

УДК 519.6

## ПРИМЕНЕНИЕ TVD-ПОДХОДА К $DS_n$ -МЕТОДУ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Д. Гаджиев, В. В. Завьялов, А. А. Шестаков  
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Для решения неявных конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих нелинейную систему нестационарных дифференциальных уравнений, состоящую из спектрального интегродифференциального кинетического уравнения переноса фотонов и уравнения энергии, предложены две схемы, основанные на TVD-методологии. Предлагаемые схемы позволяют использовать алгоритм бегущего счета. Приводятся расчеты тестовых задач для одномерных геометрий.

*Ключевые слова:* перенос теплового излучения, TVD-подход.

### Введение

При решении задач переноса теплового излучения разработка монотонных схем второго порядка аппроксимации до сих пор является актуальной проблемой. Широко используемый для решения уравнения переноса метод дискретных ординат ( $DS_n$ -метод) [1] не позволяет одновременно обеспечивать монотонность и второй порядок аппроксимации. В работе С. К. Годунова [2] показано, что для гиперболических уравнений в классе линейных схем нет монотонной схемы со вторым порядком аппроксимации. На практике, чтобы совместить в определенной степени монотонность и второй порядок, используются различные монотонизаторы [3–5].

Одним из путей решения рассматриваемой проблемы является переход к нелинейным схемам. Начиная с 80-х годов 20-го столетия опубликовано большое количество работ по нелинейным TVD-схемам (Total Variation Diminishing), например [6–10]. Достаточно подробно этот вопрос рассматривается в монографии [11]. В этих работах рассмотрены как явные, так и неявные схемы типа TVD для решения гиперболических систем уравнений.

Первые публикации по применению TVD-методов к решению уравнения переноса теплового излучения появились сравнительно недавно. Так, в [12] предложена схема в стационарном случае. Если говорить о неявных TVD-схемах для уравнения переноса, то это будут трехточечные (или более) схемы в каждом направлении пространственной переменной. Это значит, что теряется важное достоинство  $DS_n$ -метода, где аппроксимация строится в рамках счетной ячейки, а для решения разностных уравнений используется экономичный метод бегущего счета.

В данной работе построены две неявные схемы типа TVD, которые обеспечивают монотонность и второй порядок аппроксимации, а также сохраняют основные достоинства  $DS_n$ -метода. Построенные указанным способом схемы типа TVD обладают следующими свойствами:

1. Неявность, безусловная устойчивость.
2. Монотонность в смысле принадлежности к классу TVD-схем.
3. Первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок аппроксимации по пространству, кроме отдельных точек с экстремумами.
4. Консервативность в смысле выполнения разностного аналога интегрального закона сохранения в каждой ячейке.

5. Построение аппроксимации во второй схеме, как и в  $DS_n$ -методе, в рамках одной ячейки, если говорить о величинах с верхнего временного слоя. Данное свойство позволяет применять экономичный метод бегущего счета для решения системы разностных уравнений.
6. Обобщаемость на многомерные геометрии.

Относительно п. 5 надо сделать следующее замечание. Используемая в новой схеме TVD-методология вносит в схему ограничитель, который вычисляется явно по известным величинам с предыдущего временного шага на трехточечном шаблоне в каждом направлении. При этом величины с верхнего временного слоя берутся в рамках данной ячейки. Что же касается монотонности в смысле принадлежности к классу схем с невозрастанием полной вариации, то этот класс шире, чем класс монотонности из [2], и еще шире, чем класс схем, удовлетворяющих принципу максимума. TVD-схемы обеспечивают монотонность лишь в указанном выше смысле. Реальный же уровень монотонности надо оценивать по результатам численных расчетов. При этом предлагается анализировать монотонность не только самого решения, но и его производных. Если это есть, то говорят о сильной монотонности [13].

### Постановка задачи

Система уравнений, описывающая распространение излучения в неподвижной среде, состоит из спектрального уравнения переноса в кинетической постановке, описывающего перенос, поглощение и рассеяние теплового излучения, и уравнения энергии, характеризующего изменение температуры вещества за счет поглощения и испускания фотонов:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\mu}{r^\eta} \frac{\partial}{\partial r} (r^\eta I_\nu) + \frac{\eta}{2r} \frac{\partial}{\partial \mu} ((1 - \mu^2) I_\nu) + \alpha_\nu I_\nu = \kappa_\nu B_\nu + \frac{k}{2} U_\nu;$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^\infty \kappa_\nu (U_\nu - 2B_\nu).$$

Здесь  $c$  — скорость света;  $r$  — пространственная координата;  $t$  — время;  $\nu$  — энергия фотонов;  $\mu$  — косинус угла между направлением полета фотона  $\vec{\Omega}$  и осью  $r$ ;  $I_\nu(r, \mu, \nu, t)$  — спектральная интенсивность излучения;  $T(r, t)$  — температура среды;  $\alpha_\nu = \kappa_\nu + k$  — коэффициент ослабления;  $\kappa_\nu(\nu, T)$  — коэффициент поглощения;  $k(r)$  — коэффициент рассеяния;  $E(T)$  — удельная внутренняя энергия вещества;  $B_\nu(\nu, T)$  — интенсивность равновесного излучения (функция Планка);  $U_\nu = \int_{-1}^1 I_\nu d\mu$  — спектральная плотность энергии излучения;  $\eta$  — параметр геометрии (0 — плоская, 2 — сферически-симметричная).

Данная система решается в области  $\{r_0 < r < R, -1 \leq \mu \leq 1\}$  с начальными и граничными условиями

$$I_\nu(r, \mu, \nu, t^0) = I_\nu^0(r, \mu, \nu); \quad T(r, t^0) = T^0(r);$$

$$I_\nu(r_0, \mu > 0, \nu, t) = \varphi_L(\mu, \nu, t); \quad I_\nu(R, \mu < 0, \nu, t) = \varphi_R(\mu, \nu, t).$$

В качестве граничного условия при  $r_0 = 0, \mu > 0$  в сферически-симметричной геометрии берется условие  $I_\nu(0, \mu, \nu, t) = I_\nu(0, -\mu, \nu, t)$ .

### Линейное уравнение переноса

В одnogрупповом случае для плоской геометрии в вакууме исходная система превращается в широко известное линейное уравнение переноса

$$\frac{\partial I}{c \partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial r} = 0.$$

Введем равномерную разностную сетку по времени и пространству  $\tau = t^{n+1} - t^n$ ,  $h = r_{i+1} - r_i$ ,  $n = 0, \dots$ ,  $i = 0, \dots$ . Монотонная схема первого порядка аппроксимации имеет вид

$$\frac{I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i+1/2}^n}{c\tau} + \mu \frac{I_{i+1}^{n+1} - I_i^{n+1}}{h} = 0 \quad (1)$$

с дополнительными соотношениями связи

$$I_{i+1/2} = I_{i+(1+\text{sign}(\mu))/2}. \quad (2)$$

Если схему (1), (2) при  $\mu > 0$  записать в виде

$$I_{i+1/2}^{n+1} = \frac{C}{1+C} I_i^{n+1} + \frac{1}{1+C} I_{i+1/2}^n, \quad I_{i+1}^{n+1} = \frac{C}{1+C} I_i^{n+1} + \frac{1}{1+C} I_{i+1}^n, \quad C = \frac{c\mu\tau}{h}, \quad (3)$$

то видно, что выполняется принцип максимума, схема является монотонной и безусловно устойчивой:

$$0 \leq I_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(I_{i-1/2}^{n+1}, I_{i+1/2}^n); \quad 0 \leq I_{i+1}^{n+1} \leq \max(I_i^{n+1}, I_{i+1}^n).$$

В теории переноса эта схема называется *St*-схемой. При  $\mu < 0$  принцип максимума доказывается аналогично.

Для дальнейшего рассмотрения фиксируем  $\mu > 0$  и там, где это не вызывает недоразумения, опускаем соответствующие разностные индексы.

### Первая TVD-схема

Для повышения порядка аппроксимации проведем реконструкцию решения на сеточных интервалах. Представим  $I(r, t)$  на интервале  $r_i \leq r \leq r_{i+1}$  в кусочно-линейной форме:

$$I(r, t) = I_{i+1/2} + \frac{\partial I_{i+1/2}}{\partial r} (r - r_{i+1/2}), \quad r_{i+1/2} = 0,5(r_i + r_{i+1}).$$

Отсюда следует реконструированное соотношение связи

$$I_{i+1}^{n+1} = I_{i+1/2}^{n+1} + \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial r} \frac{h}{2}.$$

В соответствии с TVD-методологией в качестве  $\frac{\partial I_{i+1/2}}{\partial r}$  берутся некоторые ограничители  $L$ , которые обычно используют односторонние производные. Добавление производных в формулах эквивалентно введению антидиффузии в монотонную схему (1), (2). Но антидиффузию надо ограничить таким образом, чтобы новая схема имела второй порядок аппроксимации и сохраняла при этом монотонность. В этом заключается главное назначение ограничителей.

Вводя функцию-ограничитель, можно записать

$$I_{i+1}^{n+1} = I_{i+1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1} \Delta I_{i-1/2}^{n+1}, \quad (4)$$

$$\phi_{i+1/2} = \frac{L(\Delta I_{i-1/2}, \Delta I_{i+1/2})}{\Delta I_{i-1/2}} = L\left(1, \hat{\theta}_{i+1/2}\right), \quad \hat{\theta}_{i+1/2} = \frac{\Delta I_{i+1/2}}{\Delta I_{i-1/2}}, \quad \Delta I_{i-1/2} = I_{i+1/2} - I_{i-1/2}.$$

Система уравнений (2), (4) представляет собой систему с четырехточечным шаблоном на  $(n+1)$ -м слое. Так как функция-ограничитель  $\phi$  имеет дробно-линейный характер, то можно ожидать, что она слабо меняется за один шаг  $\tau$ . Таким образом, можно взять  $\phi$  с  $n$ -го шага, внося при этом погрешность  $O(\tau)$ . Это дает возможность применить алгоритм бегущего счета. Тогда подстановка в (3) с учетом  $\phi^n$  приводит к уравнениям

$$I_{i+1/2}^{n+1} = \frac{I_{i+1/2}^n + CI_i^{n+1} + 0,5C\phi_{i+1/2}^n I_{i-1/2}^{n+1}}{1+C+0,5C\phi_{i+1/2}^n}; \quad I_{i+1}^{n+1} = \left(1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n\right) I_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+1/2}^n I_{i-1/2}^{n+1}, \quad (5)$$

которые имеют относительно  $I_{i+1/2}^{n+1}$ ,  $I_{i+1}^{n+1}$  разрешенный вид. По этим формулам можно вести рекуррентный бегущий счет в сторону роста индекса  $i$ .

Заметим, что при вычислении  $I_{i+1/2}^{n+1}$  сумма коэффициентов при  $I_{i+1/2}^n$ ,  $I_i^{n+1}$ ,  $I_{i-1/2}^{n+1}$  равна единице, как и для  $St$ -схемы. Равенство суммы коэффициентов единице означает, что  $I_{i+1/2}^{n+1}$  есть линейная интерполяция величин  $I_{i+1/2}^n$ ,  $I_i^{n+1}$ ,  $I_{i-1/2}^{n+1}$  и она положительна при положительности этих величин.

Из формул (5) при  $\phi_{i+1/2}^n \geq 0$  следует условие положительности  $I_{i+1/2}^{n+1}$  при положительности  $I_{i+1/2}^n$ ,  $I_i^{n+1}$ ,  $I_{i-1/2}^{n+1}$  для центральной точки:  $0 \leq I_{i+1/2}^{n+1} \leq \max(I_{i+1/2}^n, I_i^{n+1}, I_{i-1/2}^{n+1})$ , однако не гарантируется положительность в узле  $I_{i+1}^{n+1}$ . Для рассматриваемых в работе ограничителей условие  $\phi_{i+1/2}^n \geq 0$  выполняется всегда. При  $I_{i+1}^{n+1} < 0$  можно полагать  $\phi_{i+1/2}^n = 0$  и счет вести по схеме первого порядка.

В качестве ограничителей будем брать ограничитель Чакравати—Ошера и  $\min \text{mod}$ , который является его частным случаем [8].

Для ограничителя Чакравати—Ошера имеем

$$L(a, b) = 0,5(1 - \delta) \min \text{mod}(a, \beta b) + 0,5(1 + \delta) \min \text{mod}(\beta a, b);$$

$$\phi_{i+1/2}^n = 0,5(1 - \delta) \min \text{mod}\left(1, \beta \hat{\theta}_{i+1/2}^n\right) + 0,5(1 + \delta) \min \text{mod}\left(\beta, \hat{\theta}_{i+1/2}^n\right);$$

для  $\min \text{mod}(\delta = 0, \beta = 1)$

$$L(a, b) = \min \text{mod}(a, b) = 0,5(\text{sign}(a) + \text{sign}(b)) \min(|a|, |b|);$$

$$\phi_{i+1/2}^n = \frac{L(\Delta I_{i-1/2}^n, \Delta I_{i+1/2}^n)}{\Delta I_{i-1/2}^n} = L\left(1, \hat{\theta}_{i+1/2}^n\right) = \frac{1 + \text{sign}(\hat{\theta}_{i+1/2}^n)}{2} \min\left(1, \left|\hat{\theta}_{i+1/2}^n\right|\right),$$

где  $\beta$  — параметр сжатия, а параметр  $\delta$  определяет тип схемы и порядок аппроксимации. При  $\delta = 1$  получаем схему второго порядка аппроксимации. При  $\delta = 1/3$ ,  $\beta = 3$  для явной схемы можно получить третий порядок аппроксимации. Для неявной схемы точность также повышается, поэтому в дальнейшем будем всегда использовать эти значения. Графики функций  $\phi(\hat{\theta} = \theta^{-1})$  приведены на рис. 1.

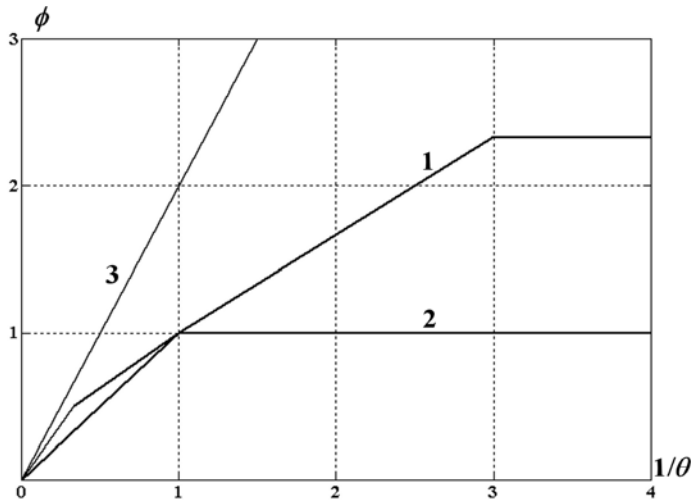


Рис. 1. Функция  $\phi(\hat{\theta})$ : 1 — ограничитель Чакравати—Ошера ( $\delta = 1/3$ ;  $\beta = 3$ ); 2 — ограничитель  $\min \text{mod}$ ; 3 — функция  $\phi = 2/\theta$

Несмотря на то, что схема (5) построена по классической TVD-методологии, доказать ее принадлежность классу TVD не удастся. Причина состоит в линеаризации  $\phi(\hat{\theta})$  со взятием функции-ограничителя с предыдущего временного слоя. Но схему (5) можно модифицировать, чтобы она стала неявной TVD-схемой. Для этого приведем ее к виду

$$I_{i+1/2}^{n+1} + C \left( 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^{n+1} \right) \Delta I_{i-1/2}^{n+1} = I_{i+1/2}^n, \quad \theta_{i+1/2} = \frac{\Delta I_{i-1/2}}{\Delta I_{i+1/2}}. \quad (6)$$

Заменяя в уравнении (6)  $\theta_{i-1/2}^{n+1}$  на  $\theta_{i-1/2}^n$ , получаем модифицированную схему

$$I_{i+1/2}^{n+1} + C \left( 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^n \right) \Delta I_{i-1/2}^{n+1} = I_{i+1/2}^n, \quad (7)$$

которая уже принадлежит классу TVD. Это следует из достаточного условия [9] для неявных схем

$$1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^n \geq 0, \quad (8)$$

которое удовлетворяется, в частности, если  $0 \leq \phi_{i+1/2} \leq 2\hat{\theta}_{i+1/2}$ .

Условие (8) выполняется для рассмотренных в данной работе ограничителей (см. рис. 1). Но вновь построенная схема (7) стала неконсервативной. Терять консервативность нежелательно, поэтому для численных расчетов использовалась консервативная схема (5), которая также подтвердила второй порядок аппроксимации и монотонность.

Как оказывается, такая ситуация, когда для построенной консервативной схемы не удастся доказать принадлежность к классу TVD, а удастся это сделать только для неконсервативной модифицированной схемы, характерна для многих неявных TVD-схем [9]. Пользоваться следует все же исходной консервативной схемой.

### Вторая TVD-схема

Если в соотношении связи из (4) вынести за скобку  $I_{i+1/2}^{n+1}$ , тогда при  $\mu > 0$

$$I_{i+1}^{n+1} = \left( 1 + \frac{L \left( \Delta I_{i-1/2}^{n+1}, \Delta I_{i+1/2}^{n+1} \right)}{2I_{i+1/2}^{n+1}} \right) I_{i+1/2}^{n+1} = D_{i+1/2}^{n+1} I_{i+1/2}^{n+1}, \quad D_{i+1/2}^{n+1} = 1 + \frac{L \left( \Delta I_{i-1/2}^{n+1}, \Delta I_{i+1/2}^{n+1} \right)}{2I_{i+1/2}^{n+1}}.$$

При  $\mu < 0$  получаем  $I_i^{n+1} = D_{i+1/2}^{n+1} I_{i+1/2}^{n+1}$ ,  $D_{i+1/2}^{n+1} = 1 - \frac{L \left( \Delta I_{i-1/2}^{n+1}, \Delta I_{i+1/2}^{n+1} \right)}{2I_{i+1/2}^{n+1}}$ .

Аналогично рассмотрению в предыдущем разделе возьмем коэффициент  $D_{i+1/2}^{n+1}$  с предыдущего шага:

$$I_{i+1}^{n+1} = D_{i+1/2}^n I_{i+1/2}^{n+1}. \quad (9)$$

В отличие от первой схемы здесь этот способ не приводит к расширению шаблона и позволяет оставаться в рамках одной ячейки при бегущем счете. Внесенная ошибка имеет порядок  $O(\tau h)$ :

$$D_{i+1/2}^{n+1} - D_{i+1/2}^n \approx \pm \frac{h}{2} \left( \frac{1}{I_{i+1/2}^{n+1}} \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial r} - \frac{1}{I_{i+1/2}^n} \frac{\partial I_{i+1/2}^n}{\partial r} \right) \approx \pm \frac{\tau h}{2} \frac{\partial^2 (\ln I_{i+1/2})}{\partial r \partial t}.$$

При анализе поведения решения на интервале  $r_{i-1/2} \leq r \leq r_{i+3/2}$  возможны 3 случая, приведенные в таблице. Согласно таблице введенный коэффициент  $D$  положителен и ограничен. Заметим, что при условии  $\text{sign}(\Delta I_{i-1/2}^n) \neq \text{sign}(\Delta I_{i+1/2}^n)$  в данных ограничителях всегда получаем  $L = 0$ ,  $D_{i+1/2}^n = 1$  и счет ведется по  $St$ -схеме первого порядка.

### Ограничения на коэффициент $D$

Ограничитель	$\text{sign}(\Delta I_{i-1/2}^n) \neq \text{sign}(\Delta I_{i+1/2}^n)$	$I_{i-1/2}^n \leq I_{i+1/2}^n \leq I_{i+3/2}^n$	$I_{i-1/2}^n \geq I_{i+1/2}^n \geq I_{i+3/2}^n$
min mod	$D_{i+1/2}^n = 1$	$1 \leq D_{i+1/2}^n \leq \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} \leq D_{i+1/2}^n \leq \frac{3}{2}$
Чакравати—Ошера	$D_{i+1/2}^n = 1$	$1 \leq D_{i+1/2}^n \leq \frac{13}{6}$	$\frac{1}{6} \leq D_{i+1/2}^n \leq \frac{13}{6}$

Подставляя полученные соотношения связи (9) в основное уравнение (1), получаем

$$I_{i+1/2}^{n+1} = \frac{I_{i+1/2}^n + CD_{i+1/2}^n I_{i-1/2}^{n+1}}{1 + CD_{i+1/2}^n} = \frac{1}{1 + CD_{i+1/2}^n} I_{i+1/2}^n + \frac{CD_{i+1/2}^n}{1 + CD_{i+1/2}^n} \frac{D_{i-1/2}^n}{D_{i+1/2}^n} I_{i-1/2}^{n+1}, \quad I_{i+1}^{n+1} = D_{i+1/2}^n I_{i+1/2}^{n+1}. \quad (10)$$

В силу положительности  $D_{i+1/2}^n$  из уравнения (10) видно, что  $I_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$  при  $I_{i+1/2}^n \geq 0$ ,  $I_{i-1/2}^{n+1} \geq 0$ . Кроме того, положительно и значение в узле  $I_{i+1}^{n+1}$ , чего не было в первой схеме. Из (10) вытекает

$$0 \leq I_{i+1/2}^{n+1} \leq \max \left( I_{i+1/2}^n, \frac{D_{i-1/2}^n}{D_{i+1/2}^n} I_{i-1/2}^{n+1} \right). \quad (11)$$

Порядок малости множителя  $D_{i-1/2}^n/D_{i+1/2}^n$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{D_{i-1/2}^n}{D_{i+1/2}^n} &= 1 + \frac{h}{D_{i+1/2}^n} \frac{D_{i-1/2}^n - D_{i+1/2}^n}{h} = 1 - \frac{h^2}{2D_{i+1/2}^n} \left( \frac{1}{hI_{i+1/2}^n} \frac{\partial I_{i+1/2}^n}{\partial r} - \frac{1}{hI_{i-1/2}^n} \frac{\partial I_{i-1/2}^n}{\partial r} \right) \approx \\ &\approx 1 - \frac{h^2}{2D_{i+1/2}^n} \frac{\partial^2 (\ln I_{i+1/2}^n)}{\partial r^2} = 1 + O(h^2). \end{aligned}$$

Неравенство (11) не обеспечивает принципа максимума. С другой стороны, доказательство принадлежности этой схемы к TVD-схемам затруднено из-за того, что коэффициент  $D$  берется с предыдущего шага.

Вычитая уравнение (10) в соседних точках, данную схему можно представить в форме относительно приращений:

$$\Delta I_{i-1/2}^{n+1} + C \left( D_{i+1/2}^n I_{i+1/2}^{n+1} - D_{i-1/2}^n I_{i-1/2}^{n+1} \right) = \Delta I_{i-1/2}^n + C \left( D_{i-1/2}^n I_{i-1/2}^{n+1} - D_{i-3/2}^n I_{i-3/2}^{n+1} \right).$$

Используя соотношение  $D_{i+1/2}^n = 1 + \phi_{i+1/2}^n \frac{\Delta I_{i-1/2}^n}{2I_{i+1/2}^n}$ , получаем

$$\begin{aligned} \Delta I_{i-1/2}^{n+1} + C \left( \Delta I_{i-1/2}^{n+1} + \phi_{i+1/2}^n \frac{\Delta I_{i-1/2}^n}{2I_{i+1/2}^n} I_{i+1/2}^{n+1} - \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{2I_{i-1/2}^n} I_{i-1/2}^{n+1} \right) = \\ = \Delta I_{i-1/2}^n + C \left( \Delta I_{i-3/2}^{n+1} + \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{2I_{i-1/2}^n} I_{i-1/2}^{n+1} - \phi_{i-3/2}^n \frac{\Delta I_{i-5/2}^n}{2I_{i-3/2}^n} I_{i-3/2}^{n+1} \right). \end{aligned}$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} I_{i+1/2}^{n+1} &= 0,5 \left( I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i-1/2}^{n+1} \right) + 0,5 \left( I_{i+1/2}^{n+1} + I_{i-1/2}^{n+1} \right); \\ I_{i-1/2}^{n+1} &= -0,5 \left( I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i-1/2}^{n+1} \right) + 0,5 \left( I_{i+1/2}^{n+1} + I_{i-1/2}^{n+1} \right) \end{aligned}$$

и вынося за скобки разности  $\Delta I^{n+1}$ , получаем

$$\begin{aligned} \Delta I_{i-1/2}^{n+1} + C \left( 1 + \phi_{i+1/2}^n \frac{\Delta I_{i-1/2}^n}{4I_{i+1/2}^n} + \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{4I_{i-1/2}^n} \right) \Delta I_{i-1/2}^{n+1} = \\ = \Delta I_{i-1/2}^n + C \left( 1 + \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{4I_{i-1/2}^n} + \phi_{i-3/2}^n \frac{\Delta I_{i-5/2}^n}{4I_{i-3/2}^n} \right) \Delta I_{i-3/2}^{n+1} - \Delta^3 I_{i-3/2}^{n+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta^3 I_{i-3/2}^{n+1} = \frac{C}{2} \left( \phi_{i+1/2}^n \frac{\Delta I_{i-1/2}^n}{I_{i+1/2}^n} - \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{I_{i-1/2}^n} \right) (I_{i+1/2}^{n+1} + I_{i-1/2}^{n+1}) - \\ - \frac{C}{2} \left( \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{I_{i-1/2}^n} - \phi_{i-3/2}^n \frac{\Delta I_{i-5/2}^n}{I_{i-3/2}^n} \right) (I_{i-1/2}^{n+1} + I_{i-3/2}^{n+1}) \end{aligned}$$

— величина третьего порядка малости.

Для рассмотренных в данной работе ограничителей можно показать во всех точках разностной сетки, что

$$1 + \phi_{i+1/2}^n \frac{\Delta I_{i-1/2}^n}{4I_{i+1/2}^n} + \phi_{i-1/2}^n \frac{\Delta I_{i-3/2}^n}{4I_{i-1/2}^n} \geq 0.$$

Это условие есть не что иное, как достаточный критерий Хартена [10] для неявных схем. То есть при занулении величины третьего порядка малости  $\Delta^3 I_{i-3/2}^{n+1}$  получаем модифицированную неявную схему из класса TVD-схем. Она монотонна и имеет второй порядок аппроксимации, но не удовлетворяет требованию консервативности. Поэтому в расчетах применяется консервативная схема (10).

Заметим, что в отличие от первой схемы при вычислении  $I_{i+1/2}^{n+1}$  сумма коэффициентов при  $I_{i+1/2}^n$ ,  $I_i^{n+1}$ ,  $I_{i-1/2}^{n+1}$  может быть не равна единице. Следует также отметить, что данная схема имеет сходные свойства с нелинейной схемой из [14], где антидиффузионная добавка ограничивается исходя из принципа максимума.

### Численные расчеты

Рассматривались 3 задачи: перенос произвольного профиля в вакууме для плоской геометрии, задача об остывании сферы и задача Флека [15] в сферически-симметричной постановке. Сравнивались результаты, полученные по St-, DD-, DDAD-схемам [5] и второй схеме типа TVD с ограничением Чакравати—Ошера. Первая TVD-схема показывает результаты, близкие со второй, и поэтому не приводится. Сходимость итерационного процесса — с точностью  $\varepsilon = 0,00001$ . Величина временного шага выбиралась постоянной. Для интегрирования по  $\mu$  использовалась гауссова квадратура (12 точек).

**Задача 1.** Для численного исследования рассмотрен перенос пакета из трех профилей (прямоугольника, треугольника и параболы) с амплитудой интенсивности, равной 0,9, и шириной в основании  $L = 20$ . Использовалась равномерная сетка по пространству:  $h = 0,5$ ,  $C = 0,05$ . В работе [13] указывается на важность требований сильной монотонности для разностных схем, аппроксимирующих гиперболические системы законов сохранения. На рис. 2—4 приведены профили интенсивности, а также ее первой и второй производной по пространству на момент времени  $ct = 10L$  (пакет переместился на 10 первоначальных профилей).

Из рис. 2 видно, что St-схема сильно размывает профиль, DD- и DDAD-схемы дают осцилляции, TVD-схема ведет себя как монотонная схема второго порядка. Из рис. 3, 4 видно, что TVD-схема дает более монотонное поведение производных и, по всей видимости, удовлетворяет требованию сильной монотонности.

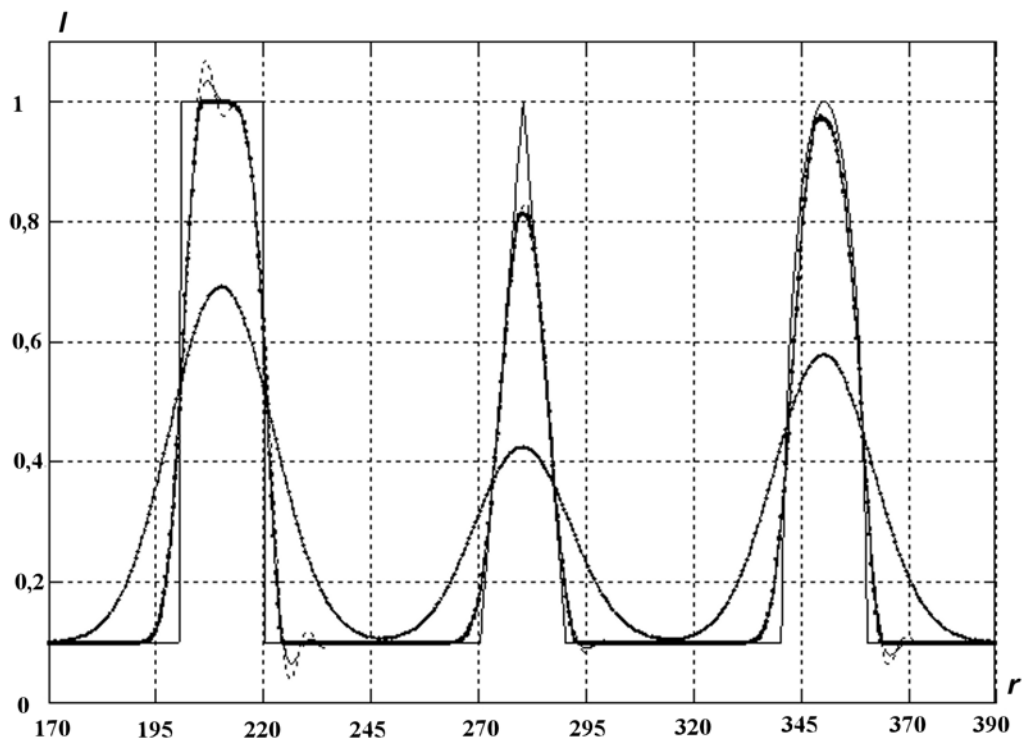


Рис. 2. Задача 1. Профили интенсивности  $I(r)$ : — — точное решение;  $\circ$ — — St-схема;  $\dots$  — DD-схема;  $\square$ — — TVD-схема;  $---$  — DDAD-схема

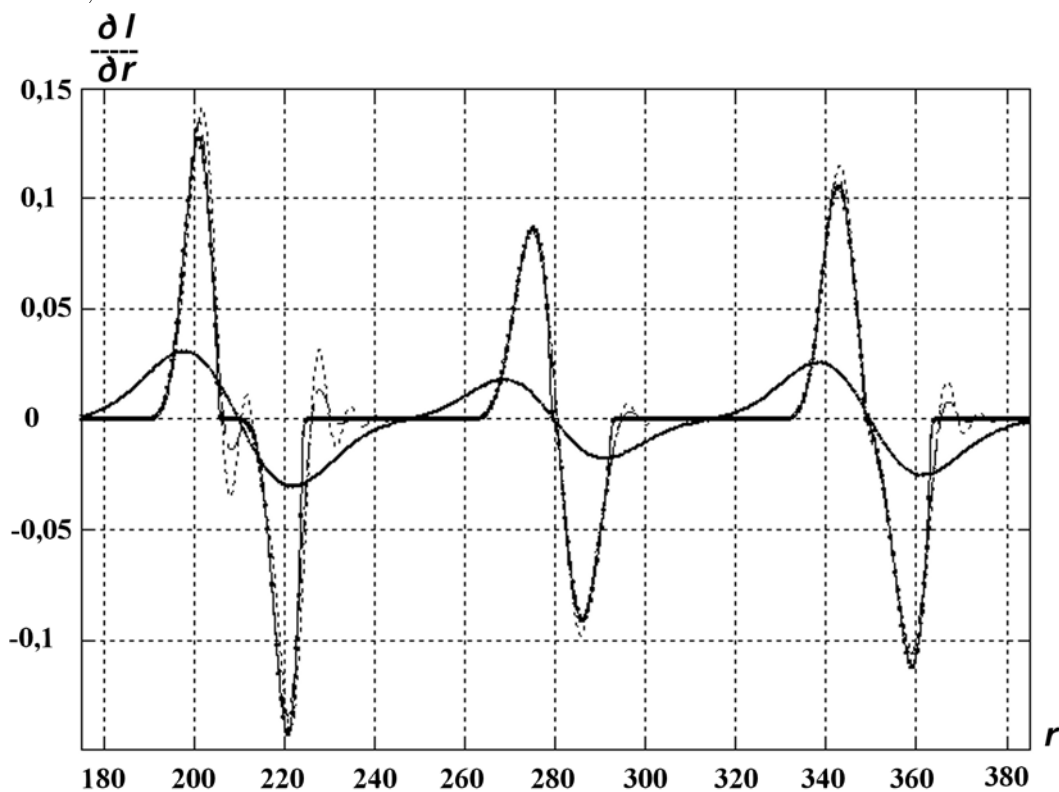


Рис. 3. Задача 1. Профили  $\frac{\partial I(r)}{\partial r}$ : — — точное решение;  $\circ$ — — St-схема;  $\dots$  — DD-схема;  $\square$ — — TVD-схема;  $---$  — DDAD-схема



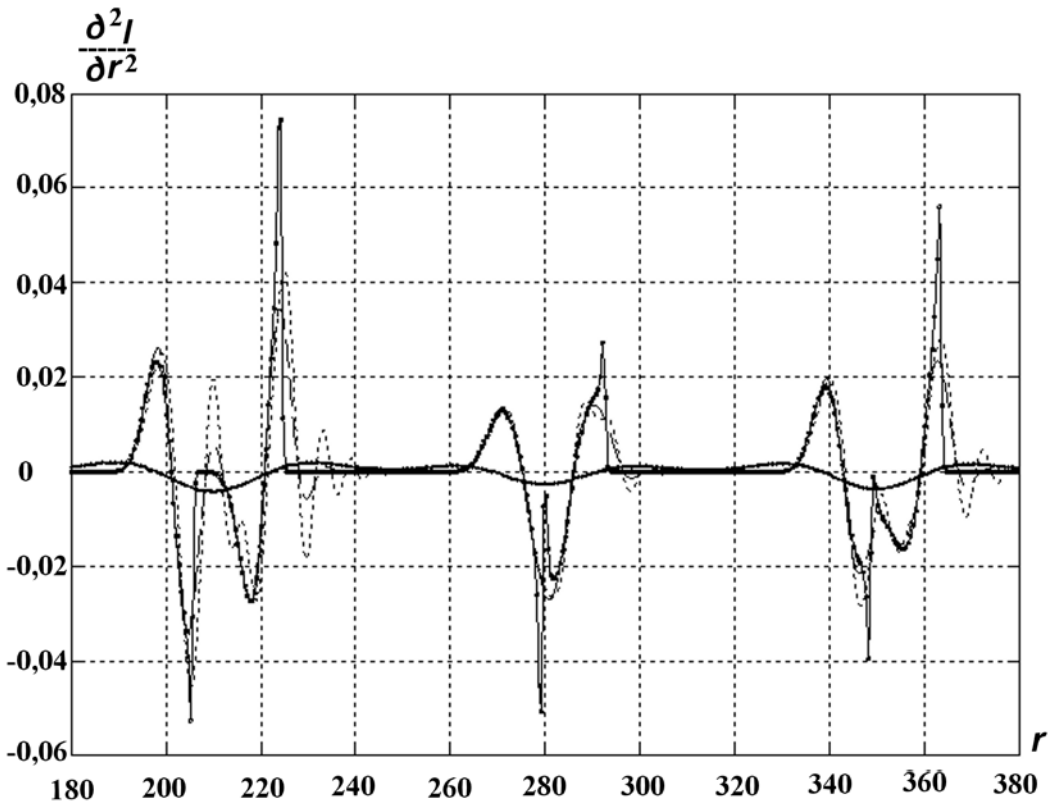


Рис. 4. Задача 1. Профили  $\frac{\partial^2 I(r)}{\partial r^2}$ : — — точное решение; -o-- St-схема; ... — DD-схема; -□- TVD-схема; - - - - DDAD-схема

**Задача 2.** Задача построена на остывании сферической области радиусом  $R$  с вакуумом, заполненной только фотонами (решение получено А. В. Вронским). Начальное распределение поля излучения задается в виде  $I^0(r) = 0,5u_0 \exp\left(-\frac{i_0 r^2}{R^2}\right)$ , где  $u_0, i_0$  — положительные константы. Условие на внешней границе:  $\varphi_R = I^0\left(\sqrt{R^2 - 2\mu ct R + c^2 t^2}\right)$ . Точное решение:

$$U(r, t) = \frac{u_0 R^2}{4i_0 r c t} \left( \exp\left(-\frac{i_0}{R^2} (r - ct)^2\right) - \exp\left(-\frac{i_0}{R^2} (r + ct)^2\right) \right).$$

Расчеты проводились в приближении *серой материи* при следующих параметрах:  $ct = 0,03$ ;  $h = 0,1$ ;  $u_0 = i_0 = 1$ ;  $R = 3$ . На рис. 5 приведены профили  $U(r)$  на моменты времени  $ct = 2,7$ ;  $3,6$ ;  $6$ .

Из расчетов видно, что результаты, полученные по St-схеме, сильно отличаются от точного решения; полученные по DD- и TVD-схемам практически совпадают с ним. Промежуточное положение занимает DDAD-схема.

**Задача 3.** Рассматривалась вторая задача Флека в сферически-симметричной постановке [15]. На левой границе задано излучение планковского источника температуры  $\varphi_L = B_\nu(T = 1)$ , на правой — условие свободной поверхности  $\varphi_R = 0$ . В областях 1 и 3 ( $1 \leq r \leq 3$  и  $3,4 \leq r \leq 5$  соответственно) коэффициент поглощения равен  $\kappa_\nu = 27(1 - e^{-\nu/T})/\nu^3$ , в области 2 ( $3 \leq r \leq 3,4$ ) —  $\kappa_\nu = 10000(1 - e^{-\nu/T})/\nu^3$ . Везде  $E = 0,81T$ ,  $k = 0$  и  $T^0 = 0,001$ . Использовались следующие сетки:

- 1)  $h = 0,2$  в областях 1 и 3;  $h = 0,01$  в области 2 (58 ячеек);
- 2)  $ct = 0,03$ ;  $\nu_{0,15} = 0; 0,3; 0,6; 0,8; 1,2; 1,5; 1,8; 2,4; 2,7; 3; 4; 5; 7; 9; 11; 15$ .

На рис. 6 приведены профили температуры вещества на моменты времени  $ct = 18; 30; 150; 450$ .

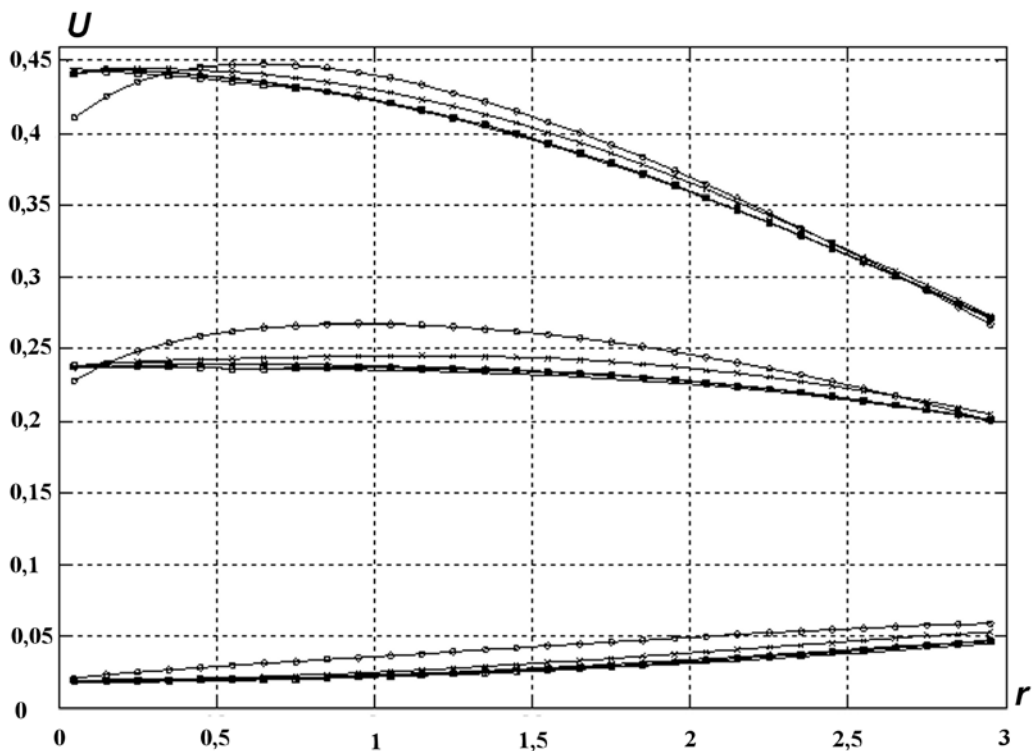


Рис. 5. Задача 2. Плотность излучения  $U(r)$ ,  $ct = 2,7; 3,6; 6$  (сверху вниз): — — точное решение; -o- — St-схема; -•- — DD-схема; -□- — TVD-схема; -x- — DDAD-схема

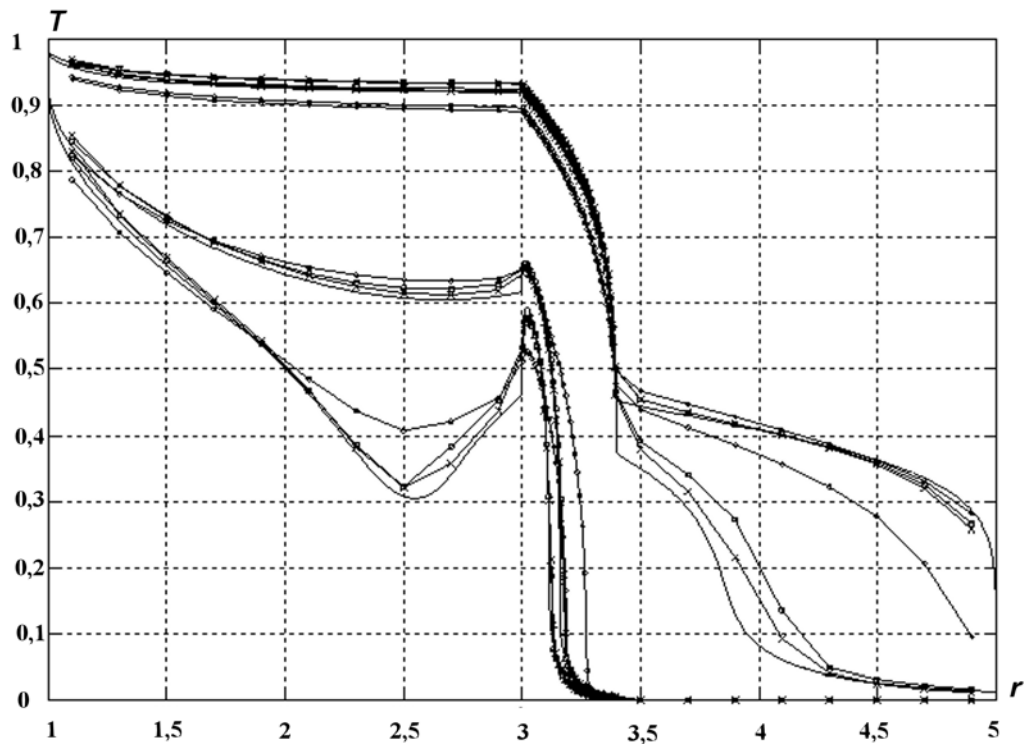


Рис. 6. Задача 3. Температура вещества  $T(r)$ ,  $ct = 18; 30; 150; 450$  (снизу вверх): — — точное решение; -x- — DDAD-схема; -o- — St-схема; -□- — TVD-схема

Эту задачу не удалось сосчитать по DD/St-схеме. В качестве *точного решения* брались результаты на сильно измельченной сетке. Из расчетов видно, что результаты по St-схеме сильно отличаются от точного решения, DDAD- и TVD-схемы показывают сопоставимые результаты, хотя DDAD-схема несколько точнее на все моменты времени.

### Заключение

В работе построены две неявные схемы типа TVD для решения уравнения переноса теплового излучения. Целью работы было создание монотонной схемы второго порядка. В построенных TVD-схемах удалось сохранить важное достоинство  $DS_n$ -метода, когда для решения разностных уравнений используется экономичный метод бегущего счета. Используемая в новых схемах TVD-методология вносит в схему ограничитель, который вычисляется явно по известным величинам с предыдущего временного шага на трехточечном шаблоне в каждом направлении.

В первой схеме величины с верхнего временного слоя берутся в рамках двух ячеек, однако это не мешает организации бегущего счета. Схема консервативная, имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок аппроксимации по пространству. Для этой схемы имеет место положительность величин в центрах ячеек при положительности входящих величин.

В отличие от первой схемы вторая схема не приводит к расширению шаблона и позволяет оставаться в рамках одной ячейки при бегущем счете, причем для этой схемы можно показать положительность величин как в центрах ячеек, так и в узлах. Вторая схема также сочетает в себе консервативность, монотонность в смысле принадлежности к классу TVD-схем и второй порядок аппроксимации по пространству. Она более удобна для практического применения.

### Список литературы

1. Карлсон Б. Численное решение задачи кинетической теории нейтронов // Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1963. С. 243—258.
2. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. Т. 47(3). С. 271—306.
3. Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1986.
4. Елесин В. А., Троццев В. Е., Юдинцев В. Ф. Развитие численных методов и программ расчета одномерных спектральных задач переноса теплового излучения во ВНИИЭФ // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып. 1. С. 11—28.
5. Гаджиев А. Д., Селезнев В. Н., Шестаков А. А.  $DS_n$ -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Там же. 2003. Вып. 2. С. 33—46.
6. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3(6). С. 68—77.
7. Van Leer B. Towards the ultimate conservative scheme. II. Monotonicity and conservation in a second-order scheme // J. Comp. Phys. 1974. Vol. 14(2). P. 361—370.
8. Osher S., Chakravarthy S. High resolution schemes and the entropy condition // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21(5). P. 955—984.
9. Yee H. C. A Class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods // VKI lecture series. 1989. Vol. 4.
10. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. Vol. 49(3). P. 357—393.

11. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
12. Jessee J. P., Fiveland W. A. Bounded, high resolution differencing schemes applied to the discrete ordinates method // Proc. of the 31<sup>st</sup> National Heat Transfer Conference. 1996. Vol. 3. P. 133–141.
13. Остапенко В. В. О сильной монотонности нелинейных разностных схем // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1998. Т. 38(7). С. 1170–1185.
14. Андреев Е. С., Гусев В. Ю., Козманов М. Ю. Методы повышения точности схемы первого порядка для решения системы уравнений переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1998. Вып. 1. С. 15–18.
15. Fleck J. A. Jr., Cummings J. D. An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313–342.

Статья поступила в редакцию 15.10.08.

---