

УДК 519.6

## ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

Ю. В. Янилкин, О. О. Топорова, В. Ю. Колобянин, Г. С. Фирсова  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Проводится исследование влияния различных форм вязкости Неймана—Рихтмайера на результаты моделирования ряда характерных течений, имеющих точное решение. Предлагается новая двумерная вязкость, разработанная в рамках методики ЭГАК. На тестовых расчетах показано, что предложенная вязкость повышает точность моделирования ряда течений по сравнению с классической вязкостью Неймана—Рихтмайера (скалярной и ориентированной в направлении ударной волны). Особенностью новой вязкости является ее простота и соответственно легкость программной реализации.

*Ключевые слова:* методика ЭГАК, вязкость Неймана—Рихтмайера, характерный размер ячейки, ударная волна.

### Введение

Начиная с работы Неймана и Рихтмайера [1], в разностных схемах широко используется метод сквозного счета ударных волн (УВ) с помощью искусственной квадратичной вязкости (порядка  $O(h^2)$ , где  $h$  — линейный пространственный размер ячейки счетной сетки), которая вводится в систему уравнений лагранжевой газодинамики как аддитивная добавка к давлению. Затем для уменьшения осцилляций, возникающих за фронтом УВ, квадратичная вязкость стала использоваться в комбинации с линейной вязкостью первого порядка малости по пространству (см., например, [2]). Отметим также вязкость Куропатенко [3], которая достаточно широко используется в различных методиках. Ниже искусственную вязкость будем называть просто вязкостью, имея в виду, что здесь речь не идет ни о физической, ни о схемной вязкости.

Оказалось, что предложенная Нейманом и Рихтмайером форма вязкости имеет существенные недостатки, приводящие к значительным погрешностям в решении. В работе Ноха [2] указаны некоторые из этих погрешностей:

- **первая** погрешность связана с появлением в численном решении так называемого *энтропийного следа*, который проявляется в виде ошибок конечной величины в значениях плотности и внутренней энергии в окрестно-

сти контактных разрывов и внешних границ области после прохождения УВ;

- **вторая** погрешность связана с прохождением УВ по неоднородной счетной сетке при численном моделировании;
- **третья** погрешность возникает при схождении УВ к центру сферы в сферической геометрии.

"Хорошая" вязкость не должна обладать указанными погрешностями или хотя бы должна минимизировать их. В работе Шульца [4] указаны еще две возможные дополнительные погрешности вязкости — **четвертая** и **пятая** — и связанные с этим требования к ней:

- вязкость должна стремиться к нулю при однородном сжатии вещества и при его вращении;
- вязкость должна обладать галилеевской инвариантностью, т. е. она должна исчезать при стремлении поля скоростей к константе.

К сформулированным выше пяти проблемам (требованиям к вязкости) можно добавить еще **шестое** требование [5]: вязкость должна быть такова, чтобы при проведении расчетов в лагранжевых переменных как можно дольше обеспечить сохранение хорошей счетной сетки при больших деформациях среды. Данное требование принципиально важно.

И наконец, отметим **седьмую** погрешность и проблему, связанную с ней, которая имеет место лишь при расчетах в эйлеровых и лагранжево-эйлеровых переменных. Речь идет о проблеме определения вязкости компонентов в смешанных ячейках.

За время, прошедшее с момента появления работы [1], было разработано несколько видов вязкости, в разной степени удовлетворяющих сформулированным требованиям.

Рассмотрим проблему энтропийного следа. Прежде всего здесь отметим работу Ноха [2], который поставил и частично решил проблемы, связанные с энтропийным следом на внешних границах области, вводя искусственную теплопроводность, т. е. диффузию энергии на разрывах. Он же показал, что при использовании в вязкости приращения скорости ( $\Delta u$ ) вместо произведения размера ячейки на дивергенцию скорости ( $h \operatorname{div} \vec{u}$ ) погрешность моделирования сферических волн, хотя и не исчезает, но все же значительно уменьшается. Кроме того, Нох отметил, что энтропийный след является свойством дифференциальных уравнений с классической вязкостью (Неймана—Рихтмайера). В работе Ю. А. Бондаренко [6] данный вопрос рассмотрен более подробно, в частности, в ней данное утверждение доказывается с помощью расчетов на сходимость. Дальнейшее исследование и практическое решение данная проблема получила в работе А. М. Стенина и Е. А. Соловьевой [7], в которой в дополнение к искусственной теплопроводности введена еще и диффузия масс в окрестности разрывов. Все указанные работы рассматривают лишь одномерные течения в лагранжевых переменных и не затрагивают проблем, возникающих при реализации отмеченных алгоритмов в многомерном случае и в случае использования эйлеровых переменных.

Вторая проблема распадается на две части. Первая из них связана с погрешностью моделирования УВ на неравномерных сетках в направлении движения УВ, например, при использовании сеток с размерами ячеек, меняющимися по геометрической прогрессии. Вторая часть проблемы возникает вследствие того, что погрешности, связанные с определением вязкости, могут исказить фронт УВ при прохождении ее по неоднородной (поперек волны) сетке. Основная причина возникновения данной погрешности связана со скалярным характером классической вязкости, которая не учитывает направления УВ относительно счетной сетки. Для решения данной

проблемы Уилкинсом [5] была предложена ориентированная в направлении УВ вязкость. Подобная вязкость была разработана и в методике ЭГАК, сначала для прямоугольной неподвижной сетки [8], а затем и для произвольной сетки [9]. В этих вязкостях характерный размер ячейки выбирается в направлении УВ. При этом вязкость используется как аддитивная добавка к давлению. Более кардинальное решение данной проблемы связано с введением тензорных вязкостей (см. работы [4] и [10], в которых предложены тензорные вязкости для двумерного случая). Отметим, что этой проблемы не существует для разностных схем, использующих расщепление по направлениям (см., например, [11]).

Третья погрешность, возникающая при сжатии УВ к центру сферы (цилиндра) в сферической (цилиндрической) геометрии, вообще говоря, часть общей проблемы энтропийного следа, однако наиболее острая, так как энтропийный след в центре сферы может достигать 100 и более ячеек. Интересное решение предложено в [10], где использована вязкость, основанная на дивергенции тензора скоростей деформации.

Для решения четвертой проблемы — корректного определения вязкости при однородном сжатии вещества — Кристенсен предложил метод, основанный на анализе поля скоростей в окрестности данной ячейки, в котором вязкость в ячейках уменьшается вплоть до нуля при стремлении градиентов скорости с разных сторон ячейки к одинаковым значениям [12]. Метод Кристенсена использован в 1D-методике УП [13] и в работе [10] для двумерного случая и показал себя достаточно эффективным. Недостатком метода является увеличение сеточного шаблона при вычислении вязкости. Кроме того, в этом методе используется приращение скорости вместо дивергенции, что не всегда оправданно.

Что касается пятой из сформулированных выше проблем, то она не представляется настолько острой: она или не существует, или просто решается для большинства видов вязкостей.

С шестой проблемой лучше всего "справляются" тензорные вязкости, разработанные в [4] и [10]. Большой успех в ее решении достигнут в методике Д [14] путем введения специальных вязкостей, препятствующих искажению сетки. В данной работе, касающейся расчетов в эйлеровых переменных, проблемы поддержания хорошей счетной сетки не существует.

И наконец (седьмая проблема), здесь также не будут рассматриваться вопросы, связанные с оп-

ределением искусственной вязкости в смешанных ячейках, это будет сделано в отдельной статье.

В настоящей работе предлагается новая форма вязкости, которая обладает следующими основными особенностями:

- она определена в ячейках и используется как аддитивная добавка к давлению;
- основана на стандартном (классическом) подходе, а именно на использовании величины  $h \operatorname{div} \vec{u}$ ;
- вязкость скалярная, однако характерные размеры ячеек вычисляются вдоль направления УВ, т. е. она является ориентированной;
- при расчете дивергенции скорости в ячейке не учитывается часть дивергенции, связанная с однородным безударным сжатием вещества.<sup>1</sup>

Программная реализация вязкости и численные исследования проведены в рамках методики ЭГАК [15], которая предназначена для расчетов в произвольно-лагранжево-эйлеровых переменных, хотя в большинстве случаев используется просто неподвижная счетная сетка. Хотя вязкость присутствует в расчетах лишь на *лагранжевом этапе* вычислений, тем не менее проблемы вязкости касаются и расчетов в эйлеровых переменных, поэтому численное исследование некоторых задач проводится и для них. Эффективность вязкости исследована на ряде задач, позволяющих сравнить результаты расчетов со старой и новой вязкостями друг с другом и с аналитическими решениями.

Предлагаемая вязкость не свободна от всех вышеперечисленных погрешностей, тем не менее в значительной степени минимизирует некоторые из них. Основным достоинством этой вязкости является ее простота и легкость программной реализации: в методике ЭГАК для нее фактически не требуется исправления счетных модулей, используемых на этапе решения уравнений газодинамики в лагранжевых переменных, где давления определяются в ячейках.

### Искусственная вязкость в методике ЭГАК

В методике ЭГАК в уравнениях движения и энергии используется квадратичная вязкость ти-

<sup>1</sup>Термин *безударное сжатие* будем использовать, отвлекаясь от физического определения безударного сжатия как сжатия с сохранением энтропии.

па Неймана—Рихтмайера в комбинации с линейной вязкостью, которая имеет вид

$$q^n = \begin{cases} C_1 \rho^n (h^n \operatorname{div} \vec{u}^n)^2 - C_0 \rho^n c h^n \operatorname{div} \vec{u}^n, & \operatorname{div} \vec{u}^n < 0; \\ 0, & \operatorname{div} \vec{u}^n > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $C_1 = 1$ ,  $C_0 = 0,2$  — коэффициенты, выбранные на основе расчетов;  $c$  — скорость звука. Кроме того, в (1) входят характерный размер ячейки  $h$  и дивергенция скорости  $\operatorname{div} \vec{u}$ , которые необходимо определить.

**Определение характерного размера ячейки.** Для определения характерного размера ячейки можно использовать два подхода. Первый подход базируется на определении  $h$  независимо от направления УВ. Отметим, что в настоящее время на таком подходе основаны вязкости во многих 2D- и 3D-методиках, хотя вместо формулы (1) может использоваться аналогичная формула, связанная с изменением плотности за временной шаг. Формула для  $h$  имеет следующий вид:

$$h = \frac{S}{\sqrt{0,5 (d_1^2 + d_2^2)}}, \quad (2)$$

где  $d_1, d_2$  — диагонали ячейки;  $S$  — ее площадь. Заметим, что формула (2) в случаях различающихся размеров сторон ячейки фактически дает размер меньшей стороны. Далее вязкость с таким размером ячейки будем называть *скалярной* вязкостью.

Во втором подходе характерный размер ячейки определяется с учетом направления УВ, по аналогии с тем, как это делается при введении вязкости Уилкинсом [5]. Соответствующую вязкость будем называть *ориентированной*.

Первоначальная формула для  $h$  в методике ЭГАК при использовании ориентированной вязкости имела следующий вид [9]:

$$h = \frac{\sum_{i=0}^3 \Delta h_i \tilde{h}_i}{\sum_{i=0}^3 \Delta h_i}, \quad (3)$$

где суммирование ведется по четырем сторонам ячейки;  $\tilde{h}_i$  — длины сторон ячейки, вычисленные по спрогнозированным координатам соот-

ветствующих узлов  $\vec{r} \approx \vec{r} + \vec{u}\tau$  ( $\tau$  — временной шаг);  $\Delta h_i = \min \left\{ 0, \frac{\tilde{h}_i - h_i^n}{h_i^n} \right\}$ .

Определенный таким образом характерный размер коррелирует с размером ячейки вдоль движения УВ, в частности, при движении УВ вдоль декартовых линий сетки совпадает с соответствующим размером ячейки. Однако в задачах на сферических счетных сетках использование формулы (3) может приводить к некорректному вычислению характерного размера ячейки. Поясним это на конкретном примере.

На рис. 1 схематично представлены несколько счетных ячеек одного слоя из задачи о сжатии одномерной сферической волны. Стрелками указано направление, в котором идет сжатие; 0, ..., 3 — номера сторон ячейки; пунктирной линией отмечено новое положение сторон ячейки после движения узлов. В рассматриваемом примере изменение объема ячейки<sup>2</sup> происходит за счет изменения положения только двух ее сторон  $\Delta V_0 \neq 0$ ,  $\Delta V_1 \neq 0$ , а  $\Delta V_2 = \Delta V_3 = 0$  в силу одномерности задачи ( $\Delta V_i$  — приращение объема на  $i$ -й стороне ячейки).

Очевидно, что характерный размер ячейки в данном случае должен быть выбран в радиальном направлении, однако за счет изменения длин сторон 0 и 1 данные стороны также войдут в формулу (3) и характерный размер ячейки будет выбран фактически в направлении, перпендикулярном направлению движения. Поэтому вместо формулы (3) с линейными размерами ячейки предлагается модифицированная формула, в которой приращения сторон ячейки определяются через приращения объема ячейки, связанные с движением узлов сетки:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Delta V_{01} h_{23} + \Delta V_{23} h_{01}}{\Delta V_{01} + \Delta V_{23}}; \\ \Delta V_{01} &= \left( \frac{\Delta V_0}{\tilde{h}_0} + \frac{\Delta V_1}{\tilde{h}_1} \right) h_{01}; \\ \Delta V_{23} &= \left( \frac{\Delta V_2}{\tilde{h}_2} + \frac{\Delta V_3}{\tilde{h}_3} \right) h_{23}; \\ h_{01} &= 0,5 (\tilde{h}_0 + \tilde{h}_1); \\ h_{23} &= 0,5 (\tilde{h}_2 + \tilde{h}_3). \end{aligned} \quad (4)$$

В данном примере (см. рис. 1)  $\Delta V_{23} = 0$  и характерный размер ячейки  $h = h_{23}$ , что соответствует размеру ячейки в направлении УВ.

<sup>2</sup>Поскольку в данном примере рассматривается плоский случай, под объемом понимается площадь ячейки.

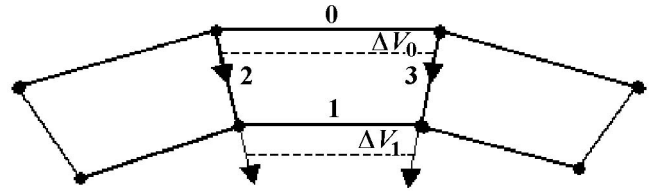


Рис. 1. Фрагмент сферической счетной сетки

Ниже для краткости  $\Delta V_i$  будем называть *потоками объема* через соответствующие стороны ячейки.

**Определение дивергенции скорости ячейки.** На рис. 2 представлены положения ячейки на два момента времени:  $t^n$  и  $t^{n+1}$ . Дивергенция скорости при переходе с одного временного слоя на другой с точностью до аппроксимации представляет собой выражение

$$\operatorname{div} \vec{u}^n = \frac{\Delta V}{V^n \tau} = \frac{\sum_{j=0}^3 \Delta V_j}{V^n \tau}, \quad (5)$$

где  $\Delta V$  — поток объема ячейки за временной шаг  $\tau$ ;  $\Delta V_j$  — потоки объема за счет движения соответствующих четырех сторон ячейки. Например, поток через сторону 0 (на рис. 2 это сторона  $A^n B^n$ ) за временной шаг определяется как объем вращения четырехугольника  $A^n B^n B^{n+1} A^{n+1}$ , где индексами  $n+1$  обозначены координаты узлов сетки на момент времени  $t^{n+1}$ .

В формулу (5) могут входить потоки объема как за счет действия УВ, так и за счет однородного сферического, цилиндрического или плоского сжатия всей области, когда дивергенции скоростей меняются одинаково во всех ячейках.

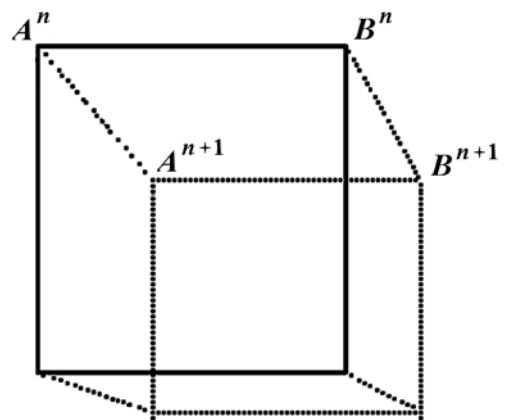


Рис. 2. Определение дивергенции скорости

Вязкость должна "работать" лишь на УВ, поэтому было бы правильно безударную часть дивергенции не учитывать при счете вязкости. С этой целью ниже используются два подхода.

Первый подход состоит в том, чтобы заменить дивергенцию осесимметричной геометрии на дивергенцию, получаемую при использовании в формуле (5) плоских площадей (вместо объемов) соответствующих фигур (см. рис. 1). Далее такую дивергенцию для краткости будем называть *плоской*. Сразу отметим, что этот подход дает хороший результат при одномерном цилиндрическом сжатии вещества, однако в общем случае сферических задач он недостаточен.

Второй подход основан на вычитании из дивергенции ее безударной части. Авторы полагают — и в этом заключается основная идея подхода, что при безударном сжатии выполняется условие

$$u_R \sim R,$$

где  $R$  расстояние до жесткой стенки, оси или центра сжатия для плоской, цилиндрической или сферической геометрии соответственно;  $u_R$  — компонента скорости, направленная вдоль  $R$ . Предлагается потоки объемов через стороны ячеек, вызванные скоростями, удовлетворяющими этому условию, вычитать из общей дивергенции. Поясним сказанное на примере сферического сжатия на сферической сетке (рис. 3).

При однородном сжатии радиальные компоненты скорости в четырех узлах ячейки удовлетворяют условиям

$$\frac{u_{R0}}{u_{R2}} = \frac{R_0}{R_2}; \quad \frac{u_{R1}}{u_{R3}} = \frac{R_1}{R_3}.$$

Эти соотношения справедливы и в общем случае произвольной сетки по отношению к любым

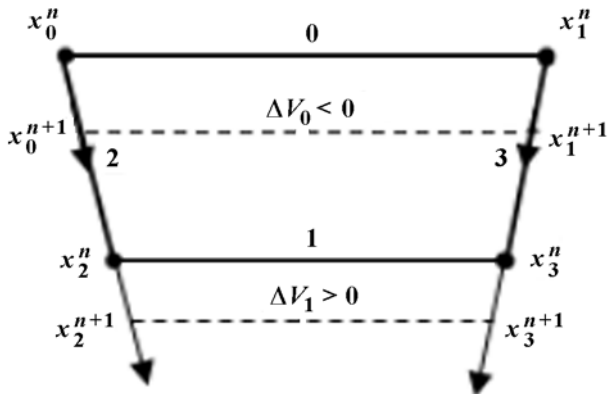


Рис. 3. Фрагмент сетки

двум узлам ячейки, т. е. для однородного сжатия имеет место соотношение

$$\frac{u_{Rj}}{u_{Ri}} = \frac{R_j}{R_i}, \quad (6)$$

где  $i, j$  — любые два узла ячейки.

Рассмотрим теперь общий случай сжатия ячейки. Представим потоки объема ячейки состоящими из двух частей:

$$\Delta V_j = \Delta V_j^{yB} + \Delta V_j^{cж},$$

где  $\Delta V_j^{yB}$  — потоки объема ячейки за счет ударно-волнового сжатия;  $\Delta V_j^{cж}$  — потоки объема ячейки за счет однородного сжатия.

Запишем безударную часть потока объема на стороне  $j$  в следующем виде:

$$\Delta V_j^{cж} = U_j^{cж} \tau S_j,$$

где  $U_j^{cж}$  — радиальная компонента скорости, ответственная за однородное сжатие;  $S_j$  — площадь стороны;  $\tau$  — временной шаг. Здесь и далее площади  $S_i$  определяются, исходя из геометрии задачи, т. е. в плоском случае как длина стороны, в осесимметричном — как площадь фигуры, полученной вращением стороны вокруг оси симметрии. Тогда, используя формулу (6), безударную часть потока объема на любой  $i$ -й стороне ячейки можно записать в следующем виде:

$$\Delta V_i^{cж} = U_j^{cж} \frac{R_i}{R_j} \tau S_i. \quad (7)$$

Таким образом, задача определения однородного сжатия ячейки сводится к корректному определению  $U_j^{cж}$  на одной из сторон ячейки. Для этого предлагается следующий алгоритм.

Предположим, что весь радиальный поток через сторону  $j$  является безударным. Тогда

$$U_j^{cж} = U_j^R,$$

где  $U_j^R$  — радиальная компонента некоторой эффективной скорости на стороне ячейки, полученной как среднее арифметическое скоростей в узлах данной стороны. Однако может случиться, что поток через какую-либо другую сторону, вычисленный по формуле (7), станет больше всего потока через эту сторону. Поэтому предлагается следующая формула:

$$U_j^{cж} = \frac{A_{\min}}{A_j} U_j^R,$$

где  $A_j = |U_j^R| / R_j$ ;  $A_{\min} = \min \{A_j\}$ .

Рассмотрим теперь вопрос определения расстояний  $R_i$ . Для конкретного случая сферически-симметричной задачи это расстояния до точки, в которую сходится течение (*центр*), для цилиндра — расстояния до оси цилиндра, в плоском случае — до плоскости схождения. Все эти случаи можно объединить формулами

$$R_0 = \sqrt{(x_{01} - x_c)^2 + (y_{01} - y_c)^2};$$

$$R_1 = \sqrt{(x_{23} - x_c)^2 + (y_{23} - y_c)^2},$$

где  $(x_{01}, y_{01})$ ,  $(x_{23}, y_{23})$  — координаты середин сторон 0 и 1 соответственно;  $x_c, y_c$  — координаты центра, причем  $y_c = 0, x_c = (x_c^1 + x_c^2)/2; x_c^1, x_c^2$  — координаты точек пересечения векторов скорости в узлах  $x_1, x_2$  (см. рис. 3) с осью  $Ox$ .

Описанные выше формулы выделения однородного сжатия в некоторых случаях некорректны.

Первая некорректность связана со случаем, когда вещество сжимается с двух сторон или поток объема через одну из сторон равен нулю. Пример такого течения приведен на рис. 4. В данном случае потоки объема через стороны 2 и 3 имеют одинаковый знак, а через стороны 0 и 1 — противоположный. В общем случае потоков с одинаковым знаком алгоритм не позволяет выделить, какая часть потока является безударной, поэтому будем полагать, что однородное сжатие имеет место только тогда, когда потоки противоположащих сторон имеют разный знак. Чтобы обойти эту некорректность, описанный алгоритм уточняется таким образом, что потоки объемов рассматриваются попарно и безударные части потоков выделяются независимо для двух пар сторон. В описанном случае для сторон 0 и 1 безударные части потоков выделяются обычным образом, а для сторон 2 и 3 потоки считаются ударными.

*Примечание.* Вообще говоря, попарное объединение сторон не обязательно, можно просум-

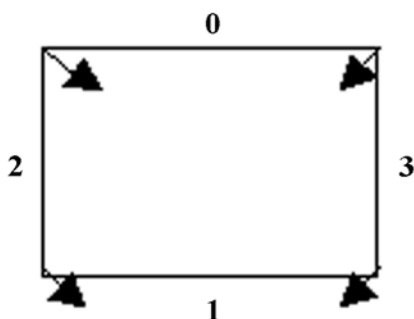


Рис. 4. Пример ударно-безударных потоков

мировать все втекающие в ячейку и вытекающие из ячейки потоки и по ним определять наличие однородного сжатия в ячейке, что позволяет использовать этот подход и для многосторонних ячеек.

Вторая некорректность связана с граничными ячейками на жестких стенках или ячейками, являющимися центральными в сферических и цилиндрических геометриях. В этом случае безударный поток объема для внутренней стороны берется из близлежащей соседней ячейки, если, конечно, он там имеется.

### Тестовые расчеты

В этом разделе приводятся результаты расчетов ряда задач, имеющих аналитическое решение, а также некоторых задач, характерных для методики ЭГАК. Расчеты проводились в различных постановках с вариацией как самой формы вязкости, так и модификаций предлагаемой вязкости.

В табл. 1 введены термины для обозначения различных вариантов вязкости (слово *ориентированная*, если это не будет вызывать разночтений, будет опускаться).

Отметим, что во всех эйлеровых расчетах для аппроксимации уравнения адвекции использовался метод РРМ [16].

**Выход ударной волны из тяжелого вещества в легкое.** Рассматривается одномерная плоская задача, постановка задачи взята из работы [8]. Начальные данные:  $1 \leq x \leq 2,5$  (*тяжелое* вещество):  $e_0 = 0, \rho_0 = 25, u_0 = 0$ ;

Таблица 1

Виды вязкости, используемые в расчетах

Вариант вязкости	Формула для характерного размера ячейки	Вид дивергенции скорости
Старая (ориентированная)	(4)	Полная
Старая скалярная	(2)	Полная
Старая (ориентированная) плоская	(4)	Плоская
Старая скалярная плоская	(2)	Плоская
Новая (ориентированная)	(4)	Полная с вычетом однородного сжатия
Новая (ориентированная) плоская	(4)	Плоская с вычетом однородного сжатия

$0 \leq x \leq 1$  (легкое вещество):  $e_0 = 0$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $u_0 = 0$ . Уравнение состояния — для идеального газа с показателем адиабаты для обоих веществ  $\gamma = 5/3$ .

Расчеты проводились в лагранжевой и эйлеровой постановках. В лагранжевой постановке расчета в тяжелом веществе бралось 200 ячеек, в легком — 200 с равномерным по расстоянию разбиением. На правой границе области задавалось давление  $P = 1$ . В эйлеровой постановке расчета взято 800 ячеек, разбитых равномерно по расстоянию. На правой границе области — втекающий поток тяжелого вещества:  $u_x = -\sqrt{0,03}$ ;  $u_y = 0$ ;  $\rho = 100$ ;  $e = 0,015$ .

Результаты расчетов приводятся на рис. 5 в виде профилей плотности. Результаты наглядно подтверждают тот факт, что при расчетах в эйлеровых переменных энтропийный след существенно меньше по сравнению с расчетами в лагранжевых переменных.

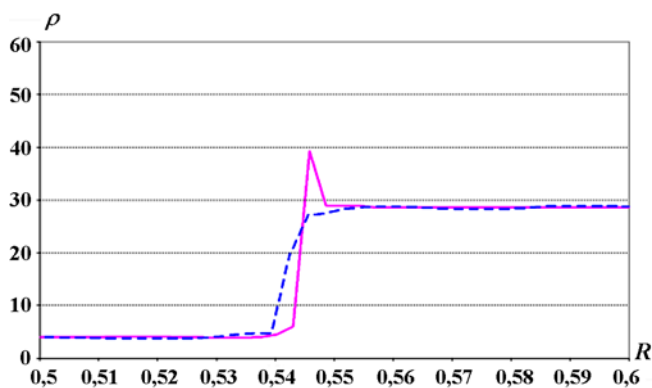


Рис. 5. Выход УВ из тяжелого вещества в легкое. Расчетные профили плотности,  $t = 8$ : — — лагранжева постановка; - - - — эйлерова постановка

**Цилиндрическая задача Ноха.** Постановка задачи содержится в [2]. В цилиндрической области с радиусом цилиндра  $R_0 = 50$  содержится однородное вещество с  $\rho_0 = 1$ ,  $e_0 = 0$ ,  $U_0^R = -1$ . Уравнение состояния — для идеального газа с  $\gamma = 5/3$ . На верхней границе задана радиальная скорость  $U_0(t) = -1$ , на оси  $Ox$  — жесткая стенка. Задача смоделирована в двух постановках: на подвижной сферической сетке<sup>3</sup> и на неподвижной квадратной сетке.

*Подвижная сферическая сетка.* В данной постановке внешняя граница области являлась ла-

<sup>3</sup>Слово *сферическая* здесь и ниже в случае цилиндрической геометрии надо воспринимать не буквально, а как констатацию того, что сетка радиальная.

гранжевой линией, а внутри сетка строилась равномерно по расстоянию. На рис. 6,а,б показаны результаты расчетов на сферической сетке, 200 ячеек по радиусу (по углу  $2^\circ$  на ячейку), со старой и новой вязкостями. Результаты расчетов задачи Ноха на сходимость с новой вязкостью представлены на рис. 7,а,б (см. также цветную вкладку).

*Неподвижная квадратная сетка.* Геометрия задачи представляла собой прямоугольник  $-55 < x < 55$ ,  $0 < y < 55$ ; вне цилиндрической области задавался вакуум. Расчеты проведены только с новой вязкостью. Число ячеек в расчетах  $220 \times 110$ ,  $440 \times 220$ . Результаты представлены на рис. 8 в виде профиля плотности в радиальном направлении для всех ячеек системы на момент времени  $t = 30$ , а на рис. 9,а,б — в виде профилей плотности и давления, полученных усреднением по всем ячейкам. Рис. 8 дает представление о сохранении сферической симметрии течения на прямоугольной сетке, а рис. 9 — об общей точности.

**Сферически-цилиндрическое однородное сжатие вещества.** На рис. 10 представлена начальная геометрия задачи, состоящая из сопряженных цилиндра и сферы ( $Ox$  — ось симметрии). Счетная область заполнена веществом с  $s_0 = 1$ ,  $e_0 = 0$ ; уравнение состояния — для идеального газа с  $\gamma = 5/3$ . Вдоль радиусов цилиндра и сферы задается радиальная скорость,  $u_r = -r$ , как показано на рисунке. На границе  $\Gamma_0$  — условие жесткой стенки, на  $\Gamma_3$   $P = 0$ , остальные границы проходят по оси симметрии. Происходит однородное сжатие без приращения внутренней энергии (в силу того, что начальное давление равно нулю).

Расчеты проводились на лагранжево-эйлеровой счетной сетке. Начальная сетка также показана на рис. 10, в процессе счета внешняя граница оставалась лагранжевой линией, а внутри области сетка строилась равномерно по расстоянию. Расчеты проводились со старой и новой вязкостями, а также с использованием плоской дивергенции при счете вязкостей. Счетная сетка  $100 \times 40$  не варьировалась.

Результаты представлены на рис. 11 (см. также цветную вкладку). Заметим, что при использовании новой вязкости энергия в области близка к нулю во все время счета, т. е. при однородном сжатии накачивания энергии не происходит.

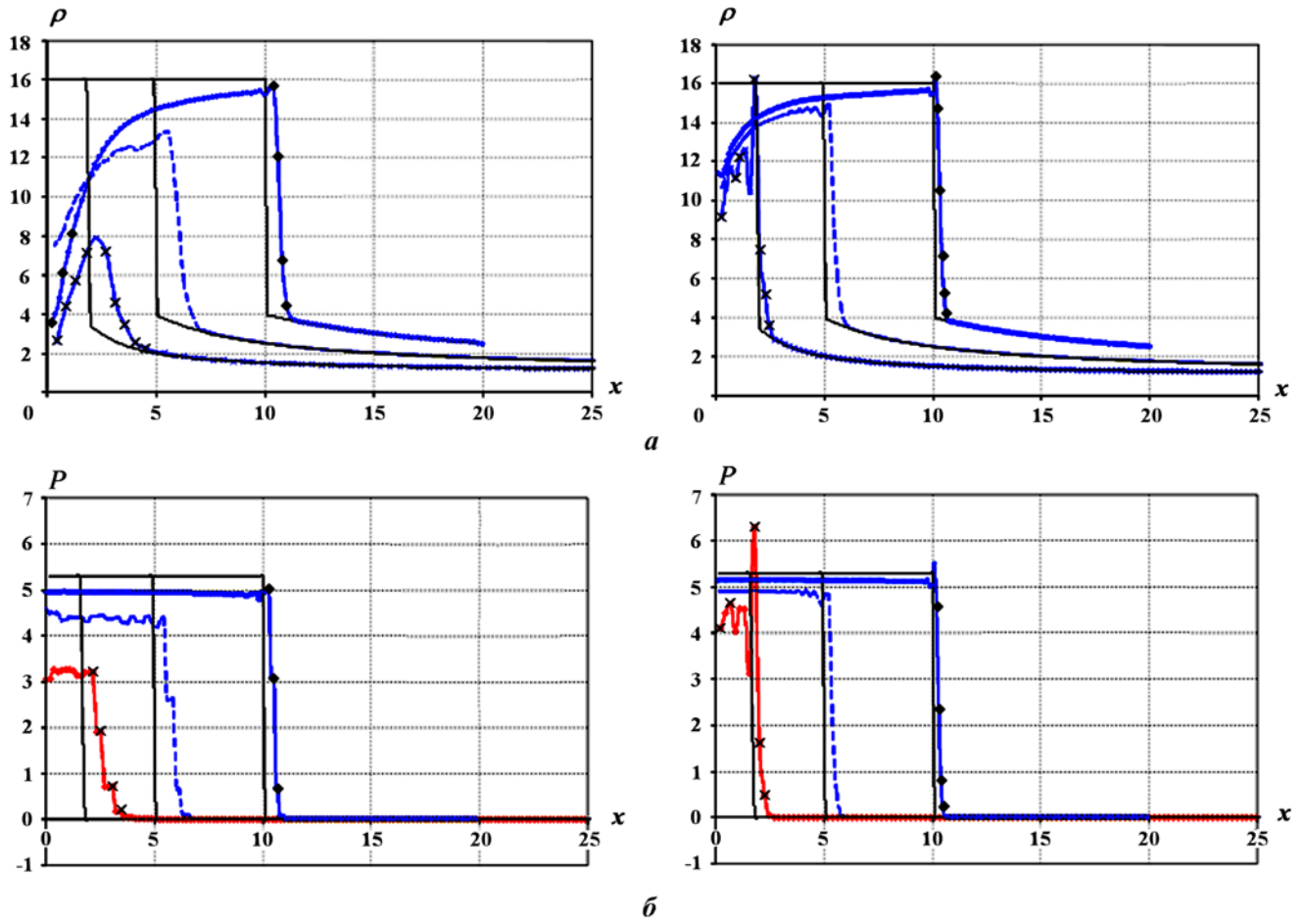


Рис. 6. Цилиндрическая задача Ноха на подвижной сферической сетке, 200 ячеек. Профили плотности (а) и давления (б): слева — старая вязкость; справа — новая вязкость;  $\times$  —  $t = 5$ ; --- —  $t = 15$ ;  $\blacklozenge$  —  $t = 30$ ; — — точное решение

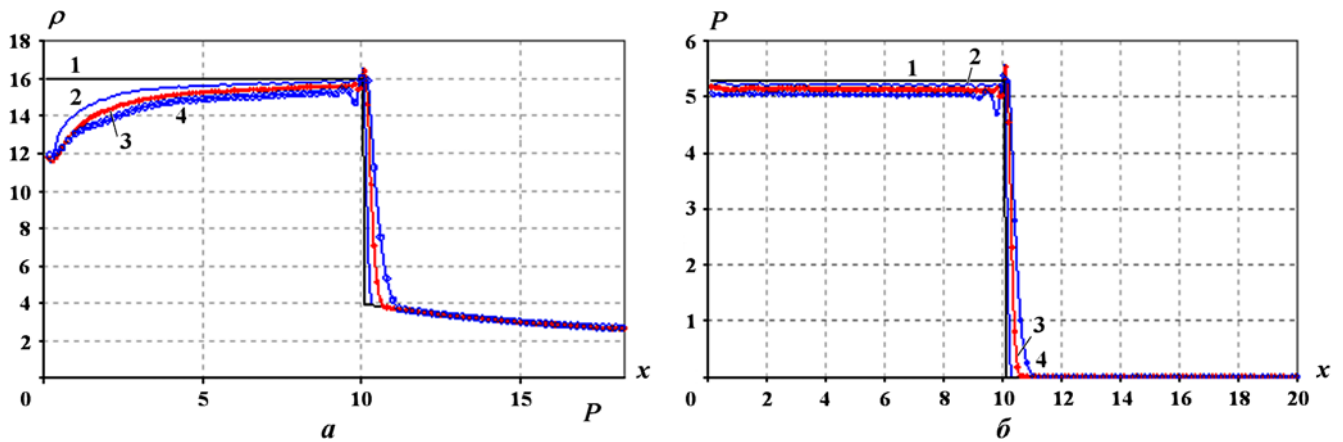


Рис. 7. Цилиндрическая задача Ноха на подвижной сферической сетке, расчеты на сходимость. Профили плотности (а) и давления (б),  $t = 30$ , новая вязкость: 1 — точное решение; 2 — сетка  $400 \times 45$ ; 3 — сетка  $200 \times 45$ ; 4 — сетка  $100 \times 45$

**Задача Зальцмана.** В задаче Зальцмана, описанной в работе [17], одномерная плоская УВ с двумя отражениями от границ движется по

сетке. Одно семейство линий сетки направлено вдоль направления движения волны, а второе семейство линий "закошено". Кроме того, вдоль



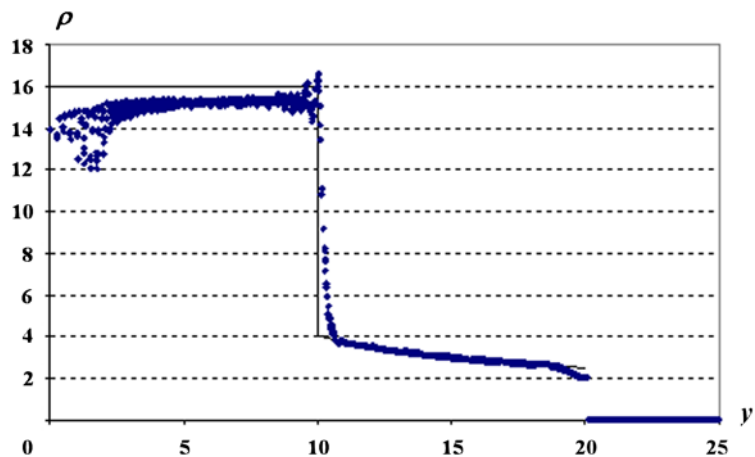


Рис. 8. Цилиндрическая задача Ноха на неподвижной квадратной счетной сетке  $440 \times 220$ . Профили плотности по всем ячейкам,  $t = 30$ : • — расчет с новой вязкостью; — — точное решение

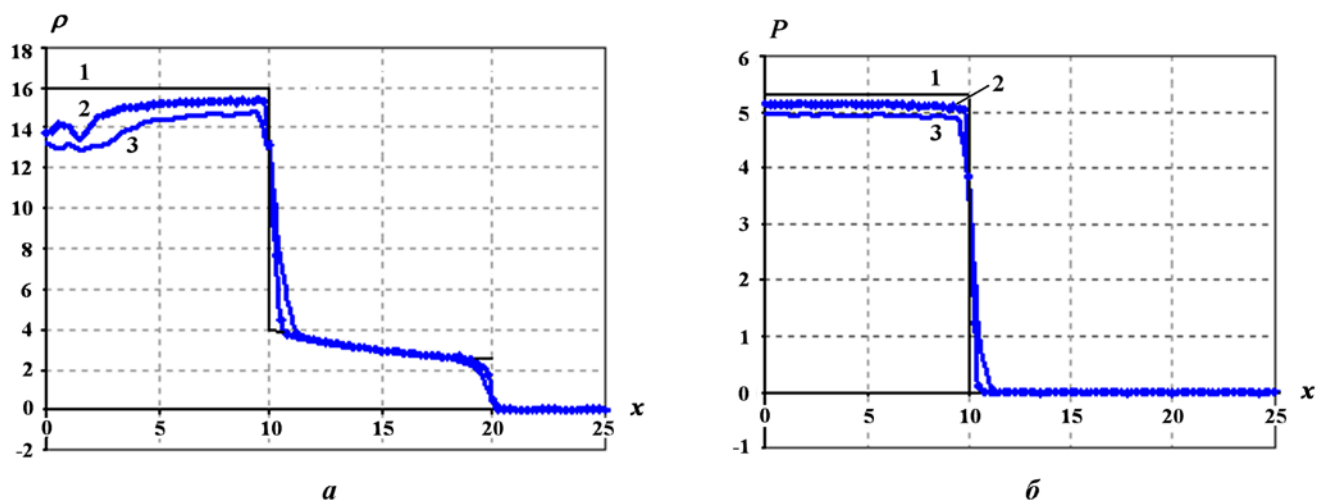


Рис. 9. Цилиндрическая задача Ноха на неподвижной прямоугольной счетной сетке. Профили плотности (а) и давления (б),  $t = 30$ , новая вязкость: 1 — точное решение; 2 — сетка  $440 \times 220$ ; 3 — сетка  $220 \times 110$

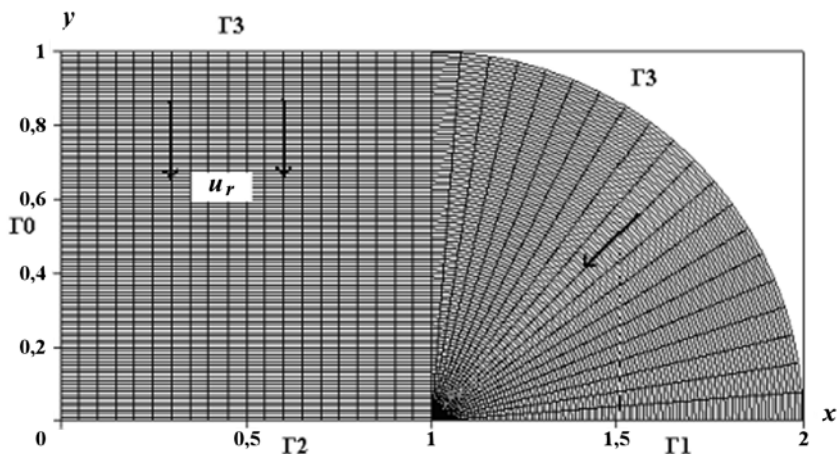


Рис. 10. Сферически-цилиндрическое однородное сжатие вещества. Начальная геометрия задачи и счетная сетка

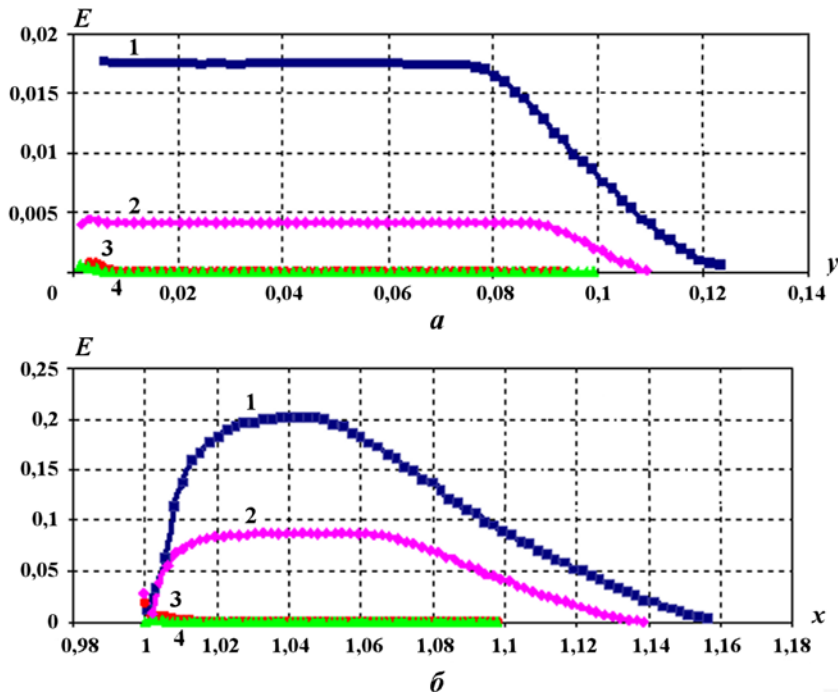


Рис. 11. Сферически-цилиндрическое однородное сжатие вещества. Профили энергии,  $t = 0,9$ :  $a$  — вдоль линии  $x = 0,6$ ;  $b$  — вдоль линии  $y = 0$ ; 1 — старая вязкость; 2 — старая плоская вязкость; 3 — новая вязкость; 4 — новая плоская вязкость

направления движения волны сетка неравномерная, с переменным характером неравномерности.

Геометрия задачи:  $0 \leq x \leq 1,0$ ;  $0 \leq y \leq 0,025$ . Граничные условия: на левой лагранжевой границе задана скорость  $u_{\text{гран}} = 1,0$ ; остальные границы — жесткие стенки. Начальные условия:  $u = 0$ ;  $V = 0$ ;  $\rho = \rho_0 = 1$ ;  $E = 0$ ;  $P = 0$ . Уравнение состояния —  $P = (\gamma - 1)\rho E$ ,  $\gamma = 5/3$ .

Расчеты проводились на подвижной лагранжево-эйлеровой сетке (вытянутой вдоль движения), состоящей из 10 столбцов и 100 строк. Сетка строилась следующим образом. В левом столбце ячейки располагались равномерно. При построении самого правого столбца ( $y = 0$ ) использовался коэффициент  $q = 0,992$ , т. е. слева ячейки крупнее, а справа — мельче. В промежуточных столбцах для построения сетки исполь-

зовалось разбиение *прямолинейно через точки разбиения границ*. Такая сетка поддерживалась на протяжении всего счета. Все расчеты проводились в осесимметричной постановке.

Сравнение с точным решением проводилось на два характерных момента времени:  $t = 0,7$  и  $t = 0,925$ . На момент времени  $t = 0,7$  УВ еще не доходит до правой границы. На момент  $t = 0,925$  УВ уже отразилась от левой границы и движется направо.

На рис. 12,  $a-g$  приведены профили плотности и давления по всем точкам области в зависимости от координаты  $x$  на контрольные моменты времени  $t = 0,7$  и  $t = 0,925$  для двух расчетов.

Интегральные результаты расчетов задачи представлены в табл. 2 в виде относительной

Таблица 2

### Погрешности в расчетах задачи Зальцмана

Вид вязкости в расчете	Момент времени	Относительная $L_1$ -норма погрешности плотности	Дисбаланс полной энергии, %
Старая скалярная	0,7	0,0966	3,92
	0,925	0,1098	8,55
Старая (ориентированная)	0,7	0,0405	0,25
	0,925	0,0393	0,25
Новая (ориентированная)	0,7	0,0395	0,24
	0,925	0,0388	0,24

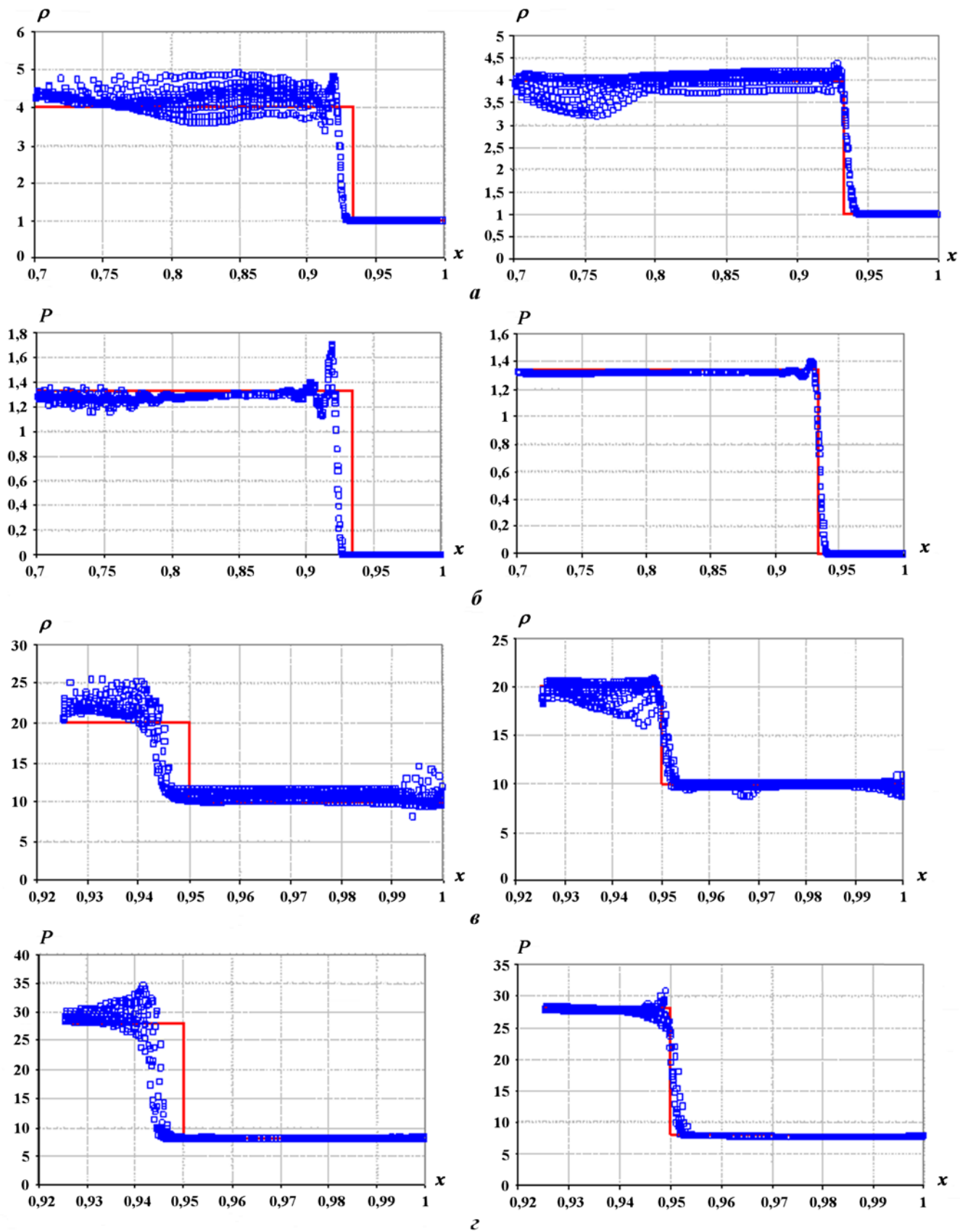


Рис. 12. Задача Зальцмана. Профили плотности (а,в) и давления (б,г): а,б —  $t = 0,7$ ; в,г —  $t = 0,925$ ; слева — расчет со старой скалярной вязкостью; справа — расчет с новой вязкостью;  $\square$  — расчетные значения; — — теоретические профили

$L_1$ -нормы погрешности плотности и дисбаланса полной энергии.

Расчеты данной задачи показывают, что на неоднородной сетке обязательно применение вязкостей, учитывающих направление УВ. Из табл. 2 видно, что с использованием ориентированной вязкости получаются значительно лучшие результаты, интегральная погрешность для ориентированной вязкости составляет менее 4 % по сравнению с  $\sim 11\%$  для скалярной вязкости, что хорошо коррелирует с дисбалансом энергии. С использованием старой скалярной вязкости даже положение УВ считается с большой погрешностью, в то время как при новой вязкости ее положение с практически приемлемой точностью совпадает с точным решением. Эффект вычета безударной части сжатия в данной задаче незначителен в силу малости компоненты скорости по оси  $y$ .

### Обсуждение результатов

Прежде чем обсудить предлагаемую вязкость с точки зрения ее достоинств и недостатков, рассмотрим сначала один вспомогательный вопрос — об использовании плоской и полной дивергенций в формулах для вязкости. Плоская дивергенция дает улучшение результата лишь при использовании старой вязкости в обоих вариантах. При новой вязкости расчеты с обеими дивергенциями дают практически совпадающие результаты. В предлагаемой вязкости авторы оставляют полную дивергенцию по причине того, что в некоторых случаях разлета от центра могут реализоваться течения с положительными полными дивергенциями, в то время как плоские дивергенции будут отрицательны. То есть при использовании плоской дивергенции в фактически несжимаемых течениях могут быть ненулевые вязкости, чего лучше не допускать. Хотя, справедливости ради, надо сказать, что такие случаи чрезвычайно редки. К тому же определять, считать в ячейке вязкость или не считать, можно по полной дивергенции, а саму вязкость определять по плоской.

Рассмотрим теперь вопрос о выполнении (или невыполнении) требований к вязкости, сформулированных во Введении.

*Проблема энтропийного следа.* С точки зрения этой проблемы как на внешних границах, так и на контактных границах между веществами новая вязкость ничего нового не дает по сравнению со старой.

*Проблема неоднородной сетки,* т. е. влияния вязкости на течение при использовании неоднородной по пространству сетки. Расчеты показывают, что новая вязкость не до конца решает данную проблему, однако значительно минимизирует связанную с ней погрешность.

*Проблема цилиндрического (сферического) схождения вещества.* Расчеты цилиндрической задачи Ноха показали, что новая вязкость не решает данную проблему полностью, тем не менее, значительно минимизирует связанную с ней погрешность, во-всяком случае, для цилиндрического схождения.

*Проблема однородного сжатия вещества.* Как показывают расчеты, данная проблема для сферического, цилиндрического и плоского схождения к оси  $OY$  практически решена.

*Проблема галилеевской инвариантности* для старой вязкости не существовала, для новой вязкости она возникает. Общего решения данной проблемы авторы не дают, однако в частных случаях она в значительной степени может быть решена вычитанием общей скорости движения области вдоль оси  $X$  из скорости в узлах сетки при вычислении вязкости или же заданием координат центра сходимости явным образом. Такие возможности в методике имеются.

### Заключение

В данной работе предложена новая двумерная вязкость, разработанная в рамках методики ЭГАК и обладающая повышенной по сравнению с вязкостью в форме Неймана—Рихтмайера (скалярной и ориентированной) точностью моделирования ряда сложных (с точки зрения применения вязкости) течений. Особенностью новой вязкости в сравнении с имеющимися вязкостями является ее простота и соответственно легкость программной реализации, она легко обобщается на трехмерный случай.

### Список литературы

1. Von Neumann J., Richtmyer R. D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. 1950. Vol. 21, No 3. P. 232—237.
2. Noh W. F. Errors for calculation of strong shocks using artificial viscosity and artificial heat flux // J. Comp. Phys. 1987. Vol. 72, No 1. P. 78—120.

3. Куропатенко В. Ф. Метод построения разностных схем для численного интегрирования уравнений газодинамики // Изв. ВУЗов. Математика. 1963. № 3 (28). С. 75—83.
4. Шульц У. Д. Двумерные конечно-разностные гидродинамические уравнения в переменных Лагранжа // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 9—54.
5. Wilkins M. L. // J. Comp. Phys. 1980. Vol. 36. P. 281.
6. Бондаренко Ю. А. Энтропийный след в расчетах на сходимость при взаимодействии ударных волн // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики. Тез. докл. 11-й Всерос. конф. / Под ред. А. В. Забродина, А. М. Молчанова, В. М. Тихомирова. Пущино, 1996. С. 15—17.
7. Стенин А. М., Соловьева Е. А. Исследование влияния некоторых форм искусственной вязкости на характер "энтропийного следа" при численном решении уравнений газодинамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 1. С. 30—41.
8. Бахрах С. М., Глаголева Ю. П., Самигулин М. С. и др. Расчет газодинамических течений на основе метода концентраций // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 3. С. 566—569.
9. Янилкин Ю. В. Численное моделирование двумерных течений многокомпонентной среды с учетом некоторых мелкомасштабных процессов // Физическая мезомеханика. 1999. Т. 2, № 5. С. 27—48.
10. Caramana E. J., Shashkov M. M., Whalen P. P. Formulation of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave problems // J. Comp. Phys. 1998. Vol. 144. P. 70—97.
11. Софронов И. Д., Воронин Б. Л., Скрыпник С. И. и др. Методика и комплексы программ РАМЗЕС, РАМЗЕС-КП // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 5—10.
12. Christensen R. B. High resolution hydrodynamics using artificial viscosity // Там же. 1996. Вып. 4. С. 89—93.
13. Гаврилов Н. Ф., Иванова Г. Г., Селин В. И., Софронов В. Н. Программа УП-ОК для решения одномерных задач механики сплошной среды в одномерном комплексе // Там же. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1982. Вып. 3(11). С. 11—14.
14. Софронов И. Д., Делов В. И., Дмитриева Л. В. и др. Методика Д для расчета многомерных задач механики сплошной среды в переменных Лагранжа на регулярной сетке // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2001. Вып. 1. С. 102—113.
15. Янилкин Ю. В., Шанин А. А., Ковалев Н. П. и др. Комплекс программ ЭГАК для расчетов двумерных течений многокомпонентной среды // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 4. С. 69—75.
16. Янилкин Ю. В., Колобянин В. Ю., Чистякова И. Н., Егужова М. Ю. Применение метода РРМ в расчетах по методикам ЭГАК и ТРЭК // Там же. 2005. Вып. 4. С. 69—79.
17. Campbell J. C., Shashkov M. J. A tensor artificial viscosity using a mimetic finite difference algorithm // J. Comp. Phys. 2001. Vol. 172. P. 739—765.

Статья поступила в редакцию 25.08.08.

Исправленный вариант — 24.02.09.