

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ TVD-ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В P_1 -ПРИБЛИЖЕНИИ

А. С. Вершинская, А. Д. Гаджиев, С. А. Грабовенская, А. А. Шестаков
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается применение TVD-реконструкции для построения положительной и второго порядка схемы решения уравнения переноса теплового излучения в P_1 -приближении. Приводятся результаты численных расчетов тестовых задач.

Ключевые слова: перенос теплового излучения, P_1 -приближение.

Введение

Система уравнений переноса излучения и уравнения энергии представляют собой сложную нелинейную систему, зависящую в общем случае от семи независимых переменных [1]. Поэтому ее часто решают в более простом приближении. К таковым относится P_1 -приближение. Для нестационарной задачи это приближение приводит к гиперболической системе уравнений относительно первых моментов в разложении интенсивности излучения по сферическим функциям. Если пренебречь временными производными от первых моментов, то гиперболическая система перейдет в диффузионное уравнение с эллиптическим оператором.

Гиперболическая система в отличие от параболического уравнения создает значительные трудности при разработке численного алгоритма. В работе [2] показана невозможность сочетания монотонности и второго порядка аппроксимации в рамках линейной разностной схемы для гиперболической системы уравнений. Именно такое сочетание монотонности и второго порядка требуется для практического применения. Нередко численные алгоритмы строятся на сочетании в разных зонах схемы второго порядка, а также монотонной схемы первого порядка. В работе [3], помимо переключения, используется также способ введения искусственной диссипации, который улучшает монотонность, не снижая порядка аппроксимации. В схемах с переключателями есть свои дополнительные недостатки. В частности, может ухудшиться сходимость итераций.

Одним из наиболее перспективных подходов к решению гиперболической системы является применение TVD-схем [4, 5], которые позволяют в классе нелинейных схем сочетать монотонность и второй порядок аппроксимации.

В данной работе рассмотрен TVD-метод применительно к схеме РОМБ для решения уравнений переноса в P_1 -приближении. За базовую схему первого порядка взята нелинейная схема РОМБ, которая эквивалентна монотонной схеме бегущего счета в инвариантах. Далее путем реконструкции решения с применением соответствующего ограничителя строится монотонного типа схема второго порядка.

Построенная указанным способом схема типа TVD обладает следующими свойствами:

- 1) неявность, безусловная устойчивость;
- 2) монотонность в смысле принадлежности к классу TVD-схем;
- 3) первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок аппроксимации по пространству, кроме отдельных точек с экстремумами;
- 4) консервативность в смысле выполнения разностного аналога интегрального закона сохранения в каждой ячейке;

- 5) однородность, заключающаяся в проведении расчета по единообразным формулам без явного выделения особенностей решения.

Используемая в новой схеме TVD-методология вносит в схему ограничитель, который вычисляется явно по известным величинам с предыдущего временного шага на трехточечном шаблоне для инвариантов. При этом величины с верхнего временного слоя берутся в рамках данной ячейки, что не нарушает идеологии двухточечной схемы РОМБ [6].

Как известно [7], монотонные функции принадлежат классу функций ограниченной вариации. Обратно, функции ограниченной вариации можно представить в виде разности двух неубывающих функций, т. е. класс TVD-функций несколько шире, чем класс монотонных функций. Всегда возникает вопрос, какое качество монотонности дают TVD-схемы. Численные расчеты показывают, что рассматриваемая в статье схема типа TVD обладает хорошими свойствами монотонности.

Постановка задачи

Рассмотрим одномерную систему переноса лучистой энергии в многогрупповом P_1 -приближении:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial U_g}{\partial t} + \frac{\partial (r^\sigma S_g)}{r^\sigma \partial r} + \alpha_{cg} U_g &= \alpha_{cg} B_g; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial S_g}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial U_g}{\partial r} + \alpha_g S_g &= 0; \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g - B_g). \end{aligned}$$

Здесь $U_g = \int_{-1}^1 J_g d\mu$ — плотность излучения группы g , умноженная на скорость света c ; $S_g = \int_{-1}^1 \mu J_g d\mu$ — поток излучения группы g ; J_g — интенсивность излучения группы g ; $B_g = \frac{8\pi}{c^2 \tilde{h}^3} \times \int_{\Delta\varepsilon_g} \frac{\varepsilon^3}{\exp(\varepsilon/T) - 1} d\varepsilon$ — функция Планка для группы g , умноженная на скорость света, \tilde{h} — постоянная Планка, ε_g — энергия группы g ; g — индекс энергетической группы, $g = 1, \dots, G$; α_{cg} — коэффициент поглощения фотонов; α_{sg} — коэффициент рассеяния фотонов; α_g — коэффициент ослабления, $\alpha_g = \alpha_{cg} + \alpha_{sg}$; E — внутренняя энергия вещества; t — время; r — координата; $\sigma = 0$ — случай плоской геометрии; $\sigma = 1$ — случай цилиндрически-симметричной геометрии; $\sigma = 2$ — случай сферически-симметричной геометрии.

Граничные условия имеют вид

$$\alpha_{0,g} U_g + \beta_{0,g} S_g = \varphi_{0,g}; \quad \alpha_{1,g} U_g + \beta_{1,g} S_g = \varphi_{1,g}, \quad (1)$$

где $\alpha_{0,g}, \beta_{0,g}, \varphi_{0,g}, \alpha_{1,g}, \beta_{1,g}, \varphi_{1,g}$ — параметры для задания граничных условий.

Разностная аппроксимация

Система разностных P_1 -уравнений имеет следующий вид [3] (для упрощения записи здесь опущены индексы g и $i + 1/2$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau} U^{n+1} + \frac{1}{V_i} \Delta_i (r^\sigma S^{n+1}) + \alpha U^{n+1} &= \frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1} + \alpha_s U^{n+1}; \\ \frac{1}{c\tau} S^{n+1} + \frac{1}{3h} \Delta_i U^{n+1} + \alpha S^{n+1} &= \frac{1}{c\tau} S^n, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha = \alpha_c + \alpha_s$; $\tau = t^{n+1} - t^n$, $h = r_{i+1} - r_i$; $V_i = \frac{r_{i+1}^{\sigma+1} - r_i^{\sigma+1}}{\sigma + 1}$.

Прежде чем перейти к TVD-реконструкции, построим положительную схему РОМБ первого порядка. Обычно в качестве такой схемы берут схему, эквивалентную монотонной схеме бегущего счета в инвариантах. Однако для криволинейных геометрий возникает проблема, состоящая в том, что в обоих уравнениях для инвариантов появляется слагаемое $\frac{\sigma}{r^{\sigma-1}}(\psi_2 - \psi_1)$, которое может иметь любой знак. Из-за этого может нарушаться монотонность схемы бегущего счета в инвариантах. Предлагается следующий алгоритм разрешения данной проблемы. Если упомянутое слагаемое на предыдущей итерации отрицательно, то его переносим в правую часть уравнения как положительную добавку с предыдущей итерации, в противном случае учитываем слева нелинейным образом.

Выделим из системы (2) плоскую дивергенцию $\frac{1}{h}\Delta_i S$ и запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau}U^{n+1} + \frac{1}{h}\Delta_i S^{n+1} + \alpha U^{n+1} + 0,5(1 + \text{sign } \Lambda^{n+1})\Lambda^{n+1} &= \frac{1}{c\tau}U^n + Q^{n+1}; \\ \frac{1}{c\tau}S^{n+1} + \frac{1}{3h}\Delta_i U^{n+1} + \alpha S^{n+1} &= \frac{1}{c\tau}S^n, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Lambda = \frac{1}{V_i}\Delta_i(r^\sigma S) - \frac{1}{h}\Delta_i S$, а правая часть первого уравнения всегда положительна и

$$Q^{n+1} = \alpha_c B^{n+1} + \alpha_s U^{n+1} - 0,5(1 - \text{sign } \Lambda^{n+1})\Lambda^{n+1}.$$

Для плоской геометрии $\Lambda = 0$. Для цилиндрически-симметричной геометрии

$$\Lambda = 2\frac{(rS)_{i+1} - (rS)_i}{r_{i+1}^2 - r_i^2} - \frac{S_{i+1} - S_i}{h} = \frac{S_{i+1} + S_i}{r_{i+1} + r_i} = x_i(S_i + S_{i+1}), \quad x_i = \frac{1}{r_{i+1} + r_i}.$$

Для сферически-симметричной геометрии

$$\begin{aligned} \Lambda &= 3\frac{(r^2S)_{i+1} - (r^2S)_i}{r_{i+1}^3 - r_i^3} - \frac{S_{i+1} - S_i}{h} = \frac{(r_{i+1} + r_i)(S_{i+1} + S_i) + r_{i+1}S_{i+1} + r_iS_i}{r_i^2 + r_{i+1}r_i + r_{i+1}^2} = x_iS_i + y_iS_{i+1}, \\ x_i &= \frac{r_{i+1} + 2r_i}{r_i^2 + r_{i+1}r_i + r_{i+1}^2}, \quad y_i = \frac{2r_{i+1} + r_i}{r_i^2 + r_{i+1}r_i + r_{i+1}^2}. \end{aligned}$$

Систему (3) будем решать итерационно, совместно с уравнением энергии:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau}U^{\nu+1} + \frac{1}{h}\Delta_i S^{\nu+1} + \alpha U^{\nu+1} + 0,5(1 + \text{sign } \Lambda^\nu)\Lambda^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau}U^\nu + Q^{\nu+1/2}; \\ \frac{1}{c\tau}S^{\nu+1} + \frac{1}{3h}\Delta_i U^{\nu+1} + \alpha S^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau}S^\nu, \end{aligned} \quad (4)$$

где $Q^{\nu+1/2} = \alpha_c B^{\nu+1} + \alpha_s U^\nu - 0,5(1 - \text{sign } \Lambda^\nu)\Lambda^\nu$, а организация итераций будет такой, что решение системы (4) происходит с известной правой частью.

Запишем систему (4) в инвариантах $\psi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{3}}U \mp S$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau}\psi_1^{\nu+1} - \frac{1}{h\sqrt{3}}\Delta_i\psi_1^{\nu+1} + \alpha\psi_1^{\nu+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 + \text{sign } \Lambda^\nu)\Lambda^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau}\psi_1^\nu + \frac{1}{\sqrt{3}}Q^{\nu+1/2}; \\ \frac{1}{c\tau}\psi_2^{\nu+1} + \frac{1}{h\sqrt{3}}\Delta_i\psi_2^{\nu+1} + \alpha\psi_2^{\nu+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(1 + \text{sign } \Lambda^\nu)\Lambda^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau}\psi_2^\nu + \frac{1}{\sqrt{3}}Q^{\nu+1/2}. \end{aligned}$$

Для построения монотонной аппроксимации перейдем к нелинейным схемам. Приведем левые части этих уравнений к зависимости только от $\psi_1^{\nu+1}$ или $\psi_2^{\nu+1}$, заменив соответственно выражение $\Lambda^{\nu+1}(\psi_1^{\nu+1}, \psi_2^{\nu+1}) = \frac{1}{2} \Delta_i \left[\left(\frac{r^\sigma}{V} - \frac{1}{h} \right) (\psi_2^{\nu+1} - \psi_1^{\nu+1}) \right]$ на $\frac{\Lambda^\nu}{\psi_1^\nu} \psi_1^{\nu+1}$ или на $\frac{\Lambda^\nu}{\psi_2^\nu} \psi_2^{\nu+1}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau} \psi_1^{\nu+1} - \frac{1}{h\sqrt{3}} \Delta_i \psi_1^{\nu+1} + \alpha \psi_1^{\nu+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 + \text{sign} \Lambda^\nu) \frac{\Lambda^\nu}{\psi_1^\nu} \psi_1^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau} \psi_1^n + \frac{1}{\sqrt{3}} Q^{\nu+1/2}; \\ \frac{1}{c\tau} \psi_2^{\nu+1} + \frac{1}{h\sqrt{3}} \Delta_i \psi_2^{\nu+1} + \alpha \psi_2^{\nu+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 + \text{sign} \Lambda^\nu) \frac{\Lambda^\nu}{\psi_2^\nu} \psi_2^{\nu+1} &= \frac{1}{c\tau} \psi_2^n + \frac{1}{\sqrt{3}} Q^{\nu+1/2}, \end{aligned}$$

или в общем виде

$$\frac{1}{c\tau} \psi^{\nu+1} + \lambda \Delta_i \psi^{\nu+1} + \alpha' \psi^{\nu+1} = f^{\nu+1/2}, \quad (5)$$

$$\text{где } \psi = \psi_{1,2}; \lambda = \mp \frac{1}{h\sqrt{3}}; \alpha' = \begin{cases} \alpha + \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 + \text{sign} \Lambda^\nu) \frac{\Lambda^\nu}{\psi_1^\nu}; \\ \alpha + \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 + \text{sign} \Lambda^\nu) \frac{\Lambda^\nu}{\psi_2^\nu}; \end{cases} \quad f = f_{1,2} \geq 0; f_{1,2}^{\nu+1/2} = \frac{1}{c\tau} \psi_{1,2}^n + \frac{1}{\sqrt{3}} Q^{\nu+1/2}.$$

Для уравнения (5) при положительной правой части можно построить положительную схему первого порядка точности, используя соотношения связи

$$\psi_{i+1/2} = \psi_{i+1} \quad \text{при} \quad \lambda > 0; \quad \psi_{i+1/2} = \psi_i \quad \text{при} \quad \lambda < 0. \quad (6)$$

Теперь с помощью TVD-методологии будем повышать порядок аппроксимации. Представим ψ на интервале $r_i \leq r \leq r_{i+1}$ в кусочно-линейной форме:

$$\psi(r) = \psi_{i+1/2} + \frac{\partial \psi_{i+1/2}}{\partial r} (r - r_{i+1/2}), \quad r_{i+1/2} = 0,5 (r_i + r_{i+1}), \quad (7)$$

т. е. реконструкцию решения проведем в инвариантах.

В соответствии с TVD-методологией в качестве $\frac{\partial \psi_{i+1/2}}{\partial r}$ берутся некоторые ограничители, обычно выбирающие минимальную по модулю из односторонних производных. Тогда формула (7) дает

$$(\psi_1)_i^{\nu+1} = (\psi_1)_{i+1/2}^{\nu+1} - 0,5L (\Delta \psi_1)_{i+1/2}^{\nu+1}; \quad (\psi_2)_{i+1}^{\nu+1} = (\psi_2)_{i+1/2}^{\nu+1} + 0,5L (\Delta \psi_2)_{i+1/2}^{\nu+1}, \quad (8)$$

где $(\Delta \psi)_{i-1/2} = \psi_{i+1/2} - \psi_{i-1/2}$; $L(\Delta \psi)_{i+1/2} = L(\Delta \psi_{i-1/2}, \Delta \psi_{i+1/2})$ — ограничитель, например, $L(a, b) = \min \text{mod}(a, b) = 0,5 (\text{sign}(a) + \text{sign}(b)) \min(|a|, |b|)$.

Формулы (8) соответствуют трехточечной схеме. Проведем линейризацию следующим образом:

$$\begin{aligned} (\psi_1)_i^{\nu+1} &= a_- (\psi_1)_{i+1/2}^{\nu+1}, & a_- &= 1 - \frac{1}{2} \frac{L(\Delta \psi_1)_{i+1/2}^n}{(\psi_1)_{i+1/2}^n}; \\ (\psi_2)_{i+1}^{\nu+1} &= a_+ (\psi_2)_{i+1/2}^{\nu+1}, & a_+ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{L(\Delta \psi_2)_{i+1/2}^n}{(\psi_2)_{i+1/2}^n}. \end{aligned} \quad (9)$$

При $\psi_1^n = 0$ полагаем $a_- = 1$, при $\psi_2^n = 0$ полагаем $a_+ = 1$. Здесь использован тот факт, что $\frac{L(\Delta \psi)_{i+1/2}^{\nu+1}}{(\psi)_{i+1/2}^{\nu+1}} \approx \frac{L(\Delta \psi)_{i+1/2}^n}{(\psi)_{i+1/2}^n}$ как дробно-линейный функционал слабо меняется. Соотношения (9) с точностью до $O(h)$ отличаются от соотношений связи схемы первого порядка (6):

$$a_\pm - 1 = \pm \frac{L(\Delta \psi)_{i+1/2}^n}{2\psi_{i+1/2}^n} \approx \pm \frac{h}{2\psi_{i+1/2}^n} \frac{\partial \psi_{i+1/2}^n}{\partial r} = \pm \frac{h}{2} \frac{\partial (\ln \psi_{i+1/2}^n)}{\partial r} = O(h).$$

Покажем, что введенные указанным образом коэффициенты a_{\pm} удовлетворяют условию $0,5 \leq a_{\pm} \leq 1,5$. При анализе поведения решения на интервале $r_{i-1/2} \leq r \leq r_{i+3/2}$ возможны три случая.

Первый случай — когда $\psi_{i+1/2}^n$ не лежит между $\psi_{i-1/2}^n$ и $\psi_{i+3/2}^n$, или, что то же самое, $\Delta\psi_{i-1/2}^n$, $\Delta\psi_{i+1/2}^n$ имеют разные знаки. Тогда по определению ограничителя $\min \text{mod}$ следует $L = 0$ и $a_{\pm} = 1$. Схема в данной точке становится схемой первого порядка.

Второй случай, когда $\psi_{i+1/2}^n$ лежит между $\psi_{i-1/2}^n$ и $\psi_{i+3/2}^n$, $\psi_{i-1/2}^n \leq \psi_{i+1/2}^n \leq \psi_{i+3/2}^n$, рассмотрим сначала для a_+ . Тогда справедливы неравенства $0 \leq L \left(\Delta\psi_{i-1/2}^n, \Delta\psi_{i+1/2}^n \right) \leq \Delta\psi_{i-1/2}^n$ и $0 \leq L \left(\Delta\psi_{i-1/2}^n, \Delta\psi_{i+1/2}^n \right) \leq \Delta\psi_{i+1/2}^n$. Отсюда получаем

$$0 \leq \frac{L \left(\Delta\psi_{i-1/2}^n, \Delta\psi_{i+1/2}^n \right)}{\psi_{i+1/2}^n} \leq 1 - \frac{\psi_{i-1/2}^n}{\psi_{i+1/2}^n} \leq 1 \quad \text{и} \quad 1 \leq (a_+)_{i+1/2}^n \leq 1 + \frac{1}{2} \frac{L \left(\Delta\psi_{i-1/2}^n, \Delta\psi_{i+1/2}^n \right)}{\psi_{i+1/2}^n} \leq \frac{3}{2}.$$

Третий случай — когда $\psi_{i+1/2}^n$ лежит между $\psi_{i-1/2}^n$ и $\psi_{i+3/2}^n$, $\psi_{i-1/2}^n \geq \psi_{i+1/2}^n \geq \psi_{i+3/2}^n$. Тогда $0 \geq L \left(\Delta\psi_{i-1/2}^n, \Delta\psi_{i+1/2}^n \right) \geq \Delta\psi_{i-1/2}^n$ и $0 \geq L \left(\Delta\psi_{i-1/2}^n, \Delta\psi_{i+1/2}^n \right) \geq \Delta\psi_{i+1/2}^n$. Отсюда получаем

$$0 \geq \frac{L \left(\Delta\psi_{i-1/2}^n, \Delta\psi_{i+1/2}^n \right)}{\psi_{i+1/2}^n} \geq \frac{\psi_{i+3/2}^n}{\psi_{i+1/2}^n} - 1 \quad \text{и}$$

$$1 \geq (a_+)_{i+1/2}^n \geq 1 + \frac{1}{2} \frac{L \left(\Delta\psi_{i-1/2}^n, \Delta\psi_{i+1/2}^n \right)}{\psi_{i+1/2}^n} \geq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\psi_{i+3/2}^n}{\psi_{i+1/2}^n} - 1 \right) \geq \frac{1}{2}.$$

Окончательно получаем $\frac{1}{2} \leq (a_+)_{i+1/2}^n \leq \frac{3}{2}$.

Аналогично можно получить ограничение на коэффициент a_- .

Подставляя полученные соотношения связи (9) в основное уравнение (5), получаем при $\lambda > 0$

$$(\psi_2)_{i+1/2}^{\nu+1} = \frac{1}{1 + C (a_+)_{i+1/2}^n} \frac{1}{c\tau q'} (\psi_2)_{i+1/2}^n + \frac{C (a_+)_{i-1/2}^n}{1 + C (a_+)_{i+1/2}^n} (\psi_2)_{i-1/2}^{\nu+1} + \frac{1}{\sqrt{3}q' \left(1 + C (a_+)_{i+1/2}^n \right)} Q_{i+1/2}^{\nu+1/2},$$

где $C = \frac{\lambda}{hq'}$, $q' = \frac{1}{c\tau} + \alpha'$. В силу положительности a_+ следует положительность $(\psi_2)_{i+1/2}^{\nu+1} \geq 0$ при $(\psi_2)_{i+1/2}^n \geq 0$ и $(\psi_2)_{i-1/2}^{\nu+1} \geq 0$.

Аналогично при $\lambda < 0$ можно получить оценки для $(\psi_1)_{i+1/2}^{\nu+1} \geq 0$.

Доказательство принадлежности этой схемы к TVD-схемам затруднено из-за проведенной линеаризации.

По формулам обратного перехода $U = \frac{\sqrt{3}}{2} (\psi_1 + \psi_2)$, $S = \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1)$ получаем из формул (6) соотношения связи для U и S :

$$U_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_i}{a_-} + \frac{U_{i+1}}{a_+} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{S_{i+1}}{a_+} - \frac{S_i}{a_-} \right); \quad S_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{S_i}{a_-} + \frac{S_{i+1}}{a_+} \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{U_{i+1}}{a_+} - \frac{U_i}{a_-} \right). \quad (10)$$

Из системы (5) по формулам обратного перехода получаем

$$\frac{1}{c\tau} U^{\nu+1} + \frac{1}{h} \Delta_i S^{\nu+1} + \alpha U^{\nu+1} + W_1^{\nu+1} = \frac{1}{c\tau} U^n + Q^{\nu+1/2};$$

$$\frac{1}{c\tau} S^{\nu+1} + \frac{1}{3h} \Delta_i U^{\nu+1} + \alpha S^{\nu+1} + W_2^{\nu+1} = \frac{1}{c\tau} S^n, \quad (11)$$

где

$$W_1^{\nu+1} = \frac{\Lambda^\nu}{4} (1 + \text{sign } \Lambda^\nu) \left(\frac{\psi_1^{\nu+1}}{\psi_1^\nu} + \frac{\psi_2^{\nu+1}}{\psi_2^\nu} \right) = \Lambda_0^\nu \frac{U^\nu U^{\nu+1} - 3S^\nu S^{\nu+1}}{(U^2 - 3S^2)^\nu};$$

$$W_2^{\nu+1} = \frac{\Lambda^\nu}{4\sqrt{3}} (1 + \text{sign } \Lambda^\nu) \left(\frac{\psi_2^{\nu+1}}{\psi_2^\nu} - \frac{\psi_1^{\nu+1}}{\psi_1^\nu} \right) = \Lambda_0^\nu \frac{U^\nu S^{\nu+1} - S^\nu U^{\nu+1}}{(U^2 - 3S^2)^\nu}; \quad \Lambda_0^\nu = \frac{\Lambda^\nu}{2} (1 + \text{sign } \Lambda^\nu).$$

Выражение для W можно представить в виде

$$W_1^{\nu+1} = \delta U^{\nu+1} - 3\theta S^{\nu+1}; \quad W_2^{\nu+1} = -\theta U^{\nu+1} + \delta S^{\nu+1},$$

где $\delta = \frac{\Lambda_0^\nu}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\psi_1^\nu} + \frac{1}{\psi_2^\nu} \right) = \frac{\Lambda_0^\nu U^\nu}{(U^2 - 3S^2)^\nu}$; $\theta = \frac{\Lambda_0^\nu}{6} \left(\frac{1}{\psi_1^\nu} - \frac{1}{\psi_2^\nu} \right) = \frac{\Lambda_0^\nu S^\nu}{(U^2 - 3S^2)^\nu}$. Нетрудно показать,

что при сходимости итераций $W_1^{\nu+1} \rightarrow \Lambda_0^{\nu+1}$, $W_2^{\nu+1} \rightarrow 0$.

Подставляя соотношения связи (10) в систему (11), получаем следующие уравнения:

$$a_i^0 U_i + b_i^0 U_{i+1} + c_i^0 S_i + d_i^0 S_{i+1} = f_i^0; \quad a_i^1 U_i + b_i^1 U_{i+1} + c_i^1 S_i + d_i^1 S_{i+1} = f_i^1, \quad (12)$$

где

$$a_i^0 = c_i^1 = \left(\frac{1}{a_-} \left(1 + \frac{\theta\sqrt{3}}{q_1} \right) \right)_{i+1/2}^\nu; \quad b_i^0 = d_i^1 = \left(\frac{1}{a_+} \left(1 - \frac{\theta\sqrt{3}}{q_1} \right) \right)_{i+1/2}^\nu;$$

$$c_i^0 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{a_-} - \frac{2}{q_1 h} - \frac{3\theta}{q_1 a_-} \right)_{i+1/2}^\nu; \quad d_i^0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{a_+} + \frac{2}{q_1 h} - \frac{3\theta}{q_1 a_+} \right)_{i+1/2}^\nu; \quad q_1 = \frac{1}{c\tau} + \alpha + \delta; \quad (13)$$

$$a_i^1 = \frac{c_i^0}{3}; \quad b_i^1 = \frac{d_i^0}{3}; \quad f_i^0 = \frac{2}{q_1} \left(\frac{1}{c\tau} U_{i+1/2}^n + Q_{i+1/2}^{\nu+1/2} \right); \quad f_i^1 = \frac{2}{c\tau q_1} S_{i+1/2}^n;$$

$$Q^{\nu+1/2} = \alpha_c B^{\nu+1} + \alpha_s U^\nu - 0,5 (1 - \text{sign } \Lambda^\nu) \Lambda^\nu.$$

Система уравнений (12), (13) является следствием системы уравнений в инвариантах (5) с соотношениями связи (6).

Наряду с данной системой можно рассмотреть вторую схему, в которой в системе уравнений (11) W_1 , W_2 заменены на предельные значения $W_1^{\nu+1} = \Lambda_0^{\nu+1} = 0,5 (1 + \text{sign } \Lambda^\nu) (x_i S_i^{\nu+1} + y_i S_{i+1}^{\nu+1})$, $W_2^{\nu+1} = 0$. В качестве соотношений связи используются те же соотношения (10). Тогда получим систему уравнений (12), где коэффициенты имеют вид

$$a_i^0 = c_i^1 = \frac{1}{a_-}; \quad b_i^0 = d_i^1 = \frac{1}{a_+}; \quad c_i^0 = -\frac{\sqrt{3}}{a_-} - \frac{2}{qh} + \frac{x}{q} (1 + \text{sign } \Lambda^\nu);$$

$$d_i^0 = \frac{\sqrt{3}}{a_+} + \frac{2}{qh} + \frac{y}{q} (1 + \text{sign } \Lambda^\nu); \quad a_i^1 = -\frac{1}{\sqrt{3}a_-} - \frac{2}{3qh}; \quad b_i^1 = \frac{1}{\sqrt{3}a_+} + \frac{2}{3qh}; \quad q = \frac{1}{c\tau} + \alpha;$$

$$f_i^0 = \frac{2}{q_{i+1/2}} \left(\frac{1}{c\tau} U_{i+1/2}^n + Q_{i+1/2}^{\nu+1/2} \right); \quad f_i^1 = \frac{2}{c\tau q_{i+1/2}} S_{i+1/2}^n.$$

В качестве третьей схемы возьмем систему уравнений (12), где

$$a_i^0 = c_i^1 = 1; \quad b_i^0 = d_i^1 = 1; \quad c_i^0 = -\sqrt{3} - \frac{2r_i^\sigma}{q_1 V_i}; \quad d_i^0 = \sqrt{3} + \frac{2r_{i+1}^\sigma}{q_1 V_i}; \quad f^0 = \frac{2}{q_1} \left(\frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1} \right);$$

$$a_i^1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3qh}; \quad b_i^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3qh}; \quad f^1 = \frac{2}{c\tau q} S^n; \quad q_1 = \frac{1}{c\tau} + \alpha_c; \quad q = \frac{1}{c\tau} + \alpha. \quad (14)$$

Этот вариант соответствует линейной схеме РОМБ [3] первого порядка без переноса Λ в правую часть в форме $0,5 (1 - \text{sign } \Lambda^\nu) \Lambda^\nu$ при отрицательном Λ . Третий вариант имеет методическое значение, он показывает важность процедуры переноса Λ вправо при $\Lambda < 0$. В противном случае можно получить отрицательные значения плотности излучения даже в схеме первого порядка.

Видно, что в плоском случае без рассеяния коэффициенты (13) совпадают с коэффициентами (14) при $a_+ = a_- = 1$, так как справедливы соотношения $\Lambda = \delta = \theta = 0$. Для криволинейных геометрий такой эквивалентности нет.

Метод простой итерации

Если в системе (12) функцию Планка в выражении для Q брать с предыдущей итерации $B^{\nu+1} = B^\nu$, то получаем метод простой итерации, и система линейных уравнений (12) решается методом потоковой прогонки.

Предполагаем связь между U_i и S_i в виде $X_i U_i + Y_i S_i = Z_i$, $X_i + Y_i = 1$, где X_i, Y_i, Z_i — прогоночные коэффициенты, которые вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= L_i (X_i \langle cb \rangle_i + Y_i \langle ba \rangle_i); & Y_{i+1} &= L_i (X_i \langle cd \rangle_i + Y_i \langle da \rangle_i); \\ Z_{i+1} &= L_i (X_i \langle cf \rangle_i + Y_i \langle fa \rangle_i + Z_i \langle ac \rangle_i); & L_i^{-1} &= X_i (\langle cb \rangle_i + \langle cd \rangle_i) + Y_i (\langle ba \rangle_i + \langle da \rangle_i); \\ X_0 &= \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0}; & Y_0 &= \frac{\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0}; & Z_0 &= \frac{\varphi_0}{\alpha_0 + \beta_0}; \\ \langle ab \rangle &= a^1 b^0 - a^0 b^1; & \langle ca \rangle &= c^1 a^0 - c^0 a^1; & \dots & \end{aligned}$$

Формулы обратной прогонки:

$$\begin{aligned} U_i &= L_i Y_{i+1}^{-1} (\langle bd \rangle_i Y_i U_{i+1} + \langle df \rangle_i Y_i + \langle cd \rangle_i Z_i), & S_i &= Y_i^{-1} (Z_i - X_i U_i), & i &= I-1, \dots, 1, 0; \\ U_I &= (\beta_1 Z_I - \varphi_1 Y_I) (\beta_1 X_I - \alpha_1 Y_I)^{-1}; & S_I &= (\varphi_1 X_I - \alpha_1 Z_I) (\beta_1 X_I - \alpha_1 Y_I)^{-1}. \end{aligned}$$

При $Y_{i=0} = 0$ поток вычисляем по формуле $S_i = \langle bc \rangle_i^{-1} (\langle bf \rangle_i - \langle bd \rangle_i S_{i+1} - \langle ba \rangle_i Z_i X_i^{-1})$. Совместно с уравнениями переноса излучения (12) решается уравнение энергии

$$\frac{E^{\nu+1} - E^n}{\tau} = \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g^{\nu+1} - B_g^{\nu+1}).$$

Линеаризуем по температуре внутреннюю энергию и функцию Планка:

$$\begin{aligned} (E^{\nu+1}(T))^{k+1} &= (E^{\nu+1}(T))^k + E_T^k (T^{k+1} - T^k); \\ (B_g^{\nu+1}(T))^{k+1} &= (B_g^{\nu+1}(T))^k + B_{gT}^k (T^{k+1} - T^k), \end{aligned}$$

где $E_T^k = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)^k$; $B_{gT}^k = \left(\frac{\partial B_g}{\partial T}\right)^k$. Подставляя полученные значения $U_g^{\nu+1}$ в линеаризованное по температуре уравнение энергии, получаем выражение для нахождения температуры:

$$T_{i+1/2}^{k+1} = T_{i+1/2}^k + \left(\frac{E^n - E^k + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{c,g}^\nu (U_g^{\nu+1} - B_g^k)}{E_T^k + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{c,g}^\nu B_{g,T}^k} \right)_{i+1/2}, \quad (15)$$

где k — ньютоновские итерации по температуре.

При сходимости ньютоновских итераций по линеаризации $E(T)$ и $B_g(T)$ получаем температуру $T^{\nu+1} = T^{k+1}$, по которой вычисляем $B_g^{\nu+1}$ во всех точках разностной и энергетической сеток. Внешние итерации ν заканчиваются при сходимости $T^{\nu+1}$. Итерационные процессы заканчиваются при выполнении условий

$$\left| T_{i+1/2}^{k+1} - T_{i+1/2}^k \right| \leq \varepsilon_{\text{cx}}^k \left(\varepsilon_1 + T_{i+1/2}^k \right); \quad \left| T_{i+1/2}^{\nu+1} - T_{i+1/2}^\nu \right| \leq \varepsilon_{\text{cx}}^\nu \left(\varepsilon_1 + T_{i+1/2}^\nu \right).$$

Можно температуру вычислять по формуле (15) до вычисления $U_g^{\nu+1}$. Тогда выражение для нахождения температуры примет вид

$$T_{i+1/2}^{k+1} = T_{i+1/2}^k + \left(\frac{E^n - E^k + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{c,g}^\nu (U_g^\nu - B_g^k)}{E_T^k + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{c,g}^\nu B_{g,T}^k} \right)_{i+1/2}.$$

Метод выделения диагональной матрицы

Будем обсчитывать ячейку разностной сетки независимо от соседних интервалов, задавая в качестве граничных условий односторонние потоки с предыдущей итерации [8]. Это делается для определения плотности излучения в центре данной ячейки. Зная плотности излучения в центрах ячеек, получаем температуру из уравнения энергии.

В качестве граничного условия на левой границе ячейки в точке i будем рассматривать некоторую комбинацию искомых функций (псевдоинвариант)

$$\tilde{\alpha}_0^\nu U_i^{\nu+1/2} + \tilde{\beta}_0^\nu S_i^{\nu+1/2} = \tilde{\varphi}_0^\nu, \quad (16)$$

где $\tilde{\varphi}_0^\nu = \tilde{\alpha}_0^\nu U_i^\nu + \tilde{\beta}_0^\nu S_i^\nu$. В качестве граничного условия на правой границе ячейки в точке $i+1$ будем рассматривать аналогичную комбинацию

$$\tilde{\alpha}_1^\nu U_{i+1}^{\nu+1/2} - \tilde{\beta}_1^\nu S_{i+1}^{\nu+1/2} = \tilde{\varphi}_1^\nu, \quad (17)$$

где $\tilde{\varphi}_1^\nu = \tilde{\alpha}_1^\nu U_{i+1}^\nu - \tilde{\beta}_1^\nu S_{i+1}^\nu$. Параметры $\tilde{\alpha}_{0,g}$, $\tilde{\beta}_{0,g}$, $\tilde{\varphi}_{0,g}$, $\tilde{\alpha}_{1,g}$, $\tilde{\beta}_{1,g}$, $\tilde{\varphi}_{1,g}$ отличаются от параметров для задания граничных условий (1). В данной работе рассматривались следующие значения:

$$\tilde{\alpha}_{0,g} = \tilde{\alpha}_{1,g} = 0,25; \quad \tilde{\beta}_{0,g} = \tilde{\beta}_{1,g} = 0,5; \quad (\tilde{\varphi}_0)_{g,i} = \frac{1}{4}U_{g,i} + \frac{1}{2}S_{g,i}; \quad (\tilde{\varphi}_1)_{g,i} = \frac{1}{4}U_{g,i} - \frac{1}{2}S_{g,i}.$$

Систему линейных уравнений (13) будем решать внутри данной ячейки методом встречной прогонки, исходя из заданных входящих псевдоинвариантов с предыдущей итерации. Предполагаем связь между U_i и S_i для прогонки вперед (в сторону роста i) в виде

$$X_i^+ U_i + Y_i^+ S_i = Z_i^+ \quad (18)$$

и для прогонки назад (в сторону убывания i) — в виде

$$X_i^- U_i - Y_i^- S_i = Z_i^-. \quad (19)$$

Используя уравнения (18), (19), получаем рекуррентные соотношения для нахождения прогоночных коэффициентов

$$\begin{aligned} X_{i+1}^+ &= \langle cb \rangle_i X_1^+ + \langle ba \rangle_i Y_1^+; & Y_{i+1}^+ &= \langle cd \rangle_i X_1^+ + \langle da \rangle_i Y_1^+; \\ Z_{i+1}^+ &= \langle cf \rangle_i X_1^+ + \langle fa \rangle_i Y_1^+ + \langle ac \rangle_i Z_1^+ \end{aligned} \quad (20)$$

с нормировкой

$$X_{i+1}^+ = \frac{X_{i+1}^+}{X_{i+1}^+ + Y_{i+1}^+}; \quad Y_{i+1}^+ = \frac{Y_{i+1}^+}{X_{i+1}^+ + Y_{i+1}^+}; \quad Z_{i+1}^+ = \frac{Z_{i+1}^+}{X_{i+1}^+ + Y_{i+1}^+}; \quad i = 0, 1, \dots, I-1.$$

Здесь роль f_i^0 играет $f_i^0 + \left(\frac{2\alpha_c}{q_1} B \right)_{i+1/2}$; $\langle ab \rangle = a^1 b^0 - a^0 b^1$, $\langle ca \rangle = c^1 a^0 - c^0 a^1$, ...

В силу граничного условия на границе Γ_0 ($i = 0$) имеем $X_0^+ = \alpha_0$; $Y_0^+ = \beta_0$; $Z_0^+ = \varphi_0$. Для прогонки назад

$$\begin{aligned} X_i^- &= \langle da \rangle_i X 1_{i+1}^- + \langle ba \rangle_i Y 1_{i+1}^-; & Y_i^- &= \langle cd \rangle_i X 1_{i+1}^- + \langle cb \rangle_i Y 1_{i+1}^-; \\ Z_i^- &= \langle df \rangle_i X 1_{i+1}^- + \langle bf \rangle_i Y 1_{i+1}^- + \langle bd \rangle_i Z 1_{i+1}^- \end{aligned} \quad (21)$$

с нормировкой

$$X 1_i^- = \frac{X_i^-}{X_i^- + Y_i^-}; \quad Y 1_i^- = \frac{Y_i^-}{X_i^- + Y_i^-}; \quad Z 1_i^- = \frac{Z_i^-}{X_i^- + Y_i^-}; \quad i = I - 1, I - 2, \dots, 1, 0.$$

В силу граничного условия на границе Γ_1 ($i = I$) имеем $X_I^- = \alpha_1$; $Y_I^- = \beta_1$; $Z_I^- = \varphi_1$.

Для метода выделения диагонального элемента делается один шаг прямой прогонки в сторону возрастания индекса и один шаг встречной прогонки в сторону убывания индекса. На границе Γ_1 имеем $I = i + 1$.

После проведения встречных прогонок вычисляем U_i , S_i по формулам

$$U_i = \frac{Y_i^- Z_i^+ + Y_i^+ Z_i^-}{X_i^+ Y_i^- + X_i^- Y_i^+}; \quad S_i = \frac{X_i^- Z_i^+ - X_i^+ Z_i^-}{X_i^+ Y_i^- + X_i^- Y_i^+}.$$

Делая в разностной ячейке один шаг для прогонки вперед от точки i и один шаг для прогонки назад от точки $i + 1$ по формулам (18), (21), получаем в этих точках уравнения

$$X_{i+1}^+ U_{i+1}^{\nu+1/2} + Y_{i+1}^+ S_{i+1}^{\nu+1/2} = (Z_{i+1}^+)^{\nu+1/2}; \quad (22)$$

$$X_i^- U_i^{\nu+1/2} - Y_i^- S_i^{\nu+1/2} = (Z_i^-)^{\nu+1/2}. \quad (23)$$

Из уравнений (16), (23) получаем

$$U_i = \frac{\tilde{\varphi}_0 Y_i^- + \tilde{\beta}_0 Z_i^-}{\tilde{\alpha}_0 Y_i^- + \tilde{\beta}_0 X_i^-}; \quad S_i = \frac{\tilde{\varphi}_0 X_i^- - \tilde{\alpha}_0 Z_i^-}{\tilde{\alpha}_0 Y_i^- + \tilde{\beta}_0 X_i^-}. \quad (24)$$

Из уравнений (17), (22) получаем

$$U_{i+1} = \frac{\tilde{\varphi}_1 Y_{i+1}^+ + \tilde{\beta}_1 Z_{i+1}^+}{\tilde{\alpha}_1 Y_{i+1}^+ + \tilde{\beta}_1 X_{i+1}^+}; \quad S_{i+1} = \frac{\tilde{\alpha}_1 Z_{i+1}^+ - \tilde{\varphi}_1 X_{i+1}^+}{\tilde{\alpha}_1 Y_{i+1}^+ + \tilde{\beta}_1 X_{i+1}^+}. \quad (25)$$

Из формул (24), (25) с учетом рекуррентных значений (20), (21) для Z_i^+ , Z_{i+1}^+ получаем

$$\Delta_i(r^\sigma S) = a_{11} B_{i+1/2} + a_{12}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2 \frac{\alpha_c}{q_1} a_1; & a_1 &= \frac{\tilde{\alpha}_1}{W_{i+1}} (c_i^1 X 1_i^+ - a_i^1 Y 1_i^+) + \frac{\tilde{\alpha}_0}{W_i} (d_i^1 X 1_{i+1}^- + b_i^1 Y 1_{i+1}^-); \\ W_i &= \frac{\tilde{\alpha}_0 Y_i^- + \tilde{\beta}_0 X_i^-}{r_i^\sigma}; & W_{i+1} &= \frac{\tilde{\alpha}_1 Y_{i+1}^+ + \tilde{\beta}_1 X_{i+1}^+}{r_{i+1}^\sigma}; & q_{1,i+1/2}^\nu &= \left(\frac{1}{c\tau} + \alpha + \delta \right)_{i+1/2}^\nu; \\ a_{12} &= \frac{2}{q_1} \left\{ a_1 \left[\frac{1}{c\tau} U_{i+1/2}^\nu + \alpha_s U^{\nu+1/2} - 0,5 (1 - \text{sign } \Lambda^\nu) \Lambda^\nu \right] + a_2 \frac{1}{c\tau} S_{i+1/2}^\nu \right\} + (R_1)_{i+1/2}^\nu; \\ a_2 &= \frac{\tilde{\alpha}_1}{W_{i+1}} (-c_i^0 X 1_i^+ + a_i^0 Y 1_i^+) - \frac{\tilde{\alpha}_0}{W_i} (d_i^0 X 1_{i+1}^- + b_i^0 Y 1_{i+1}^-); \\ (R_1)_{i+1/2} &= \left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{W_{i+1}} \langle ac \rangle_i Z 1_i^+ + \frac{\tilde{\alpha}_0}{W_i} \langle bd \rangle_i Z 1_{i+1}^- \right) - \frac{\tilde{\varphi}_1}{W_{i+1}} X_{i+1}^+ - \frac{\tilde{\varphi}_0}{W_i} X_i^-. \end{aligned}$$

Подставляя выражение (26) в первое уравнение системы (2), получаем явную формулу для плотности излучения:

$$U_{i+1/2}^{\nu+1/2} = \frac{c\tau}{1 + c\tau\alpha_{c,i+1/2}} \left(\left(\alpha_c - \frac{a_{11}}{V_i} \right) B^{\nu+1/2} + \frac{1}{c\tau} U^n - \frac{a_{12}}{V_i} \right)_{i+1/2}. \quad (27)$$

Подставляя формулу (27) в уравнение энергии и линеаризуя его по температуре, получаем выражение для нахождения температуры:

$$T_{i+1/2}^{k+1} = T_{i+1/2}^k + \left(\frac{E^n - E^k + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{c,g}^\nu (U_g^k - B_g^k)}{E_T^k + \tau \sum_{g=1}^G \alpha_{c,g}^\nu b_g^\nu B_{g,T}^k} \right)_{i+1/2},$$

где $U^k = \frac{1}{q_c} \left[\left(\alpha_c - \frac{a_{11}^\nu}{V_i} \right) B^k + \frac{1}{c\tau} U^n - \frac{a_{12}^\nu}{V_i} \right]$; $b = \frac{1}{c\tau q_c} + \frac{a_{11}}{q_c V_i}$; $q_c = \frac{1}{c\tau} + \alpha_c$. Можно показать, что коэффициент $\alpha_c - \frac{a_{11}}{h}$ всегда больше нуля.

При сходимости ньютоновских итераций по линеаризации $E(T)$ и $B_g(T)$ получаем температуру $T^{\nu+1/2}$, с которой переходим ко второму этапу для вычисления комбинаций $\tilde{\varphi}_0^{\nu+1}$, $\tilde{\varphi}_1^{\nu+1}$ во всех точках разностной и энергетической сеток.

Таким образом, метод выделения диагональной матрицы позволяет вычислять плотность излучения и температуру, исходя из значений псевдоинвариантов с предыдущей итерации. Это дает существенное ускорение итераций по сравнению с простой итерацией.

Численные расчеты

Отработка новой схемы проводилась на пяти задачах в сферически-симметричном или плоском случае.

В оптически плотных средах решение P_1 -уравнений близко к решению диффузионных уравнений. Хотя P_1 -приближение обычно не применяется в оптически прозрачных средах, для изучения монотонных свойств разностных схем был рассмотрен предельный случай прозрачных сред — вакуум. В сферически-симметричном или плоском случае в вакууме систему P_1 -уравнений при определенных граничных условиях можно решить аналитически. Задачи 1—4 построены на основе таких решений. Задача 1 интересна тем, что в сферически-симметричном случае авторы впервые нашли тест, на котором линейная разностная схема РОМБ первого порядка дает немонотонное решение.

Задача 5 (задача Флека) характеризуется большим числом итераций из-за резких отличий оптических толщин в соседних областях, поэтому в ней анализируются профиль теплового фронта и скорость сходимости итераций, а также монотонность и точность решения.

Задача 1. Задача построена на остывании области, заполненной только фотонами. В плоской геометрии остывает слой шириной 4 см. В сферически-симметричном случае остывает сфера радиусом 4 см ($0 \leq r \leq 4$). В плоской геометрии точное решение получено А. В. Вронским.

Начальное распределение поля излучения расписывается по Планку: $U_g = B_g(T = 1)$. Граничные условия на внешней границе имеют вид $\frac{1}{4}U_g - \frac{1}{2}S_g = 0$. Внутри сферы или на левой границе плоского слоя полагается $S_g = 0$. Коэффициент поглощения и коэффициент рассеяния равны 0. Начальная температура вещества и уравнение состояния вещества произвольные, так как в вакууме вещества нет.

По энергетической переменной расчеты выполнены на сетке с разбиением $\varepsilon_g = 15,0; 12,0; 10,0; 8,0; 7,0; 6,0; 5,5; 5,0; 4,5; 4,0; 3,5; 3,0; 2,6; 2,2; 1,8; 1,4; 1,0; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,15; 0,1; 0,08; 0,06;$

0,04; 0,02; 0,0 (число групп 28). Пространственная сетка равномерная — 10 000 интервалов. Шаг по времени $\tau = 10^{-7}$.

Профили температуры фотонов T_Φ от r на разные моменты времени (с шагом по времени $\Delta t = 0,0005$) в плоской геометрии приводятся на рис. 1.

Температура фотонов ведет себя следующим образом. В начальный момент времени ее график — горизонтальная прямая $T_\Phi = 1$. Затем справа (на внешней границе) температура начинает падать, и ступенька остывания идет к центру (кривые 1—5). Когда остывание доходит до центра сферы (левый край графика), то начинается новый этап остывания, когда ступенька идет слева направо (кривые 6—10). Затем описанные этапы повторяются (кривые 11—14, 15—19) и далее будут повторяться, постепенно уменьшая амплитуду ступенек и опускаясь к нулю, но не достигая его.

Из рис. 1 видно, что как схема первого, так и схема второго порядка дают монотонное решение, однако с течением времени профиль температуры размазывается сильнее по TVD-схеме первого порядка.

Перейдем к анализу результатов задачи в сферически-симметричной геометрии, где точного решения нет. Для начала приведем результаты расчетов по линейной схеме РОМБ первого порядка. Профили T_Φ от r на разные моменты времени (с шагом по времени $\Delta t = 0,05$) в сферически-симметричной геометрии по схеме РОМБ первого порядка приводятся на рис. 2. Пространственная сетка равномерная — 100 интервалов. Шаг по времени $\tau = 10^{-5}$.

Из рис. 2 видно, что разностная схема дает неправильное решение. Из-за немонотонности решения в схеме РОМБ приходится занулять отрицательные плотности и температуры. Зануление отрицательных величин приводит к неправильному решению, которое проявляется в появлении холодной кольцевой области в системе. Нефизичность решения не устраняется даже при уменьшении шага по пространству и времени.

На рис. 3 приведено решение, получаемое по схеме РОМБ на подробной сетке с мелким шагом по времени (10 000 интервалов, $\tau = 10^{-7}$).

На рис. 4 приведено решение, получаемое по построенной в данной работе схеме типа TVD (12), (13) в сферически-симметричной геометрии на грубой (100 интервалов, $\tau = 10^{-5}$) и подробной (10 000 интервалов, $\tau = 10^{-7}$) сетках. Решение на подробной сетке доведено до сходимости.

На рис. 5 приведено решение, получаемое по схеме типа TVD (12), (13) первого и второго порядков на подробной сетке (10 000 интервалов, $\tau = 10^{-7}$).

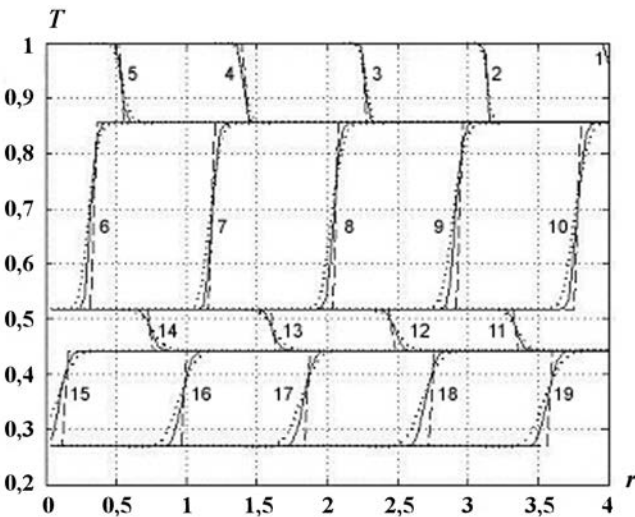


Рис. 1. Профили T_Φ от r в плоской геометрии для 1-го и каждого 5-го шагов по времени: 1 — $t = 0,0005$; 2 — $t = 0,0025$; 3 — $t = 0,005$; 4 — $t = 0,0075$ и т. д.; — — TVD-схема второго порядка; \dots — TVD-схема первого порядка; — — — точное решение

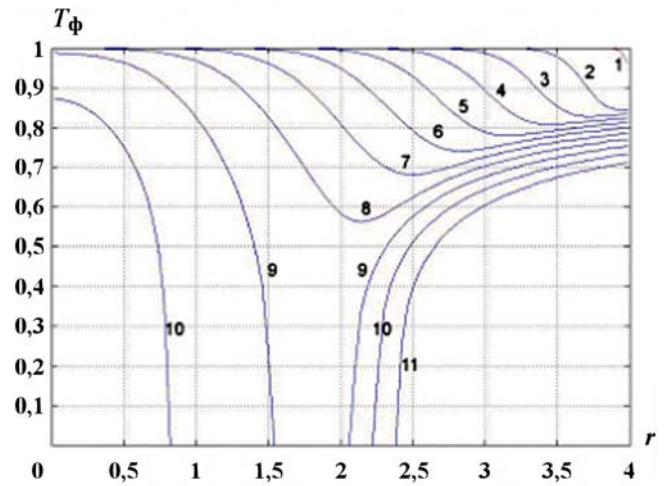


Рис. 2. Профили T_Φ от r в сферически-симметричной геометрии по схеме РОМБ первого порядка для 1-го (1) и затем каждого 5-го шагов по времени (2—11)

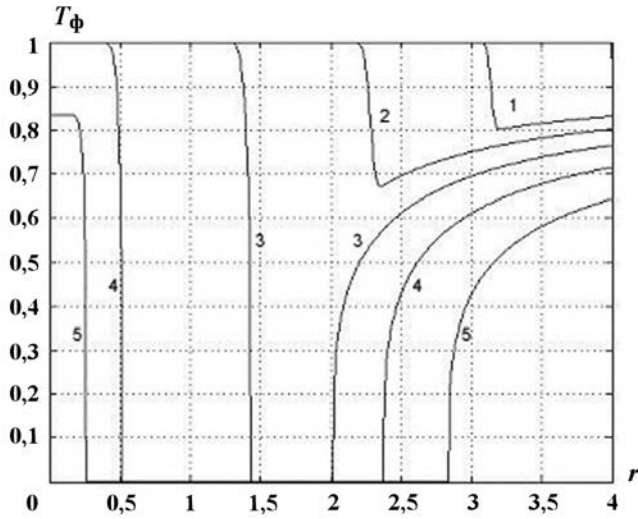


Рис. 3. Профили T_ϕ от r по схеме РОМБ на подробной сетке для различных моментов времени: 1 — $t = 0,00001$; 2 — $t = 0,0005$; 3 — $t = 0,001$; 4 — $t = 0,0015$; 5 — $t = 0,002$; 5 — $t = 0,0025$

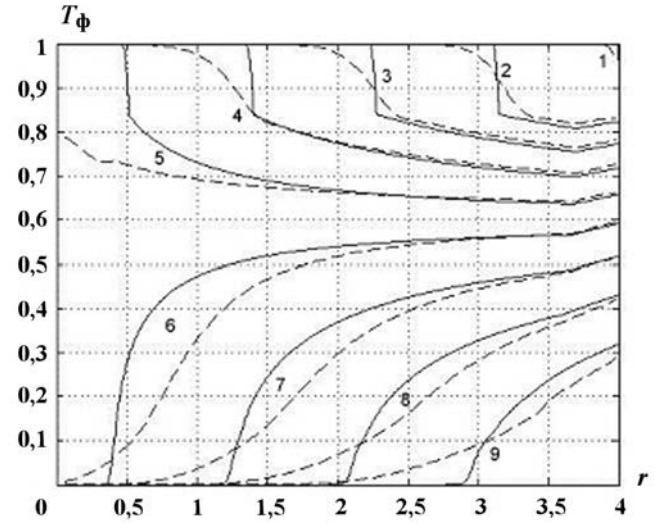


Рис. 4. Профили T_ϕ от r по схеме TVD для различных моментов времени: 1 — $t = 0,00001$; 2 — $t = 0,0005$; 3 — $t = 0,001$; 4 — $t = 0,0015$; 5 — $t = 0,002$ и т. д.; — — на подробной сетке; - - - на грубой сетке

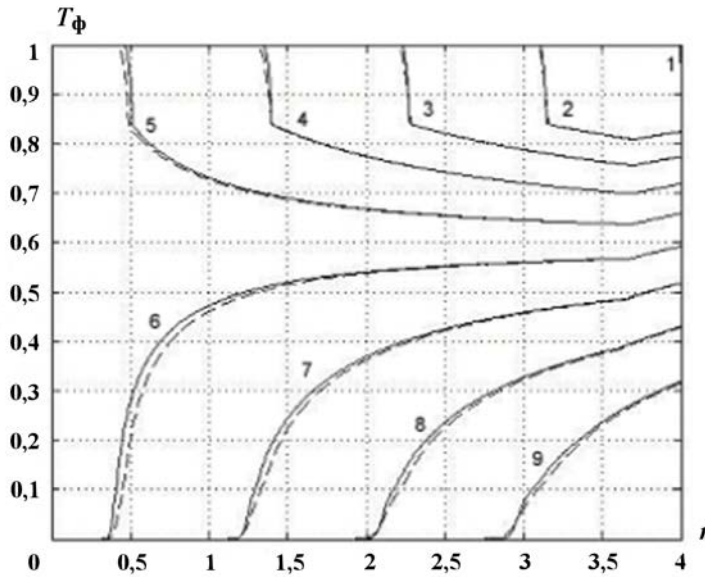


Рис. 5. Профили T_ϕ от r по схеме типа TVD на подробной сетке для различных моментов времени: 1 — $t = 0,0000001$; 2 — $t = 0,0005$; 3 — $t = 0,001$; 4 — $t = 0,0015$; 5 — $t = 0,002$ и т. д.; — — схема второго порядка; - - - схема первого порядка

Задача 2 (автомодельная волна). Задача построена на точном решении, которое описывает автомодельное излучение в вакууме для сферически-симметричной системы.

В сферической области радиусом $1 \leq r \leq 40$ задано начальное распределение $U = S = 0$. Граничные условия на внешней границе ($r = 40$) имеют вид

$$S = \begin{cases} \frac{1}{6} \left[\left(\frac{ct}{40} \right)^2 - 3 \right] & \text{при } ct > 40\sqrt{3}; \\ 0 & \text{при } ct \leq 40\sqrt{3}, \end{cases}$$

на внутренней границе ($r = 1$)

$$S = \begin{cases} \frac{1}{6} [(ct)^2 - 3] & \text{при } ct > \sqrt{3}; \\ 0 & \text{при } ct \leq \sqrt{3}. \end{cases}$$

Коэффициент поглощения и коэффициент рассеяния равны 0. Число групп 1. Пространственная сетка равномерная — 100 интервалов. Шаг по времени $\tau = 0,001$. Точное решение имеет вид

$$U = \begin{cases} \frac{a}{c} (c\xi - \sqrt{3}) & \text{при } c\xi > \sqrt{3}; \\ 0 & \text{при } c\xi \leq \sqrt{3}; \end{cases} \quad S = \begin{cases} \frac{a}{6c} (c^2\xi^2 - 3) & \text{при } c\xi > \sqrt{3}; \\ 0 & \text{при } c\xi \leq \sqrt{3}, \end{cases}$$

где $\xi = t/r$ — автомодельная переменная; a — произвольная константа (в задаче $a = c = 3\,000$).

В задаче аналитически определяется скорость распространения фронта излучения, равная $c/\sqrt{3}$, и параметр $\Lambda = \frac{\partial(r^2 S)}{r^2 \partial r} - \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{act^2}{3r^3}$.

На рис. 6 приведены профили U от r на моменты времени $ct = 5, 10, 15, 20$ (через 5 шагов). Видно, что численное решение по схеме типа TVD совпадает с аналитическим выражением.

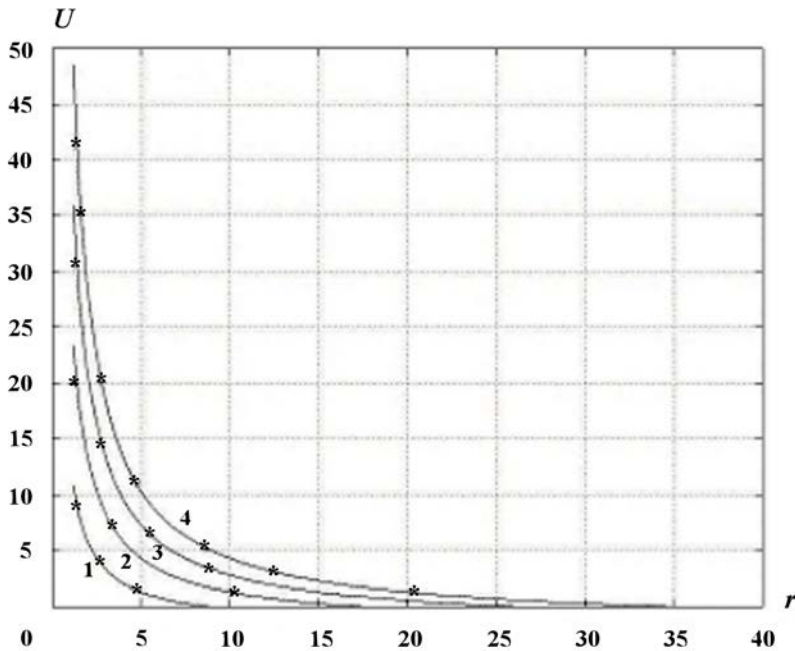


Рис. 6. Профили U от r : * — численное решение; — — точное решение; 1 — $t = 0,005$; 2 — $t = 0,01$; 3 — $t = 0,015$; 4 — $t = 0,02$

Задача 3 (остывание сферы). Задача построена на точном решении, которое описывает остывание области, заполненной только фотонами. В сферически-симметричном случае остывает сфера радиусом 50 см. Начальное распределение поля излучения задается формулой $U = 60 - r^2/2c$; $S = 0$. Граничные условия на внешней границе ($r = 50$) имеют вид $U = 0$ или $S = 50t/3$, в центре сферы $U = 60 - ct^2/2$ или $S = 0$. Так как сетка неподвижная и решение уходит с внешней границы, то граничные условия на внешней границе должны иметь вид $U = 0$ или $S = 50t/3$ при $r^2 \geq 120c - (ct)^2$. Коэффициент поглощения и коэффициент рассеяния равны 0. Число групп равно 1. Пространственная сетка равномерная — 100 интервалов. Шаг по времени $\tau = 0,001$. Точное решение имеет вид

$$U = \begin{cases} 60 - \frac{1}{2c} [(ct)^2 + r^2]; \\ 0 \text{ при } U \leq 0; \end{cases} \quad S = \begin{cases} \frac{tr}{3}; \\ 0 \text{ при } U \leq 0. \end{cases}$$

Из физического условия положительности входящего одностороннего потока $\frac{1}{4}U - \frac{1}{2}S \geq 0$ следует ограничение на время счета задачи $ct^2 + \frac{4}{3}tr \leq 120 - \frac{r^2}{c}$. Этому условию удовлетворяет, например, $0 \leq r \leq 50, t \leq 0,1$.

На рис. 7 приведен профиль U от r на момент времени $t = 0,1$ (через 100 шагов). Параметр $\Lambda = \frac{\partial(r^2 S)}{r^2 \partial r} - \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{2}{3}t$ не зависит от r . Из рис. 7 видно, что численное решение по схеме типа TVD совпадает с аналитическим выражением.

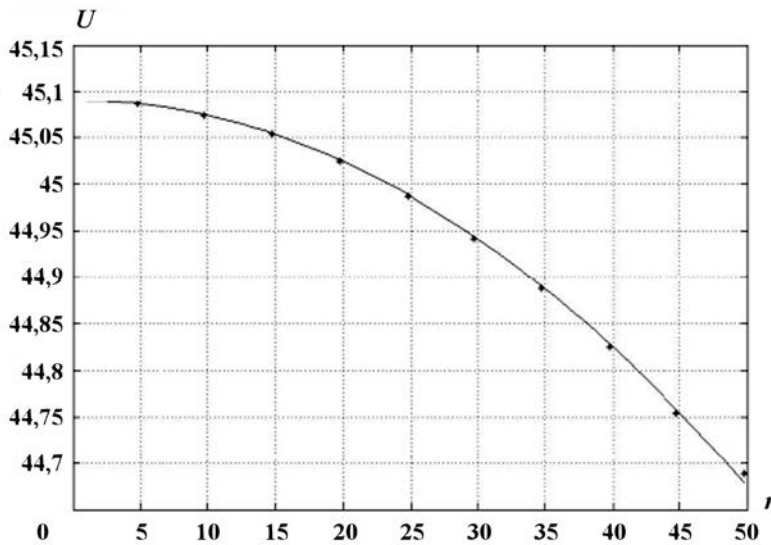


Рис. 7. Профиль U от $r, t = 0,1$: * — численное решение; — — точное решение

Задача 4 (нагревание сферы). Задача построена на точном решении, которое описывает нагревание области, заполненной только фотонами. В сферически-симметричном случае рассматривается сфера радиусом 600 см. Начальное распределение поля излучения задается формулой $U = r^2/2c; S = 0$. Граничные условия на внешней границе ($r = 600$) имеют вид $U = ct^2/2 + 60$ или $S = -200t$, в центре сферы $U = ct^2/2$ или $S = 0$. Коэффициент поглощения и коэффициент рассеяния равны 0. Число групп равно 1. Пространственная сетка равномерная — 600 интервалов. Шаг по времени $\tau = 0,001$. Точное решение имеет вид

$$U = \begin{cases} \frac{(ct)^2 + r^2}{2c}; \\ 0 \text{ при } U \leq 0; \end{cases} \quad S = \begin{cases} -\frac{tr}{3}; \\ 0 \text{ при } U \leq 0. \end{cases}$$

Из положительности входящего одностороннего потока $\frac{1}{4}U - \frac{1}{2}S \geq 0$ следует условие $t \geq 0$, т. е. ограничения на время счета задачи нет.

На рис. 8 приведен профиль U от r на момент времени $t = 0,2$ (через 200 шагов). Аналитическое выражение для параметра $\Lambda = \frac{\partial(r^2 S)}{r^2 \partial r} - \frac{\partial S}{\partial r} = -\frac{2}{3}t \leq 0$ не зависит от радиуса и приводит к нулевым параметрам схемы $\delta = \theta = 0$ на протяжении всего счета. Из рис. 8 видно, что численное решение по схеме типа TVD совпадает с аналитическим выражением.

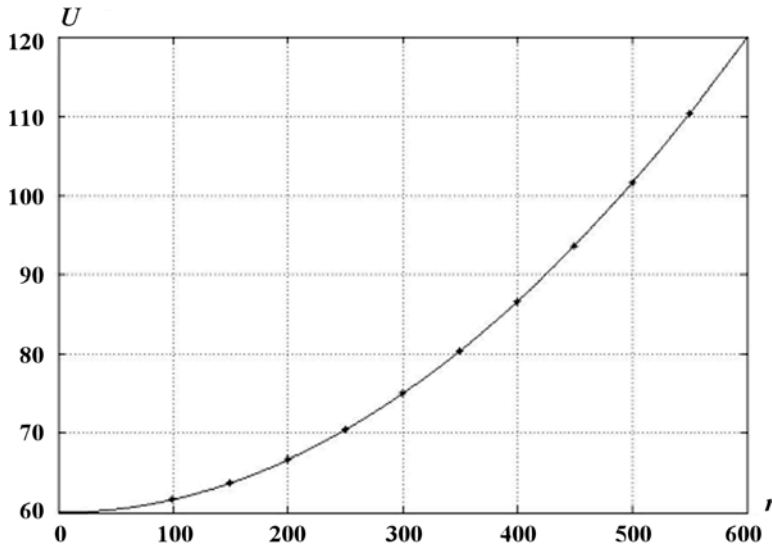


Рис. 8. Профиль U от r , $t = 0,2$: * — численное решение; — — точное решение

Задача 5 (задача Флека). Задача построена по аналогии со второй задачей Флека [9]. Эта задача характеризуется большим числом итераций из-за резких отличий оптических толщин в соседних областях. Так, например, метод простой итерации на первых 20 временных шагах при $\tau = 0,0001$, $\varepsilon_{\text{сх}} = 0,0001$ сходится более чем за 1000 итераций.

На внутреннюю поверхность сферического слоя толщиной 4 см падает планковский поток излучения, соответствующий температуре вещества $T = 1$. Слой состоит из трех физических областей (область 1 — $100 \leq r \leq 102$, область 2 — $102 \leq r \leq 102,4$, область 3 — $102,4 \leq r \leq 104$). Спектральные граничные условия на внешней границе имели вид $\frac{1}{4}U_g - \frac{1}{2}S_g = 0$. На внутренней границе $\frac{1}{4}U_g + \frac{1}{2}S_g = \frac{1}{4}B_g(T = 1)$. Коэффициент поглощения вычислялся по формуле $\alpha_c = \frac{\chi(1 - e^{-\varepsilon/T})}{\varepsilon^3}$; $\chi = 27$ в областях 1, 3, $\chi = 10000$ в области 2. Коэффициент рассеяния $\alpha_s = 0$. Начальная температура в областях $T = 0,00001$; уравнение состояния вещества $E = 0,81T$.

По энергетической переменной расчеты выполнены на сетке с разбиением $\varepsilon_g = 15,0; 12,0; 10,0; 8,0; 7,0; 6,0; 5,5; 5,0; 4,5; 4,0; 3,5; 3,0; 2,6; 2,2; 1,8; 1,4; 1,0; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,15; 0,1; 0,08; 0,06; 0,04; 0,02; 0,0$ (число групп 28). Пространственная сетка равномерная в каждой области: по радиусу — 28, 16, 24 интервала соответственно в областях 1, 2, 3. Шаг по времени $\tau = 0,0002$. Итерационный пересчет решения на каждом временном шаге проводился до вычисления температуры вещества с точностью 0,01% ($\varepsilon_{\text{сх}} = 0,0001$). Расчеты проводились по схемам типа TVD первого и второго порядков аппроксимации, рассмотренным в данной работе.

В таблице приведено суммарное и среднее число внешних итераций за 20 первых временных шагов. Видно, что схема второго порядка сходится даже быстрее схемы первого порядка.

На рис. 9 приведены профили температуры вещества, полученные на 10, 25 и 600 шагах по времени по схемам первого и второго порядков. Видно, что схема первого порядка в отличие от схемы второго порядка сильнее размывает фронт тепловой волны.

Приведенные расчеты показали, что новая схема типа TVD для переноса теплового излучения в P_1 -приближении является монотонной и обладает вторым порядком аппроксимации.

Суммарное и среднее число итераций за 20 временных шагов

Шаг по времени τ ($\varepsilon_{\text{сх}} = 0,0001$)	0,0001		0,001	
	1-й	2-й	1-й	2-й
Порядок разностной схемы				
Суммарное число итераций	174	160	1244	766
Среднее число итераций	8,7	8	62,2	38,3

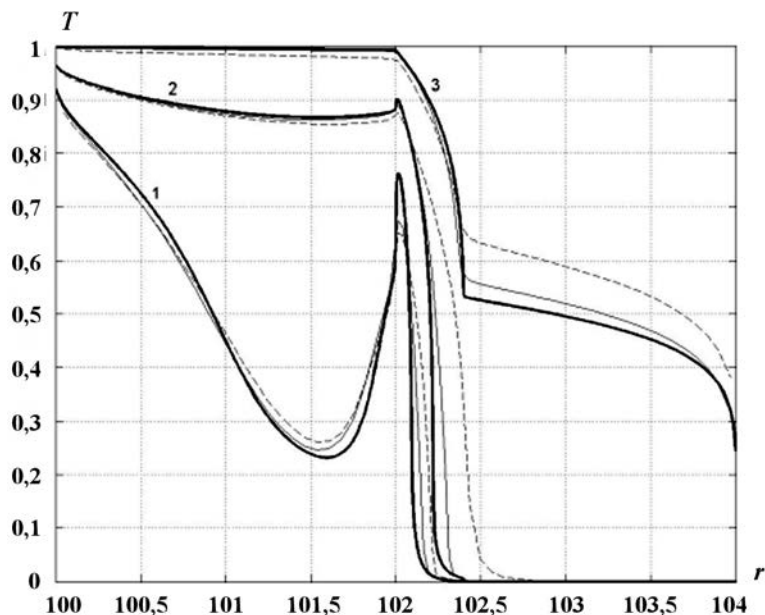


Рис. 9. Профили температуры вещества на 10-м (1), 25-м (2) и 600-м (3) шагах по времени: --- — TVD-схема первого порядка; — — TVD-схема второго порядка; — — точное решение, полученное в расчетах на сходимость

Список литературы

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
2. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. № 47. Вып. 3. С. 271—306.
3. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод «Ромб» для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1 -приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 66—70.
4. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. Vol. 49. P. 357—393.
5. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
6. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н. Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1979. Т. 19, № 5. С. 1288—1303.
7. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957.
8. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод выделения диагональной матрицы для численного решения уравнения переноса излучения в P_1 -приближении по схеме РОМБ // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 1. С. 3—13.
9. Fleck J. A. Jr., Cummings J. D. An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313—342.

Статья поступила в редакцию 15.10.08.