УДК 519.6

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ УСРЕДНЕНИЯ ПОЛИНОМОВ ПО ПЛАНКУ И РОССЕЛАНДУ

А. Е. Дубинов
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Даются точные явные формулы для вычисления планковских и росселандовских средних для полиномов.

Ключевые слова: полином, среднее, весовая функция Планка, весовая функция Росселанда.

Для вычисления коэффициентов переноса и поглощения излучения в лабораторной и астрофизической плазме часто применяют методы усреднения по Планку или Росселанду [1—4]. Математически усреднение функции $f(x)$ на отрезке $x \in [x_1, x_2]$ сводится к вычислению интегралов

$$\langle F\rangle_{P,R} = \frac{\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,\varphi_{P,R}(x)\,dx}{\int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi_{P,R}(x)\,dx}, \tag{1}$$

где φ_P — весовая функция Планка, применимая для переноса излучения в оптически тонкой плазме,

$$\varphi_P = \frac{x^3 \exp(-x)}{1-\exp(-x)}; \tag{2}$$

φ_R — весовая функция Росселанда, применимая для переноса излучения в оптически толстой плазме,

$$\varphi_R = \frac{x^4 \exp(-x)}{(1-\exp(-x))^2}. \tag{3}$$

Вычисления интегралов в (1) с весовыми функциями (2) и (3) ранее производились только численно (см., например, [5, 6]).

Легко понять, что для некоторых элементарных функций $f(x)$ интеграл (1) с весовыми функциями (2) и (3) вычисляется точно. В данной работе впервые приводятся точные явные формулы для интеграла (1) с (2) и (3), когда $f(x)$ представляет собой полином степени n:

$$f(x) = p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{4}$$

В этом случае формулы для планковских и росселандовских средних будут иметь следующий вид:

$$\langle P\rangle_P = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\left(a_k \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{x^{k+3}\exp(-x)}{1-\exp(-x)}dx\right)}{\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{x^3\exp(-x)}{1-\exp(-x)}dx}; \tag{5}$$

$$\langle P \rangle_R = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\left[a_k \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{x^{k+4}\exp(-x)}{(1-\exp(-x))^2}dx\right]}{\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{x^4\exp(-x)}{(1-\exp(-x))^2}dx}. \tag{6}$$

Входящие в (5) и (6) интегралы легко вычисляются. Точные выражения в виде конечных сумм для неопределенных интегралов из (6) и (7) при целых положительных m есть

$$\int \frac{x^m \exp(-x)}{1-\exp(-x)}dx = -\sum_{\lambda=0}^{m} \frac{m!}{\lambda!} x^\lambda \mathrm{Li}_{m-\lambda+1}(\exp(-x)), \tag{7}$$

$$\int \frac{x^m \exp(-x)}{(1-\exp(-x))^2}dx = -\sum_{\lambda=0}^{m} \frac{m!}{\lambda!} x^\lambda \mathrm{Li}_{m-\lambda}(\exp(-x)).^* \tag{8}$$

В (7) и (8) вошла давно известная, но редко используемая функция — полилогарифм $\mathrm{Li}_\nu(x)$ [10, 11], определенная как

$$\mathrm{Li}_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^\nu}. \tag{9}$$

В справедливости (7) и (8) легко убедиться путем прямого дифференцирования их правых частей, используя правило

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Li}_\nu(x) = \frac{1}{x}\mathrm{Li}_{\nu-1}(x). \tag{10}$$

Подставим (7) и (8) в (5) и (6), применив формулу Ньютона—Лейбница для определенных интегралов. Получим в итоге

$$\langle P \rangle_P = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\left\{a_k\left[\sum\limits_{\lambda=0}^{k+3}\frac{(k+3)!}{\lambda!}x_1^\lambda \mathrm{Li}_{k-\lambda+4}(\exp(-x_1)) - \sum\limits_{\lambda=0}^{k+3}\frac{(k+3)!}{\lambda!}x_2^\lambda \mathrm{Li}_{k-\lambda+4}(\exp(-x_2))\right]\right\}}{\sum\limits_{\lambda=0}^{3}\frac{3!}{\lambda!}x_1^\lambda \mathrm{Li}_{\lambda+4}(\exp(-x_1)) - \sum\limits_{\lambda=0}^{3}\frac{3!}{\lambda!}x_2^\lambda \mathrm{Li}_{\lambda+4}(\exp(-x_2))}; \tag{11}$$

$$\langle P \rangle_R = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\left\{a_k\left[\sum\limits_{\lambda=0}^{k+4}\frac{(k+4)!}{\lambda!}x_1^\lambda \mathrm{Li}_{k-\lambda+4}(\exp(-x_1)) - \sum\limits_{\lambda=0}^{k+4}\frac{(k+4)!}{\lambda!}x_2^\lambda \mathrm{Li}_{k-\lambda+4}(\exp(-x_2))\right]\right\}}{\sum\limits_{\lambda=0}^{4}\frac{4!}{\lambda!}x_1^\lambda \mathrm{Li}_{\lambda+4}(\exp(-x_1)) - \sum\limits_{\lambda=0}^{4}\frac{4!}{\lambda!}x_2^\lambda \mathrm{Li}_{\lambda+4}(\exp(-x_2))}. \tag{12}$$

Эти формулы — основной результат данной работы. Они являются точными и, несмотря на свой громоздкий вид, просты для вычислений, так как суммы имеют конечное число слагаемых, а функция полилогарифм встроена в основные пакеты математических вычислений, таких как Maple и Mathematica.

Добавим, что если необходимо усреднить не полином, а другую произвольную функцию, то формулы справедливы и для степенного разложения в ряд этой произвольной функции при условии его сходимости.

Работа была поддержана грантом Правительства Нижегородской области РФ.

*Заметим, что этот интеграл входит также в интегральную функцию Дебая теплоемкости m-мерного кристалла [7]. Впервые он был вычислен точно в [8]. В работе [9] приведены точные выражения для родственных интегралов Ферми—Дирака и Планка.

Список литературы

1. *Novikov V. G., Zakharov S. V.* Modeling of non-equilibrium radiating tungsten liners // J. Quant. Spectr. & Rad. Transf. 2003. Vol. 81, No. 1—4. P. 339—354.
2. *Potekhin A. Y., Chabrier G.* Equation of state and opacities for hydrogen atmospheres of neutron stars with strong magnetic fields // Astrophys. J. 2003. Vol. 585, No. 2. P. 955.
3. *Zeng J., Yuan J.* Spectrally resolved opacities and Rosseland and Planck mean opacities of lowly ionized gold plasmas: a detailed level-accounting investigation // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76, No. 2. P. 026401—1—10.
4. *Esaulov A. A., Bauer B. S., Makhin V. et al.* Radiation magnetohydrodynamic simulation of plasma formed on a surface by a megagauss field // Ibid. 2008. Vol. 77, No. 3. P. 036404—1—12.
5. *Дегтяренко Н. Н., Елисеев Г. М.* О фрактальности и сплайн-спектре сечений поглощения фотонов в плазме // Фракталы в прикладной физике / Под ред. А. Е. Дубинова. Арзамас-16: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 1995. С. 175—216.
6. *Елисеев Г. М., Елисеев В. Г., Жильникова Н. Н. и др.* Расчет многогрупповых росселандовых и планковых пробегов по Стилтьесу // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 3. С. 68—72.
7. *Valladares A. A.* The Debye model in n dimensions // Am. J. Phys. 1975. Vol. 43, No. 4. P. 308—311.
8. *Дубинов А. Е., Дубинова А. А.* Точные безынтегральные выражения для интегральных функций Дебая // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, № 23. С. 9—14.
9. *Дубинов А. Е., Дубинова А. А.* Нелинейные изотермические волны в вырожденной электронной плазме // Физика плазмы. 2008. Т. 34, № 5. С. 442—452.
10. *Пыхтеев Г. Н., Мелешко И. Н.* Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления. Минск: Изд-во БГУ, 1976.
11. *Lewin L.* Polylogarithms and associated functions. NY—Oxford: North Holland, 1981.

Статья поступила в редакцию 17.10.08.