка аппроксимационной дисперсией, возникающей при использовании разностной схемы *крест*, имеющей второй порядок погрешности аппроксимации.

Ключевые слова: нормальная детонация, бегущее энерговыделение, автомодельное решение, скачок разрежения, допустимые скачки, эволюционные скачки, вязкость, дисперсия.

Введение

Данная работа является продолжением [1].

Говорят, что разрыв *допустимый* (точнее, допускается данным физическим процессом), если расширенная система уравнений (с учетом этого физического процесса) имеет непрерывное, бегущее с постоянной скоростью решение, предельные параметры которого (при $x \rightarrow \pm\infty$) совпадают со значениями параметров по обе стороны разрыва. Такое непрерывное решение называется *структурой разрыва*. Здесь важно, что допустимость скачка зависит от того физического процесса, который используется для описания структуры разрыва.

Многочисленные примеры влияния процессов, происходящих внутри размазанных разрывов, на параметры разрывных решений описаны в обзоре [2], там же приведена подробная библиография по этому вопросу. Похожая задача рассматривалась в работах [3–5], где, в частности, объяснена зависимость параметров ударных волн разрежения в веществах с невыпуклыми уравнениями состояния от используемой численной методики. В этих работах показано, что учет разных физических процессов, как то: вязкость, дисперсия или кинетика фазовых переходов — приводит к разным параметрам ударных волн разрежения, которые появляются в веществах с невыпуклыми уравнениями состояния. Когда условий типа Ренкина—Гюгио не хватает для однозначного определения параметров разрывных решений, для отбора "правильных" решений следует привлекать дополнительные физические процессы, размазывающие скачок и влияющие на структуру этих размазанных скачков. Требование существования размазанной структуры скачка часто дает дополнительные условия на скачке, которые называются *условиями допустимости скачков* и позволяют выделить единственное разрывное решение.

1. Структура размазанного непрерывного скачка разрежения и условия его допустимости для размазанного энерговыведения, бегущего с заданной массовой скоростью, при отсутствии вязкости

При рассмотрении источника тепловой энергии, бегущего с заданной массовой скоростью, удобно использовать уравнения одномерной плоской газовой динамики, записанные в лагранжевых массовых координатах:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial u}{\partial m}, \quad V = \frac{1}{\rho}; \quad (1)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial (P + \varepsilon)}{\partial m}; \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(E + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial ((P + \varepsilon) u)}{\partial m} = q(m - \sigma t), \quad (3)$$

где $q(\zeta)$, $\zeta = m - \sigma t$, $\sigma = \text{const} > 0$, есть заданный распределенный, достаточно гладкий (как минимум непрерывный с ограниченной первой производной) источник тепловой энергии, бегущий по газу с постоянной заданной массовой скоростью σ и обладающий свойством

$$q(\zeta) = 0, \quad |\zeta| \geq \frac{\Delta m_0}{2}; \quad q(\zeta) > 0, \quad |\zeta| < \frac{\Delta m_0}{2}. \quad (4)$$

При этом величина

$$Q_0 = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} q(\zeta) d\zeta \quad (5)$$

равна калорийности единицы массы вещества (ВВ), выделяющейся при таком навязанном горении, а Δm_0 есть положительный масштаб линейной массы, на которую размазан точечный источник энергии.

Структурой скачка [2] будем называть непрерывное решение уравнений газовой динамики (1)–(3), имеющее вид

$$f(t, m) = f(\zeta), \quad \zeta = m - \sigma t, \quad f = V, \rho, u, E, P, \dots \quad (6)$$

и обладающее свойствами

$$\begin{aligned} u(\zeta) &\rightarrow u_1, & \zeta &\rightarrow +\infty; & u(\zeta) &\rightarrow u_2, & \zeta &\rightarrow -\infty; \\ V(\zeta) &\rightarrow V_1, & \zeta &\rightarrow +\infty; & V(\zeta) &\rightarrow V_2, & \zeta &\rightarrow -\infty; \\ P(\zeta) &\rightarrow P_1, & \zeta &\rightarrow +\infty; & P(\zeta) &\rightarrow P_2, & \zeta &\rightarrow -\infty; \\ \frac{du}{d\zeta} &\rightarrow 0, & \zeta &\rightarrow \pm\infty; & \frac{dP}{d\zeta} &\rightarrow 0, & \zeta &\rightarrow \pm\infty, \end{aligned} \quad (7)$$

где предельные значения f_1 и f_2 , $f = u, V = 1/\rho, P$ удовлетворяют уравнениям Ренкина—Гюгонио

$$\begin{aligned} \rho_1 (D_2 - u_1) &= \rho_2 (D_2 - u_2) = \sigma; \\ (P_1 - P_2) + \sigma^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) &= 0; \\ (E_1 - E_2) + \frac{P_1 + P_2}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + Q_0 &= 0. \end{aligned}$$

Если структура размазанной ударной волны в указанном смысле существует, то при $\Delta m_0 \rightarrow +0$ построенное непрерывное решение сходится в слабом смысле к соответствующему кусочно-постоянному разрывному решению. Такое разрывное решение (скачок, или ударная волна сжатия или разрежения) называется допустимым.

После подстановки (6) в (1)–(3) получим три обыкновенных дифференциальных уравнения, которые с учетом краевых условий (7) один раз легко интегрируются:

$$u - u_1 = \sigma (V_1 - V); \quad (8)$$

$$P + \varepsilon - P_1 = \sigma^2 (V_1 - V); \quad (9)$$

$$(E_1 - E) + \frac{P_1 + P + \varepsilon}{2} (V_1 - V) + Q_0 g(\zeta) = 0, \quad (10)$$

$$g(\zeta) = \frac{1}{\sigma Q_0} \int_{\zeta}^{+\infty} q(\zeta') d\zeta' = \begin{cases} 0, & \zeta \geq \frac{\Delta m_0}{2}; \\ > 0, & -\frac{\Delta m_0}{2} < \zeta < \frac{\Delta m_0}{2}; \\ 1, & \zeta \leq -\frac{\Delta m_0}{2}. \end{cases} \quad (11)$$

Функция $g(\zeta)$ имеет гладкость на единицу больше, чем гладкость распределенного источника энергии $q(\zeta)$.

Ограничимся уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1)\rho E, \quad \gamma = \text{const} > 1. \quad (12)$$

Вязкость пока учитывать не будем, полагая

$$\varepsilon = 0. \quad (13)$$

Будем предполагать выполненными условия

$$s_1 = \sqrt{\frac{\gamma P_1}{V_1}} > \sigma; \quad \left(\frac{(s_1)^2}{\sigma^2} - 1 \right)^2 \geq \frac{2(\gamma^2 - 1)Q_0}{\sigma^2 (V_1)^2}. \quad (14)$$

Тогда для уравнения состояния (12) с учетом (13) система уравнений (8)–(10) имеет два непрерывных вещественных решения

$$V(\zeta) = V_1 \Psi_{\pm}(\zeta); \quad (15)$$

$$u(\zeta) = u_1 + \sigma V_1 (1 - \Psi_{\pm}(\zeta)); \quad (16)$$

$$P(\zeta) = P_1 \left[1 + \frac{\gamma \sigma^2}{(s_1)^2} (1 - \Psi_{\pm}(\zeta)) \right], \quad (17)$$

где

$$\Psi_{\pm}(\zeta) = \frac{\left(\frac{(s_1)^2}{\sigma^2} + \gamma \right) \pm \left(\frac{(s_1)^2}{\sigma^2} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{2\sigma^2(\gamma^2 - 1)Q_0}{(V_1)^2 \left((s_1)^2 - \sigma^2 \right)^2} g(\zeta)}}{\gamma + 1}. \quad (18)$$

Функции $\Psi_{\pm}(\zeta)$ монотонные и строго монотонные в зоне положительного энергосвечения:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_+(\zeta)}{d\zeta} &> 0, & |\zeta| < \frac{1}{2}\Delta m_0; & \quad \frac{d\Psi_-(\zeta)}{d\zeta} < 0, & |\zeta| < \frac{1}{2}\Delta m_0; \\ \frac{d\Psi_{\pm}(\zeta)}{d\zeta} &= 0, & |\zeta| \geq \frac{1}{2}\Delta m_0; & \quad \Psi_+(\zeta) > \Psi_-(\zeta) \geq 1, & \forall \zeta, \end{aligned} \quad (19)$$

а их предельные значения $\Psi_{\pm 1} = \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \Psi_{\pm}(\zeta) = \lim_{g(\zeta) \rightarrow +0} \Psi_{\pm}(\zeta)$ и $\Psi_{\pm 2} = \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \Psi_{\pm}(\zeta) = \lim_{g(\zeta) \rightarrow 1-0} \Psi_{\pm}(\zeta)$ удовлетворяют условию

$$\Psi_{+1} > \Psi_{+2} > \Psi_{-2} > \Psi_{-1} = 1. \quad (20)$$

Из свойств (19) и (20) очевидно, что из двух непрерывных решений (15)–(17) крайевым условиям (7) при $\zeta \rightarrow +\infty$ удовлетворяет только решение, определяемое функцией $\Psi_{-}(\zeta)$ из (18). Предельные значения слева от скачка для такого непрерывного решения равны

$$V_2 = V_1 \frac{\left(\frac{(s_1)^2}{\sigma^2} + \gamma\right) - \left(\frac{(s_1)^2}{\sigma^2} - 1\right) \sqrt{1 - \frac{2\sigma^2(\gamma^2 - 1)Q_0}{(V_1)^2((s_1)^2 - \sigma^2)^2}}}{\gamma + 1} > V_1; \quad (21)$$

$$u_2 = u_1 - \sigma V_1 \left(\frac{(s_1)^2}{\sigma^2} - 1\right) \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2\sigma^2(\gamma^2 - 1)Q_0}{(V_1)^2((s_1)^2 - \sigma^2)^2}}}{\gamma + 1}; \quad (22)$$

$$P_2 = P_1 \frac{\left(\gamma \frac{\sigma^2}{(s_1)^2} + 1\right) + \gamma \left(1 - \frac{\sigma^2}{(s_1)^2}\right) \sqrt{1 - \frac{2\sigma^2(\gamma^2 - 1)Q_0}{(V_1)^2((s_1)^2 - \sigma^2)^2}}}{\gamma + 1} < P_1, \quad (23)$$

при этом

$$s_2 = \sqrt{\frac{\gamma P_2}{V_2}} > \sigma. \quad (24)$$

Тем самым доказан следующий результат:

Теорема 1. Пусть точечный бегущий по газу с заданной массовой скоростью $\sigma > 0$ источник тепловой энергии удовлетворяет условиям (14). При замене такого точечного источника распределенным источником (4), (5), бегущим с той же массовой скоростью, непрерывная структура волны разрежения, бегущая с постоянной массовой скоростью, при отсутствии вязкости (13) существует, только если параметры скачка определяются формулами (21)–(23). Поэтому допустимым является только такой скачок разрежения на фронте волны точечного энерговыделения, параметры которого определяются формулами (21)–(23) и удовлетворяют неравенству (24). Других дополнительных ограничений на параметры скачка из требования существования непрерывной структуры не возникает.

2. Существование размазанного непрерывного скачка разрежения и условия его допустимости для размазанного энерговыделения, бегущего с заданной массовой скоростью, при наличии вязкости

Усложним задачу, рассмотренную в разд. 1, предположив дополнительно наличие вязкости, которую для определенности возьмем в виде

$$\varepsilon = -a\Delta m_1 s \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (25)$$

где a — положительный безразмерный коэффициент; $s = \rho c$ — массовая изэнтропическая скорость звука (для уравнения состояния (12) $s = (\gamma P/V)^{1/2}$); Δm_1 — малый положительный параметр, в газодинамических расчетах это обычно линейная масса ячеек сетки.

Для решения (6) вязкость (25) примет вид

$$\varepsilon = -a\Delta m_1 s \frac{du}{d\zeta} = a\Delta m_1 \sigma s \frac{dV}{d\zeta}. \quad (26)$$

Будем считать выполненными условия (14). Тогда подстановка формулы (26) в уравнения (8)—(10) после элементарных преобразований (исключения скорости, исключения с помощью уравнения состояния (12) внутренней энергии и исключения давления) дает обыкновенное дифференциальное уравнение для удельного объема, которое запишем в виде

$$C(\Phi) \frac{d\Phi}{d\zeta} = (\Psi_+(\zeta) - \Phi)(\Phi - \Psi_-(\zeta)). \quad (27)$$

Здесь через $\Psi_{\pm}(\zeta)$ обозначены функции, определенные формулой (18), введена новая неизвестная функция (безразмерный удельный объем)

$$\Phi(\zeta) = \frac{V(\zeta)}{V_1}; \quad (28)$$

строго положительная, непрерывная и непрерывно дифференцируемая (для $\Phi > 0$) функция $C(\Phi)$ определена формулой

$$C(\Phi) = \frac{2a}{\gamma + 1} \frac{\Delta m_1}{\sigma V_1} c(\Phi),$$

где $c(\Phi)$ есть изэнтропическая скорость звука, явно выраженная через безразмерный удельный объем Φ . Функция $\Phi(\zeta)$ должна удовлетворять следующим аналогам краевых условий на бесконечности (7)

$$\Phi(\zeta) \rightarrow 1, \quad \zeta \rightarrow +\infty; \quad \Phi(\zeta) \rightarrow \frac{V_2}{V_1} > 1, \quad \zeta \rightarrow -\infty; \quad \frac{d\Phi}{d\zeta} \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \pm\infty. \quad (29)$$

Лемма 1. Пусть две ограниченные непрерывные функции $\Psi_{\pm}(\zeta)$ имеют ограниченные первые производные и удовлетворяют условиям (19) и (20), функция $C(\Phi)$ при $\Phi > 0$ строго положительная, непрерывная и непрерывно дифференцируемая. Тогда уравнение (27) имеет следующий набор ограниченных решений $\Phi(\zeta)$, стремящихся при $\zeta \rightarrow +\infty$ к одному из двух предельных значений $\Psi_{\pm 1} = \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \Psi_{\pm}(\zeta)$ и стремящихся при $\zeta \rightarrow -\infty$ к одному из двух других предельных значений $\Psi_{\pm 2} = \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \Psi_{\pm}(\zeta)$.

Существует единственное решение (назовем его решением типа I), соединяющее левое предельное значение $\Phi(-\infty) = \Psi_{+2}$ с правым предельным значением $\Phi(+\infty) = \Psi_{+1}$. Это решение монотонно возрастающее.

Существует однопараметрическое семейство монотонно возрастающих решений (назовем их решениями типа II), соединяющих левое предельное значение $\Phi(-\infty) = \Psi_{-2}$ с правым предельным значением $\Phi(+\infty) = \Psi_{+1}$.

Существует однопараметрическое семейство немонотонных решений (назовем их решениями типа III), соединяющих левое предельное значение $\Phi(-\infty) = \Psi_{-2}$ с правым предельным значением $\Phi(+\infty) = \Psi_{+1}$. Эти решения монотонно убывают с ростом ζ при $\Phi(\zeta) < \Psi_-(\zeta)$ (при всех $\zeta < \zeta_1$ для некоторого $\zeta_1(b)$, зависящего от параметра b) и монотонно возрастают с ростом ζ при $\Phi(\zeta) > \Psi_-(\zeta)$ (при всех $\zeta > \zeta_1(b)$).

Существует единственное решение (назовем его решением типа IV), соединяющее левое предельное значение $\Phi(-\infty) = \Psi_{-2}$ с правым предельным значением $\Phi(+\infty) = \Psi_{-1}$. Это монотонно убывающее решение расположено ниже кривой $\Psi_-(\zeta)$.

Доказательство леммы 1 основано на анализе схемы поведения знаков правой части уравнения (27) (наклонов неизвестной функции $\Phi(\zeta)$), показанных на рис. 1, и при внимательном изучении этой схемы почти очевидно. По теореме существования и единственности [6] при сделанных предположениях уравнение (27) с любым начальным условием $\Phi(\zeta_0) = \Phi_0 > 0$ имеет, и притом единственное решение как при $\zeta > \zeta_0$, так и при $\zeta < \zeta_0$, причем эти решения (понимаемые как одно общее решение для всех ζ) можно продолжить единственным образом "до бесконечности" (т. е. до границ полуплоскости $\{(\zeta, \Phi) : \zeta > 0\}$).

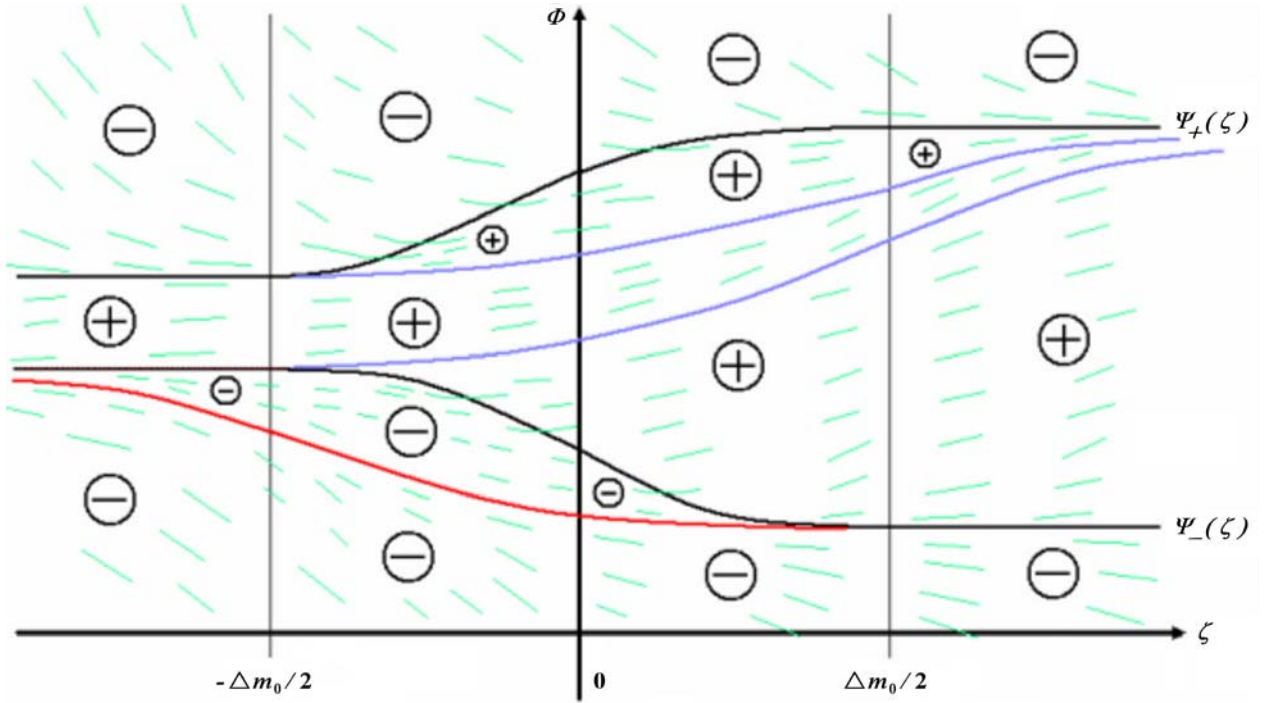


Рис. 1. Схематическое изображение наклонов функции $\Phi(\zeta)$ (наклон пропорционален правой части уравнения (27)). Знаки в кружках указывают на знак производной $\frac{d\Phi}{d\zeta}$ (или знак правой части уравнения (27)) в соответствующей подобласти

Из рис. 1 видно, что единственное решение $\Phi(\zeta) = \Phi_I(\zeta)$ типа I получается при задании начального условия $\Phi\left(-\frac{1}{2}\Delta m_0\right) = \Psi_{+2}$, при этом $\Phi(\zeta) = \Psi_{+2}$ для всех $\zeta \leq -\frac{1}{2}\Delta m_0$. Однопараметрическое семейство решений $\Phi(\zeta) = \Phi_{II}(\zeta; b)$ типа II получается при задании начальных условий $\Phi\left(-\frac{1}{2}\Delta m_0\right) = b$ для всех b из полуоткрытого интервала $\Psi_{-2} \leq b < \Psi_{+2}$. Единственное решение $\Phi(\zeta) = \Phi_{IV}(\zeta)$ типа IV получается при задании начального условия $\Phi\left(+\frac{1}{2}\Delta m_0\right) = \Psi_{-1}$, при этом $\Phi(\zeta) = \Psi_{-1}$ для всех $\zeta \geq +\frac{1}{2}\Delta m_0$. Наконец, однопараметрическое семейство решений $\Phi(\zeta) = \Phi_{III}(\zeta; b)$ типа III получается при задании начальных условий $\Phi\left(-\frac{1}{2}\Delta m_0\right) = b$ для всех b из открытого интервала $\Phi_{IV}\left(-\frac{1}{2}\Delta m_0\right) < b < \Psi_{+2}$. Очевидно, что все решения типа III имеют единственный локальный минимум в точках $(\zeta_1, \Psi_{-}(\zeta_1))$ для $-\frac{1}{2}\Delta m_0 < \zeta_1 < +\frac{1}{2}\Delta m_0$, что завершает доказательство.

Первому условию (29) в силу свойства (20) удовлетворяет только решение типа IV леммы 1. Тем самым доказан следующий результат.

Теорема 2. Пусть точечный, бегущий по газу с заданной постоянной массовой скоростью $\sigma > 0$ источник тепловой энергии удовлетворяет условиям (14). При замене такого точечного источника распределенным источником (4), (5), бегущим с той же массовой скоростью, и при наличии вязкости (25), действующей на разрежении, непрерывная структура волны разрежения, бегущая с заданной массовой скоростью, существует, только если параметры скачка определяются формулами (21)–(23). Поэтому допустимым является только такой скачок разрежения на фронте волны точечного энерговыделения, параметры которого определяются формулами (21)–(23) и

удовлетворяют неравенству (24). Других дополнительных ограничений на параметры скачка из требования существования непрерывной структуры не возникает.

Замечание 1. Аналог леммы 1 справедлив, когда функция $C(\Phi)$ в уравнении (27) зависит еще и от производной $\Phi' = \frac{d\Phi}{d\zeta}$, оставаясь строго положительной и непрерывной, хотя точные формулировки аналогичного результата при этом станут громоздкими, а аккуратное доказательство займет много места. При таком обобщении теорема 2 останется справедливой, если вместо вязкости (25) используется комбинация линейной и квадратичной искусственных вязкостей или вязкость типа В. Ф. Куропатенко [7]; предполагается, что все эти вязкости действуют на разрежении.

Итак, вязкость допускает в точности такие же скачки разрежения на фронте бегущего точечного энерговыделения, которые допускаются одним пространственным размазыванием этого энерговыделения без вязкости. Взаимодействие пространственного размазывания энерговыделения и вязкости ничего нового не вносит, даже без использования требования одинаковости характерных масштабов Δm_0 и Δm_1 . Можно доказать, что при уменьшении размерного коэффициента вязкости Δm_1 в (25) и при постоянном пространственном масштабе Δm_0 размазывания энерговыделения (или при $\Delta m_1/\Delta m_0 \rightarrow +0$) решение $\Phi(\zeta) = \Phi_{IV}(\zeta)$ уравнения (27) с краевым условием (29) приближается к решению $\Psi_-(\zeta)$, которое описывается теоремой 1.

3. Условия допустимости скачка разрежения для точечного энерговыделения, бегущего с заданной массовой скоростью, при размазывании скачка нормальной разностной дисперсией

Известно, что в разностных схемах второго порядка аппроксимации для гиперболических задач главный вклад в погрешность аппроксимации вносит дисперсия разностной схемы [8, 9]. В работах [3, 5] для ударных волн разрежения с невыпуклым уравнением состояния показано, что при отсутствии вязкости на разрежении определяющим фактором является дисперсия разностной схемы, учет которой однозначно определяет параметры автомодельной ударной волны разрежения. Для модельного нелинейного дифференциального уравнения переноса с невыпуклым потоком аналогичные результаты о существенном влиянии малой дисперсии на условия допустимости ударных волн получены в работе [10].

Здесь рассмотрим влияние разностной дисперсии на условия допустимости скачков разрежения, возникающих на фронте бегущего с заданной массовой скоростью точечного энерговыделения.

Дивергентное дифференциальное приближение полностью консервативной разностной схемы *крест* в одномерном плоском случае на равномерной по массе лагранжевой сетке. В отличие от работ [3, 5, 10], в которых рассматривалась модельная дисперсия, методом дифференциального приближения [11] получим для полностью консервативной разностной схемы *крест* [12, 13] главные члены погрешности аппроксимации, имеющие характер дисперсии. Это объясняется тем, что для рассматриваемой задачи могут оказаться существенными погрешности аппроксимации разностного уравнения для внутренней энергии (в работах [3, 5] внутренняя энергия не учитывалась). Чтобы проще интегрировать уравнения дифференциального приближения при поиске бегущих с постоянной массовой скоростью решений, будем строить дифференциальное приближение в дивергентном виде.

Полностью консервативная разностная схема *крест* [12, 13] для одномерной плоской газодинамики в переменных Лагранжа на равномерной по массе сетке описывается (без учета вязкости) следующим набором разностных уравнений, замыкаемых в рассматриваемом случае уравнением состояния вида (12):

$$\frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_j^{n+1/2}}{\Delta m}; \quad (30)$$

$$\frac{u_j^{n+1/2} - u_j^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{P_{j+1/2}^n - P_{j-1/2}^n}{\Delta m}; \quad (31)$$

$$\frac{E_{j+1/2}^n - e_{j+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t/2} = -P_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^{n-1/2} - u_j^{n-1/2}}{\Delta m} + q_{j+1/2}^n; \quad (32)$$

$$\frac{e_{j+1/2}^{n+1/2} - E_{j+1/2}^n}{\Delta t/2} = -P_{j+1/2}^n \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_j^{n+1/2}}{\Delta m} + q_{j+1/2}^n. \quad (33)$$

Подстановка в уравнения (30) и (31) разложений сеточных функций в ряды Тейлора (в предположении достаточной гладкости решения) приводит после стандартных вычислений к следующим дивергентным уравнениям дифференциального приближения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(V + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial}{\partial m} \left(u + \frac{\Delta m^2}{24} \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} \right) + O(\Delta t^4 + \Delta m^4); \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial m} \left(P + \frac{\Delta m^2}{24} \frac{\partial^2 P}{\partial m^2} \right) + O(\Delta t^4 + \Delta m^4). \quad (35)$$

Но с уравнениями (32) и (33) дело обстоит немного сложнее. Предварительно надо исключить одну из внутренних энергий — или с целыми, или с полуцелыми индексами по времени. Для некоторого упрощения выкладок сохраним внутренние энергии с целыми индексами по времени. После исключения внутренней энергии с полуцелыми индексами по времени получим уравнение для внутренней энергии в версии В. Е. Трощиёва [14], имеющее с учетом источника энергии вид

$$\frac{E_{j+1/2}^{n+1} - E_{j+1/2}^n}{\Delta t} + \frac{P_{j+1/2}^n + P_{j+1/2}^{n+1}}{2} \frac{V_{j+1/2}^{n+1} - V_{j+1/2}^n}{\Delta t} = \frac{q_{j+1/2}^n + q_{j+1/2}^{n+1}}{2}. \quad (36)$$

Для уравнения (36) дифференциальное приближение находится легко, оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(E + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right) + \left(P + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(V + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) = \left(q + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right) + O(\Delta t^4).$$

Это уравнение имеет недивергентный вид, а для последующего удобнее иметь дивергентное дифференциальное приближение. Поэтому воспользуемся консервативностью (точным сохранением полной энергии) разностной схемы (30), (31) и (36). Тожественными преобразованиями (подробности см. в [12–14]) из уравнений (30), (31) и (36) получаем следующее консервативное разностное уравнение для полной энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(E_{j+1/2}^{n+1} + \frac{u_j^{n+1/2} u_j^{n+3/2} + u_{j+1}^{n+1/2} u_{j+1}^{n+3/2}}{4} \right) - \left(E_{j+1/2}^n + \frac{u_j^{n-1/2} u_j^{n+1/2} + u_{j+1}^{n-1/2} u_{j+1}^{n+1/2}}{4} \right)}{\Delta t} = \\ & = - \frac{\left(P_{j+1/2}^n + P_{j+3/2}^n \right) + \left(P_{j+1/2}^{n+1} + P_{j+3/2}^{n+1} \right) u_{j+1}^{n+1/2} - \left(P_{j-1/2}^n + P_{j+1/2}^n \right) + \left(P_{j-1/2}^{n+1} + P_{j+1/2}^{n+1} \right) u_j^{n+1/2}}{4 \Delta m} + \\ & + \frac{q_{j+1/2}^n + q_{j+1/2}^{n+1}}{2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Подстановка разложений сеточных функций в ряды Тейлора дает дифференциальное приближение уравнения (37) для полной энергии в следующем дивергентном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(E + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right) + \left(\frac{u^2}{2} - \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial t^2} + \frac{\Delta m^2}{16} \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial m^2} + \frac{\Delta t^2}{4} u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial m} \left(P u + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} u + \frac{\Delta m^2}{8} \frac{\partial^2 P}{\partial m^2} u + \frac{\Delta m^2}{24} \frac{\partial^2 (P u)}{\partial m^2} \right) = \frac{q_{j+1/2}^n + q_{j+1/2}^{n+1}}{2} + O(\Delta t^4 + \Delta m^4). \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь источник энергии оставлен в разностном виде, поскольку интерес представляет точечный источник, для которого смысл разложения в ряд Тейлора очень сомнителен.

Для дальнейшего упрощения уравнений (34), (35) и (38) введем новые, слегка "подправленные", неизвестные функции:

$$\tilde{V} = V + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \Rightarrow V = \tilde{V} - \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial t^2} + O(\Delta t^4); \quad (39)$$

$$\tilde{u} = u + \frac{\Delta m^2}{24} \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} \Rightarrow u = \tilde{u} - \frac{\Delta m^2}{24} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial m^2} + O(\Delta m^4); \quad (40)$$

$$\tilde{E} = E + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Rightarrow E = \tilde{E} - \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} + O(\Delta t^4). \quad (41)$$

При этом для давления получаем

$$P = P(V, E) = \tilde{P} - \frac{\Delta t^2}{24} P_V \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^2}{24} P_E \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} + O(\Delta t^4 + \Delta m^4), \quad (42)$$

где введены обозначения

$$P_V = P_V(\tilde{V}, \tilde{E}) = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{E=\text{const}}; \quad P_E = P_E(\tilde{V}, \tilde{E}) = \left(\frac{\partial P}{\partial E} \right)_{V=\text{const}}; \quad \tilde{P} = P(\tilde{V}, \tilde{E}).$$

Подстановка формул (39)–(42) в уравнения (34), (35) и (38) дает

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial m} = O(\Delta t^4 + \Delta m^4); \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{u} + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\Delta m^2}{24} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial m^2} \right) + \frac{\partial}{\partial m} \left(\tilde{P} - \frac{\Delta t^2}{24} P_V \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^2}{24} P_E \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} + \frac{\Delta m^2}{24} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial m^2} \right) = \\ = O(\Delta t^4 + \Delta m^4); \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{E} + \left(\frac{\tilde{u}^2}{2} - \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 (\tilde{u}^2)}{\partial t^2} + \frac{\Delta m^2}{16} \frac{\partial^2 (\tilde{u}^2)}{\partial m^2} + \frac{\Delta t^2}{4} \tilde{u} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\Delta m^2}{24} \tilde{u} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial m^2} \right) \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial m} \left(\tilde{P} \tilde{u} + \left(\frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} + \frac{\Delta m^2}{8} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial m^2} - \frac{\Delta t^2}{24} P_V \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^2}{24} P_E \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} \right) \tilde{u} + \right. \\ \left. + \frac{\Delta m^2}{24} \frac{\partial^2 (\tilde{P} \tilde{u})}{\partial m^2} - \frac{\Delta m^2}{24} \tilde{P} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial m^2} \right) = \frac{q_{j+1/2}^n + q_{j+1/2}^{n+1}}{2} + O(\Delta t^4 + \Delta m^4). \end{aligned} \quad (45)$$

На этом остановимся. При желании можно проверить, что для малых возмущений состояния покоя добавочные слагаемые порядка $O(\Delta t^2 + \Delta m^2)$ в уравнениях (43)–(45) действительно описывают нормальную дисперсию (когда шаг по времени удовлетворяет условиям устойчивости).

Уравнения для структуры скачка разрежения, размазанного аппроксимационной дисперсией разностной схемы *крест*, при наличии точечного бегущего энерговыделения. В дивергентных уравнениях (43)–(45) под знаком первой производной появились вторые производные. Поэтому при поиске бегущих решений вида (6) краевые условия на бесконечности (7) надо дополнить следующими краевыми условиями:

$$\frac{d^2 u}{d\zeta^2} \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \pm\infty; \quad \frac{d^2 P}{d\zeta^2} \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \pm\infty; \quad \frac{d^2 V}{d\zeta^2} \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \pm\infty. \quad (46)$$

Тогда при подстановке в уравнения (43)–(45) бегущего решения (6) с учетом краевых условий (7) и (46) они один раз легко интегрируются, что дает систему трех обыкновенных дифференциальных

уравнений с линейной зависимостью скорости от удельного объема (знак "тильда" над преобразованными величинами будем опускать)

$$(u - u_1) + \sigma (V - V_1) = O(\Delta t^4 + \Delta m^4), \quad (47)$$

получаемой из уравнения (43). Исключение скорости с помощью формулы (47) дает систему двух обыкновенных уравнений

$$[(P - P_1) + \sigma^2 (V - V_1)] - \left(\frac{\Delta t^2 \sigma^2}{24} P_V + \frac{2\Delta m^2 - \Delta t^2 \sigma^2}{24} \sigma^2 \right) \frac{d^2 V}{d\zeta^2} - \frac{\Delta t^2 \sigma^2}{24} P_E \frac{d^2 E}{d\zeta^2} = O(\Delta t^4 + \Delta m^4); \quad (48)$$

$$\left[(E - E_1) + \frac{P + P_1}{2} (V - V_1) - Q_0 g(\zeta) \right] - \left(\frac{\Delta t^2 \sigma^2}{48} P_V + \frac{2\Delta m^2 - \Delta t^2 \sigma^2}{48} \sigma^2 \right) (V - V_1) \frac{d^2 V}{d\zeta^2} - \frac{\Delta t^2 \sigma^2}{48} P_E (V - V_1) \frac{d^2 E}{d\zeta^2} + \sigma^2 \frac{\Delta m^2 - 2\Delta t^2 \sigma^2}{24} \left(\frac{dV}{d\zeta} \right)^2 = O(\Delta t^4 + \Delta m^4). \quad (49)$$

При получении уравнения (49), кроме скорости, были исключены с помощью (48) производные от давления. Аналогично, производные от давления в уравнении (48) выражались (и тем самым исключались из этого уравнения) через производные от удельного объема с помощью того же уравнения (48). При этом появляющиеся в процессе исключения величины четвертого порядка малости $O(\Delta t^4 + \Delta m^4)$ отбрасывались (переносились в правую часть).

Отметим, что в случае точечного источника энергии функция $g(\zeta)$ будет разрывной (со "ступенькой"). Поэтому дальнейшее исключение давления и внутренней энергии из уравнений (48) и (49) надо проделать без дифференцирования уравнения (49). Для этого исключается внутренняя энергия в (49) с помощью уравнения состояния (12), затем с помощью (48) исключаются производные от давления и полностью исключается давление. Так получается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для удельного объема, которое после отбрасывания величин четвертого порядка малости и использования обозначений (18) и (28) запишется в виде

$$2A\Phi \frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} + B \left(\frac{d\Phi}{d\zeta} \right)^2 = -(\Psi_+(\zeta) - \Phi)(\Phi - \Psi_-(\zeta)), \quad (50)$$

где введены дополнительно обозначения

$$A = \frac{\Delta m^2 - \Delta t^2 \sigma^2}{12(\gamma + 1)} > 0; \quad (51)$$

$$B = \frac{(\gamma - 1)\Delta m^2 - 2\gamma\Delta t^2 \sigma^2}{12(\gamma + 1)}. \quad (52)$$

Непрерывная функция $\Phi(\zeta)$ должна удовлетворять краевым условиям на бесконечности (29) и вытекающему из (46) дополнительному условию

$$\frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \pm\infty. \quad (53)$$

Решение для структуры скачка разрежения справа от фронта волны энерговыделения. Для произвольного распределенного источника энергии не представляется возможным найти условия существования непрерывных решений уравнения (50) с краевыми условиями (29) и (53). Поэтому изучим сначала возможные решения при $\zeta > +\Delta m_0/2$ (т. е. в области, где источника еще нет) и при $\zeta < -\Delta m_0/2$ (где источник уже "отработал" и его уже нет) и затем рассмотрим условия существования непрерывной сшивки этих решений при $\Delta m_0/\Delta m \rightarrow +0$.

При $\zeta > +\Delta m_0/2$ уравнение (50) с учетом (11), (19) и (20) принимает вид

$$2A\Phi \frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} + B \left(\frac{d\Phi}{d\zeta} \right)^2 = -(\Psi_{+1} - \Phi)(\Phi - \Psi_{-1}), \quad \zeta > \frac{\Delta m_0}{2}, \quad (54)$$

где $\Psi_{+1} > \Psi_{-1} = 1$. Учитываем краевые условия (29) и (53) только при $\zeta \rightarrow +\infty$. Стандартная замена

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = R(\Phi) \quad (55)$$

понижает порядок уравнения (54) до первого:

$$A\Phi \frac{d(R^2)}{d\Phi} + BR^2 = -(\Psi_{+1} - \Phi)(\Phi - \Psi_{-1}). \quad (56)$$

Краевые условия (29) и (53) при $\zeta \rightarrow +\infty$ после замены (55) примут вид

$$R(\Phi) \rightarrow 0, \quad \Phi \rightarrow \Psi_{-1} = 1; \quad \frac{d(R^2)}{d\Phi} \rightarrow 0, \quad \Phi \rightarrow \Psi_{-1} = 1. \quad (57)$$

Будем предполагать, что коэффициенты (51) и (52) удовлетворяют условиям *общего положения*:

$$\frac{B}{A} \neq 0, \quad \frac{B}{A} \neq -1, \quad \frac{B}{A} \neq -2, \quad (58)$$

которые всегда можно выполнить выбором достаточно малого шага по времени $\Delta t > 0$. Тогда решение уравнения (56) с краевыми условиями (57) имеет вид

$$R^2 = \frac{1}{2A+B}\Phi^2 - \frac{\Psi_{+1}+1}{A+B}\Phi + \frac{\Psi_{+1}}{B} - \left(\frac{1}{2A+B} - \frac{\Psi_{+1}+1}{A+B} + \frac{\Psi_{+1}}{B} \right) \Phi^{-B/A}. \quad (59)$$

Решение (59) будет неформальным только для неотрицательной правой части. Но в окрестности точки $\Phi = \Psi_{-1} + \delta = 1 + \delta$, $|\delta| \ll 1$, имеем

$$\frac{1}{2A+B}(\Phi^2 - \Phi^{-B/A}) - \frac{\Psi_{+1}+1}{A+B}(\Phi - \Phi^{-B/A}) + \frac{\Psi_{+1}}{B}(1 - \Phi^{-B/A}) = -\frac{\Psi_{+1}-1}{2A}\delta^2 + O(\delta^3) < 0,$$

и поэтому уравнение (56) не имеет вещественных решений $R(\Phi)$, удовлетворяющих краевым условиям (57).

Остается возможность, определяемая потерей решения в силу некорректности замены (55). Эта замена некорректна только в том случае, когда $\frac{d\Phi}{d\zeta} \equiv 0$, т. е. $\Phi(\zeta) = \text{const}$.

Этим доказано, что уравнение (54) имеет единственное решение, удовлетворяющее краевым условиям (29) и (53) при $\zeta \rightarrow +\infty$. Это решение имеет вид

$$\Phi(\zeta) = \Psi_{-1} = 1, \quad \zeta > +\frac{\Delta m_0}{2}. \quad (60)$$

Возможные решения для структуры скачка разрежения слева от фронта волны энерговыделения. Проведем теперь построения для случая $\zeta < -\Delta m_0/2$, аналогичные описанным в предыдущем подразделе. При этом $g(\zeta) = 1$ и уравнение (50) принимает вид

$$2A\Phi \frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} + B \left(\frac{d\Phi}{d\zeta} \right)^2 = -(\Psi_{+2} - \Phi)(\Phi - \Psi_{-2}), \quad \zeta < -\frac{\Delta m_0}{2}, \quad (61)$$

где в силу (19) и (20) $\Psi_{+2} > \Psi_{-2} > 1$. Учитываем краевые условия (29) и (53) только при $\zeta \rightarrow -\infty$. Этим краевым условиям и уравнению (61) удовлетворяют только следующие два тривиальных решения:

$$\Phi(\zeta) = \Psi_{+2} = \text{const}, \quad \zeta < -\frac{\Delta m_0}{2}; \quad (62)$$

$$\Phi(\zeta) = \Psi_{-2} = \text{const}, \quad \zeta < -\frac{\Delta m_0}{2}. \quad (63)$$

Рассмотрим возможность существования нетривиальных решений. С помощью замены (55) уравнение (61) примет вид

$$A\Phi \frac{d(R^2)}{d\Phi} + BR^2 = -(\Psi_{+2} - \Phi)(\Phi - \Psi_{-2}). \quad (64)$$

Краевые условия (29) и (53) при $\zeta \rightarrow -\infty$ приходится рассматривать в двузначном виде

$$R(\Phi) \rightarrow 0, \quad \Phi \rightarrow \Psi_{\pm 2}; \quad \frac{d(R^2)}{d\Phi} \rightarrow 0, \quad \Phi \rightarrow \Psi_{\pm 2}, \quad (65)$$

так как заранее нет возможности выбрать одно из двух предельных значений слева от фронта скачка, $V_2 = \Psi_{+2}V_1$ или $V_2 = \Psi_{-2}V_1$. Соответствующие решения уравнения (64) при выполнении условий (58) имеют вид

$$R^2 = \left(\frac{d\Phi}{d\zeta}\right)^2 = \frac{1}{B+2A} \left(\Phi^2 - \Phi^{-B/A}(\Psi_{\pm 2})^{B/A+2}\right) - \frac{\Psi_{+2} + \Psi_{-2}}{B+A} \left(\Phi - \Phi^{-B/A}(\Psi_{\pm 2})^{B/A+1}\right) + \frac{\Psi_{+2}\Psi_{-2}}{B} \left(1 - \Phi^{-B/A}(\Psi_{\pm 2})^{B/A}\right). \quad (66)$$

Для $\Phi = \Psi_{\pm 2}(1 + \delta)$, $|\delta| \ll 1$, имеет место разложение

$$R^2 = \frac{\Psi_{\pm 2}(\Psi_{\pm 2} - \Psi_{\mp 2})}{2A} \delta^2 + O(\delta^3). \quad (67)$$

В силу (20) положительность есть только для верхнего знака.

Этим доказано, что уравнение (64) имеет нетривиальное вещественное решение, удовлетворяющее только одному условию (из двух вариантов (65))

$$R(\Phi) \rightarrow 0, \quad \Phi \rightarrow \Psi_{+2}. \quad (68)$$

Поэтому, решая уравнение (66), находим

$$\zeta = \text{const} \pm \int_{\Phi(\zeta)}^{\Phi(\zeta)} \frac{d\Phi}{\sqrt{\frac{(\Psi_{+2})^2}{B+2A} \left(\frac{\Phi^2}{(\Psi_{+2})^2} - \left(\frac{\Psi_{+2}}{\Phi}\right)^{\frac{B}{A}}\right) - \frac{\Psi_{+2} + \Psi_{-2}}{B+A} \left(\Phi - \Psi_{+2} \left(\frac{\Psi_{+2}}{\Phi}\right)^{\frac{B}{A}}\right) + \frac{\Psi_{+2}\Psi_{-2}}{B} \left(1 - \left(\frac{\Psi_{+2}}{\Phi}\right)^{\frac{B}{A}}\right)}}}. \quad (69)$$

Из разложения (67) следует, что при $\Phi \rightarrow \Psi_{+2}$ интеграл в решении (69) расходится.

Условия сшивки решений справа и слева от узкого фронта волны энерговыделения.

Пусть ширина фронта волны энерговыделения много меньше размера ячеек сетки: $\Delta m_0 \ll \Delta m$. Справа от волны энерговыделения при $\zeta > +\Delta m_0/2$ будем использовать единственное (тривиальное) допустимое решение (60). Тогда из уравнения (54) получаем

$$\frac{d\Phi^{B/(2A)+1}}{d\zeta} = \frac{B+2A}{4A^2} \int_{\zeta}^{\Delta m_0/2} H(\zeta') d\zeta', \quad (70)$$

где

$$H(\zeta) = (\Phi(\zeta))^{B/(2A)-1} (\Psi_+(\zeta) - \Phi(\zeta)) (\Phi(\zeta) - \Psi_-(\zeta)), \quad H(\zeta)|_{\zeta=+\Delta m_0/2} = 0. \quad (71)$$

Интегрируя уравнение (70) еще раз, получаем

$$1 - (\Phi(\zeta))^{B/(2A)+1} = \frac{B+2A}{4A^2} \int_{\zeta}^{+\Delta m_0/2} (\zeta' - \zeta) H(\zeta') d\zeta'. \quad (72)$$

Из (71) и (72) вытекает ограниченность $\Phi(\zeta)$ и $H(\zeta)$ для $|\zeta| \leq +\Delta m/2$ равномерно по $\Delta m_0 \rightarrow +0$. Тогда из (72), (51) и (52) получаем оценку

$$|1 - \Phi(\zeta)| = \frac{1}{(\Delta m)^2} \left(\frac{\Delta m_0}{2} - \zeta \right)^2 O(1), \quad |\zeta| \leq \frac{\Delta m_0}{2}, \quad \Delta m_0 \rightarrow +0. \quad (73)$$

Для непрерывного источника $q(\zeta)$ из (18) получаем

$$\Psi_-(\zeta) = 1 + \frac{1}{(\Delta m_0)^2} \left(\frac{\Delta m_0}{2} - \zeta \right)^2 O(1), \quad |\zeta| \leq \frac{\Delta m_0}{2}, \quad \Delta m_0 \rightarrow +0. \quad (74)$$

Подстановка (73) и (74) в (71) дает уточненную оценку

$$H(\zeta) = \left(\frac{\Delta m_0}{2} - \zeta \right)^2 O\left(\frac{1}{(\Delta m_0)^2} + \frac{1}{(\Delta m)^2} \right), \quad |\zeta| \leq \frac{\Delta m_0}{2}, \quad \Delta m_0 \rightarrow +0. \quad (75)$$

Наконец, подставляем (75) в (72) и (70) и получаем

$$|1 - \Phi(\zeta)| = \frac{1}{(\Delta m)^2} \left(\frac{\Delta m_0}{2} - \zeta \right)^4 O\left(\frac{1}{(\Delta m_0)^2} + \frac{1}{(\Delta m)^2} \right), \quad |\zeta| \leq \frac{\Delta m_0}{2}, \quad \Delta m_0 \rightarrow +0; \quad (76)$$

$$\left| \frac{d\Phi}{d\zeta} \right| = \frac{1}{(\Delta m)^2} \left(\frac{\Delta m_0}{2} - \zeta \right)^3 O\left(\frac{1}{(\Delta m_0)^2} + \frac{1}{(\Delta m)^2} \right), \quad |\zeta| \leq \frac{\Delta m_0}{2}, \quad \Delta m_0 \rightarrow +0. \quad (77)$$

Оценки (76) и (77) в пределе точечного энерговыделения дают условия сшивки левой части структуры скачка разрежения с тривиальной правой частью (60) этой структуры:

$$\Phi(\zeta) \rightarrow 1, \quad \zeta \rightarrow -\frac{\Delta m_0}{2} - 0, \quad \frac{\Delta m_0}{\Delta m} \rightarrow +0; \quad (78)$$

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow -\frac{\Delta m_0}{2} - 0, \quad \frac{\Delta m_0}{\Delta m} \rightarrow +0. \quad (79)$$

Дополнительное соотношение, необходимое для существования непрерывной структуры скачка разрежения. Тривиальные решения (62) и (63) уравнения (61) слева от фронта энерговыделения не удовлетворяют условиям сшивки (78) и (79). Поэтому непрерывная структура возможна только при сшивке нетривиального решения (66), (69) слева от фронта энерговыделения с постоянным решением (60) справа от фронта энерговыделения.

Подставляем условия сшивки (78) и (79) в уравнение (66) и получаем необходимое условие существования непрерывной структуры для бесконечно узкого фронта энерговыделения в виде уравнения

$$\frac{1}{B+2A} \left(1 - (\Psi_{\pm 2})^{B/A+2} \right) - \frac{\Psi_{+2} + \Psi_{-2}}{B+A} \left(1 - (\Psi_{\pm 2})^{B/A+1} \right) + \frac{\Psi_{+2}\Psi_{-2}}{B} \left(1 - (\Psi_{\pm 2})^{B/A} \right) = 0. \quad (80)$$

Полагая в (18) $g(\zeta) = 1$, получаем формулы для $\Psi_{\pm 2}$, подставляя которые в (80), получаем дополнительное соотношение для скачка разрежения в виде

$$\frac{\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{B/A+2} - 1}{B/A+2} - 2 \frac{\gamma + \frac{(s_1)^2}{\sigma^2}}{\gamma+1} \frac{\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{B/A+1} - 1}{B/A+1} + \frac{2 \frac{(s_1)^2}{\sigma^2} + (\gamma-1) \left(1 + \frac{2Q_0}{\sigma^2 (V_1)^2} \right)}{\gamma+1} \frac{\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{B/A} - 1}{B/A} = 0, \quad (81)$$

где в силу (68) предельные значения слева от скачка разрежения для допустимого непрерывного решения отличаются от формул (21)–(23) другим знаком перед квадратным корнем и равны

$$V_2 = \Psi_{+2} V_1 = V_1 \frac{\left(\frac{(s_1)^2}{\sigma^2} + \gamma \right) + \left(\frac{(s_1)^2}{\sigma^2} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{2\sigma^2 (\gamma^2 - 1) Q_0}{(V_1)^2 \left((s_1)^2 - \sigma^2 \right)^2}}}{\gamma+1} > V_1; \quad (82)$$

$$u_2 = u_1 - \sigma V_1 \left(\frac{(s_1)^2}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2\sigma^2 (\gamma^2 - 1) Q_0}{(V_1)^2 ((s_1)^2 - \sigma^2)^2}}}{\gamma + 1}; \quad (83)$$

$$P_2 = P_1 \frac{\left(\gamma \frac{\sigma^2}{(s_1)^2} + 1 \right) - \gamma \left(1 - \frac{\sigma^2}{(s_1)^2} \right) \sqrt{1 - \frac{2\sigma^2 (\gamma^2 - 1) Q_0}{(V_1)^2 ((s_1)^2 - \sigma^2)^2}}}{\gamma + 1} < P_1, \quad (84)$$

при этом, в отличие от (24),

$$s_2 = \sqrt{\frac{\gamma P_2}{V_2}} < \sigma. \quad (85)$$

Основной результат о допустимых скачках разрежения на фронте бегущего энерговыделения при учете разностной дисперсии. Сформулируем полученные результаты в виде одной большой теоремы, в которую добавлены легко проверяемые достаточные условия.

Теорема 3. Пусть точечный бегущий по газу с заданной массовой скоростью источник тепловой энергии удовлетворяет условиям (14), а для численного моделирования такого скачка применяется разностная схема крест без искусственной вязкости. В этих условиях для скачка разрежения, образующегося на фронте волны энерговыделения, справедливы следующие результаты:

1. **Аппроксимационная дисперсия полностью консервативной разностной схемы крест.** Учет главных членов погрешности аппроксимации (второго порядка малости) полностью консервативной разностной схемы крест (30)–(33) без искусственных вязкостей для уравнения состояния (12) приводит к дифференциальному уравнению (50), которое описывает структуру скачка разрежения, размазанного нормальной аппроксимационной дисперсией разностной схемы крест с распределенным источником тепловой энергии, бегущим с заданной массовой скоростью $\sigma > 0$. В уравнении (50) использованы обозначения (51), (52) и (18), а распределенный источник определяется функцией $g(\zeta)$ (11) с шириной фронта энерговыделения, равной Δt_0 . Структура скачка разрежения дополнительно определяется краевыми условиями на бесконечности (29) и (53).
2. **Необходимые условия допустимости скачка разрежения.** В случае точечного источника тепловой энергии, бегущего с заданной массовой скоростью $\sigma > 0$ (в пределе $\Delta t_0/\Delta t \rightarrow +0$, где Δt — масса ячеек сетки), для существования бегущей с постоянной массовой скоростью σ непрерывной структуры скачка разрежения, размазанного аппроксимационной дисперсией, и тем самым для допустимости скачка разрежения необходимо выполнение двух дополнительных условий.

Во-первых, из двух возможных значений удельной плотности слева от скачка разрежения, получаемых из условий Ренкина—Гюгонно, аппроксимационная дисперсия допускает только одно значение, определяемое формулой (82) (остальные предельные величины слева от допустимого скачка разрежения определяются формулами (83)–(85)).

Во-вторых, для существования непрерывной структуры необходимо (кроме выполнения условий Ренкина—Гюгонно) выполнение дополнительного соотношения (81), которое при заданной калорийности Q_0 источника и при заданной массовой скорости источника σ связывает удельный объем V_1 и массовую скорость звука s_1 перед скачком разрежения (справа от скачка) с удельным объемом V_2 за скачком разрежения (т. е. слева от скачка). Параметры допустимого скачка разрежения (точнее, величины V_2/V_1 и s_1/σ) определяются однозначно из решения системы двух уравнений (81) и (82) и оказываются зависящими от безразмерной величины типа числа Куранта $\sigma \Delta t/\Delta t$ и от параметра γ из уравнения состояния (12).

3. **Достаточные условия существования непрерывной структуры скачка разрежения.** При выполнении сформулированных выше необходимых условий допустимости скачка

разрежения непрерывная структура скачка разрежения, размазанного аппроксимационной дисперсией, будет существовать, если выполнены следующие два дополнительных условия.

Во-первых, формула (84) дает положительное значение предельного давления слева от скачка разрежения.

Во-вторых, подкоренное выражение в интеграле (69), определяющем структуру скачка слева от фронта волны энерговыделения, будет положительным для всех $\Phi \in (1, \Psi_{+2})$. В точках $\Phi = 1$ и $\Phi = \Psi_{+2}$ это подкоренное выражение равно нулю в силу выполнения необходимых условий допустимости скачка, а в некоторой окрестности этих точек внутри интервала $(1, \Psi_{+2})$ подкоренное выражение всегда строго положительное.

Полученным и сформулированным в теореме 3 результатом, вслед за работами [2, 10, 15, 3–5], дан еще один пример появления дополнительных соотношений на скачке при определяющем влиянии дисперсии на структуру размазанного скачка.

Замечание 2. Самое сильное предположение при получении теоремы 3 заключается в том, что энерговыделение предполагается точечным. Но в разностном счете энерговыделение в принципе не может быть точечным. Даже когда положение фронта энерговыделения известно с точностью до долей ячейки сетки, выделяющаяся энергия добавляется к внутренней энергии всей ячейки. Тем самым всегда энерговыделение в разностном счете, независимо от величины шага по времени, размывается по пространству на область с размером ячеек сетки, т. е. в самом лучшем случае $\Delta m_0 = \Delta m$. Оценки качественного характера с помощью метода теории возмущений, на которых останавливаться не будем, показывают, что необходимые условия допустимости при размывании энерговыделения на одну ячейку сетки меняются по сравнению с необходимыми условиями допустимости для точечного энерговыделения на конечную (не малую) величину. Точнее, в уравнение (81) справа надо поставить $O(\Delta m_0/\Delta m)$. Тогда учет размывания энерговыделения всего на одну ячейку сетки изменит параметры скачка разрежения на конечное (не малое) значение.

4. Эволюционность допустимых скачков разрежения

Коротко обсудим вопрос об эволюционности скачков разрежения. Вначале рассмотрим скачки разрежения, которые описываются теоремой 3. В данном случае справедливы условия (14) и (85), и поэтому, как показано на рис. 2, на скачок разрежения приходят две характеристики, а выходит из него четыре (поскольку $s_1 > \sigma$ и $s_2 < \sigma$).

В учебниках иногда описывается следующее условие эволюционности разрывов (ударных волн): количество волн, уходящих вправо и влево от разрыва, в эволюционном случае должно быть на единицу меньше количества условий на разрыве. Для обычных ударных волн в газовой динамике количество условий на разрыве равно трем — числу уравнений Ренкина—Гюгонио. Поэтому условие эволюционности ударных волн в газах имеет вид: количество волн, уходящих вправо и влево от разрыва, в эволюционном случае должно быть равно двум. Эта ситуация показана на рис. 3.

Указанное условие эволюционности разрывов (ударных волн) правильнее называть критерием эволюционности разрывов. Вернемся к определению эволюционности: скачок называется эволюционным, если задача Коши о взаимодействии скачка с малыми возмущениями однозначно разрешима, т. е. всегда имеет решение, которое является единственным и непрерывно зависит от параметров входящих на скачок малых возмущений. Точные формулировки, а также подробные объяснения этого определения и следствия из него можно найти в [16, 17, 2]. В частности, эволюционность скачка во многих случаях вытекает из его допустимости.

В задаче взаимодействия скачка с малыми возмущениями число неизвестных равно числу выходящих из скачка характеристик плюс малое возмущение скорости скачка. Для корректности этой задачи (для эволюционности) необходимо и достаточно, чтобы полное число неизвестных было равно полному числу условий на скачке. В случае обычных ударных волн в газах число условий на скачке равно трем. При этом в число неизвестных входит возмущение скорости ударной волны.

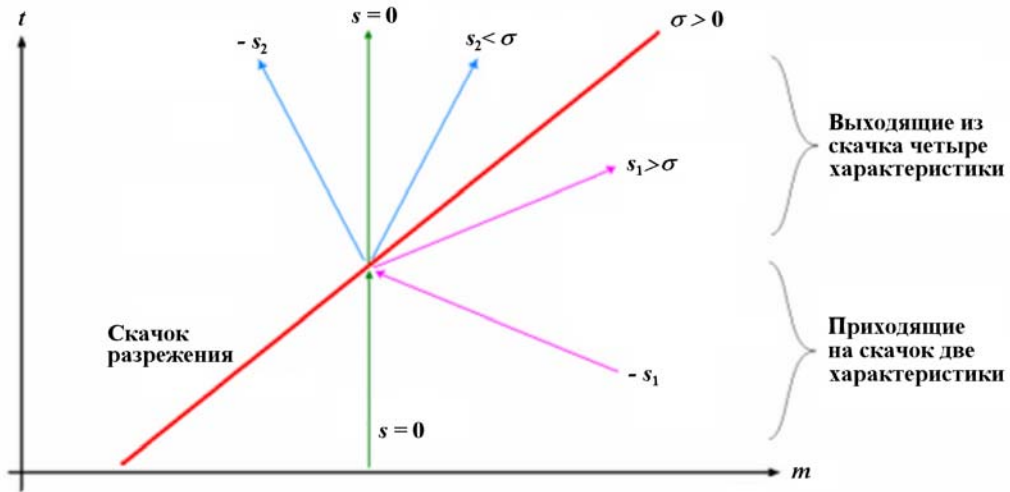


Рис. 2. Характеристики, приходящие на скачок разрежения и выходящие из него, когда скачок разрежения допустим разностной дисперсией

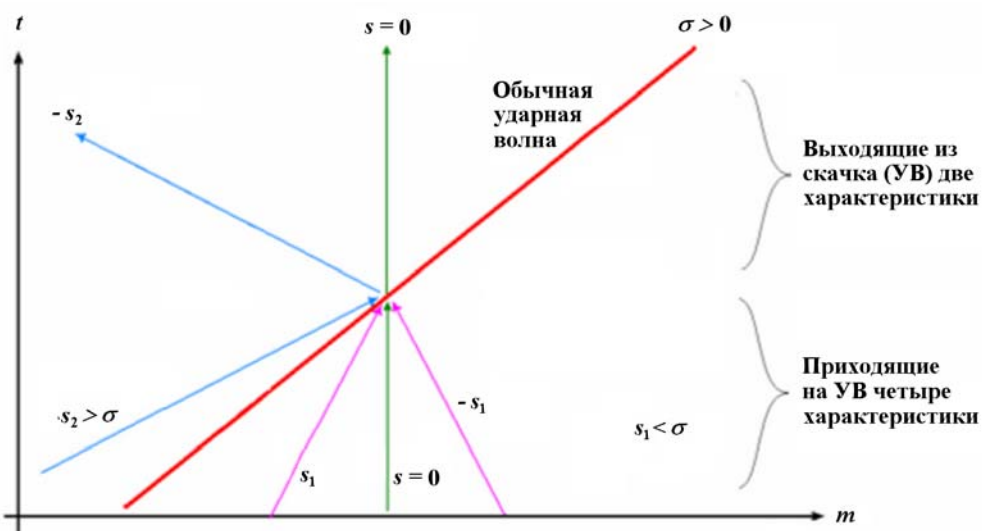


Рис. 3. Характеристики, приходящие на обычную ударную волну и выходящие из нее

Поэтому для эволюционности обычной ударной волны в газе необходимо и достаточно, чтобы из ударной волны выходило $3 - 1 = 2$ характеристики, как показано на рис. 3. Число неизвестных равно 2 (выходящие из скачка характеристики) + 1 (возмущение скорости ударной волны), что равно числу уравнений Ренкина—Гюгоню.

Вернемся теперь к допустимому скачку разрежения, который описывается теоремой 3. Для такого скачка разрежения при его взаимодействии с малыми возмущениями число неизвестных равно просто числу выходящих из скачка характеристик. Малое возмущение скорости скачка отсутствует, потому что скорость фронта навязанного энерговыделения задана. Для корректности этой задачи (для эволюционности скачка разрежения) необходимо и достаточно, чтобы полное число неизвестных (4) было равно полному числу условий на скачке. Три условия на скачке суть три уравнения Ренкина—Гюгоню плюс одно дополнительное соотношение, вытекающее из условия допустимости скачка при учете разностной дисперсии. Итого, $4 = 3 + 1$, как показано на рис. 2. То есть и такой скачок разрежения — эволюционный.

Рассмотрим еще допустимый скачок разрежения, который описывается теоремой 2. Он удовлетворяет условиям $s_1 > \sigma$ и $s_2 > \sigma$. Поэтому из него выходят три характеристики, как показано на рис. 4. Для такого скачка разрежения при его взаимодействии с малыми возмущениями число

неизвестных равно просто числу выходящих из скачка характеристик, потому что скорость фронта навязанного энерговыделения задана и не возмущается приходящими на него малыми возмущениями. Три условия на скачке суть три уравнения Ренкина—Гюгонио (число неизвестных равно числу уравнений). Условие допустимости такого скачка не дает дополнительных соотношений. Поэтому такой скачок также оказывается эволюционным.

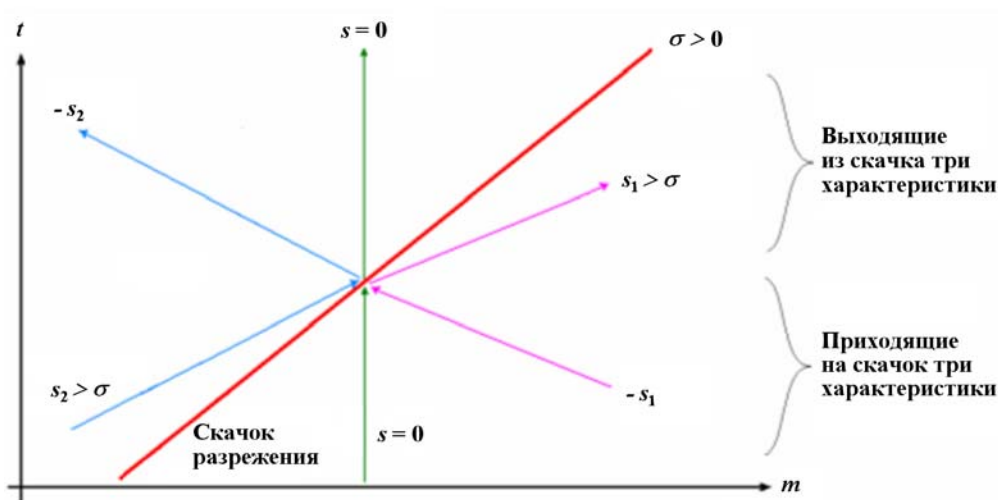


Рис. 4. Характеристики, приходящие на скачок разрежения и выходящие из него, когда скачок разрежения допустим вязкостью

Заключение

Получено, что при замене точечного энерговыделения непрерывным, размазанным на некоторый интервал, бегущим с той же массовой скоростью энерговыделением непрерывная структура волны разрежения, бегущая с постоянной массовой скоростью, существует, только если параметры скачка удовлетворяют уравнениям Ренкина—Гюгонио и условию $s_2 > \sigma$. При наличии вязкости (как с точечным энерговыделением, так и с размазанным) непрерывная структура скачка разрежения существует при таких же условиях.

Вычислено дифференциальное приближение полностью консервативной разностной схемы типа *крест* для одномерной газовой динамики в переменных Лагранжа, главные члены погрешности аппроксимации имеют смысл нормальной дисперсии. Доказано, что при отсутствии вязкости для точечного источника энерговыделения, бегущего с заданной массовой скоростью σ , непрерывная структура скачка разрежения, размазанного аппроксимационной дисперсией дифференциального приближения, существует тогда и только тогда, когда выполнены два дополнительных условия: 1) из двух решений для параметров скачка, получаемых из уравнений Ренкина—Гюгонио, аппроксимационная дисперсия допускает только одно решение, удовлетворяющее условию $s_2 < \sigma$; 2) параметры допустимого скачка разрежения удовлетворяют дополнительному соотношению (81) (помимо трех условий Ренкина—Гюгонио).

Список литературы

1. *Бондаренко Ю. А.* Свойства решений при счете нормальной детонации навязанным энерговыделением с заданной скоростью фронта // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 1. С. 3—18.
2. *Куликовский А. Г.* Сильные разрывы в течениях сплошных сред и их структура // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1988. Т. 182. С. 261—291.

3. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н., Копышев В. П., Хрусталеv В. В. Неединственность ударных волн разрежения: влияние вязкости и дисперсии // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 3—12.
4. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н. Неединственность ударных волн разрежения: роль межфазной кинетики // Там же. 2004. Вып. 1. С. 28—46.
5. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н., Копышев В. П., Хрусталеv В. В. Влияние вязкости, дисперсии и кинетики фазовых переходов на параметры ударных волн разрежения // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2005. Вып. 9. С. 6—29.
6. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
7. Куропатенко В. Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики // Труды Математического института имени В. А. Стеклова АН СССР. 1966. Т. 74. С. 107—137.
8. Turkel E. Phase error and stability of second order methods for hyperbolic problems. I // J. Comp. Phys. 1974. Vol. 15. P. 226—250.
9. Шокин Ю. И. К анализу диссипации и дисперсии разностных схем // Числ. методы мех. сплошной среды. 1976. Т. 7, № 7. С. 131—141.
10. Куликовский А. Г. О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 6. С. 1349—1352.
11. Шокин Ю. И., Яценко Н. Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985.
12. Бондаренко Ю. А. Консервативные разностные схемы типа "крест" с положительно определенной кинетической энергией для лагранжевой газодинамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1995. Вып. 4. С. 17—21.
13. Бондаренко Ю. А. Консервативное расщепление уравнения энергии в разностных схемах типа "крест" для лагранжевой газодинамики // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 8. С. 1020—1023.
14. Троциев В. Е. О дивергентности схемы "крест" численного решения уравнений газовой динамики // Числ. методы мех. сплошной среды. 1970. Т. 1, № 5. С. 87—93.
15. Куликовский А. Г., Гвоздовская Н. И. О влиянии дисперсии на множество допустимых разрывов в механике сплошной среды // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1998. Т. 223. С. 63—73.
16. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998.
17. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических уравнений. М.: Физматлит, 2001.

Статья поступила в редакцию 02.09.08.
