

1 сентября 2009 г. исполнилось бы 80 лет Ивану Денисовичу Софронову, бывшему на протяжении 30 лет бессменным главным редактором нашего журнала. Доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии СССР и Государственной премии РФ, он в течение 15 лет был заместителем научного руководителя Российского федерального ядерного центра — Всероссийского научно-исследовательского института экспериментальной физики и более 35 лет возглавлял математическое отделение РФЯЦ-ВНИИЭФ.

В ознаменование 80-летия со дня рождения И. Д. Софронова редакция публикует последнюю работу, в которой принял участие Иван Денисович, в основу которой положены его идеи.

УДК 519.6

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ ДИРИХЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭКОНОМИЧНОЙ СХЕМЫ

И. Д. Софронов, А. И. Панов, А. В. Самодолов  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Описывается экономичная разностная схема для решения многомерного уравнения теплопроводности на неструктурированных сетках Дирихле. Данная схема была предложена и обоснована И. Д. Софроновым. Отличительной особенностью схемы является то, что она оказывается применимой на сильно неравномерных сетках, составленных из ячеек с переменным числом вершин. Схема может использоваться для численного решения как линейной, так и квазилинейной теплопроводности в двумерном и трехмерном случаях.

*Ключевые слова:* неструктурированные сетки Дирихле, схема расщепления по направлениям, численное решение двумерных и трехмерных задач теплопроводности.

### Введение

Для решения многомерных задач математической физики всегда существовала потребность в экономичных и точных схемах. Начиная с работ Писмена, Рэкфорда, Дугласа (1955—1956 гг.), стали появляться первые экономичные схемы, относящиеся к методам, которые часто называют методами расщепления. Суть этих методов заключается в том, что на каждом временном шаге решение сложной многомерной задачи сводится к решению последовательности простых одномерных задач. Из отечественных ученых большой вклад в развитие методов расщепления внесли такие выдающиеся математики, как С. К. Годунов, Е. Г. Дьяконов, Г. И. Марчук, А. А. Самарский, Н. Н. Яненко. Так, в 1967 г. в работе [1] Н. Н. Яненко описал метод дробных шагов как способ построения экономичных разностных схем. Этот метод и в настоящее время является неотъемлемым элементом построения разностных схем при решении многомерных задач математической физики.

Наиболее полное обоснование и широкое применение методы расщепления получили для решения многомерных задач на регулярных (структурированных) счетных сетках. В 1966 г. И. Д. Софроновым была предложена экономичная схема типа *предиктор-корректор* для решения двумерного уравнения теплопроводности в параллелограмме с использованием ячеек Дирихле [2]. В том же 1966 г. И. Д. Софроновым впервые была высказана идея о перспективности использования нерегулярных (неструктурированных) сеток, которые имеют серьезные преимущества перед регулярными сетками при расчете течений с большими деформациями и большими тангенциальными сдвигами.

С этого времени в математическом отделении ВНИИЭФ успешно развиваются несколько направлений расчета многомерных течений на нерегулярных сетках (см., например, [3–5]). Тем не менее вопрос о применении экономичных разностных схем для решения уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках до сих пор остается открытым.

Первый опыт численного решения уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках описан в работе [6], выполненной И. Д. Софроновым совместно с В. Я. Урмом. В этой работе для конструирования разностной схемы предлагается использовать метод типа *предиктор-корректор*, а для определения ближайшего соседства в произвольной совокупности точек использовать ячейки Дирихле. Данная работа стала отправной точкой описанного ниже метода.

## Аппроксимация уравнения теплопроводности

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div} \kappa \operatorname{grad} T, \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $T$  — температура;  $\rho$  — плотность;  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$  — удельная внутренняя энергия;  $\kappa = \kappa(\rho, T)$  — коэффициент теплопроводности.

Для простоты рассмотрим двумерный случай. Предположим, что область решения покрыта без зазоров и наложений нерегулярной сеткой, состоящей из ячеек Дирихле. Пусть  $\Omega_i$  —  $i$ -я ячейка сетки Дирихле,  $\partial\Omega_i$  — граница этой ячейки. Проинтегрируем уравнение (1) по ячейке  $\Omega_i$ . Воспользовавшись формулой Гаусса—Остроградского и тем, что каждое ребро сетки Дирихле является серединным перпендикуляром отрезка, соединяющего центры соседних ячеек, получим

$$m_i \frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\tau} = \sum_k \kappa_k \frac{T_{i_k}^{n+1} - T_i^{n+1}}{l_{i_k i}} S_{i_k i}, \quad (2)$$

где суммирование ведется по ребрам ячейки  $\Omega_i$ ;  $S_{i_k i}$  — площадь  $k$ -го ребра;  $l_{i_k i}$  — расстояние от центра  $i_k$ -й до центра  $i$ -й ячейки;  $m_i = \rho_i V_i$  — масса  $i$ -й ячейки.

## Метод расщепления

На рис. 1 изображена сетка Дирихле, полученная из случайно набросанных в квадрат центров ячеек. Видно, что ячейками сетки являются многоугольники с нефиксированным числом сторон, а также, что ячейки сетки отличаются между собой и формой, и размерами. Понятно, что осуществить расщепление разностного оператора из системы уравнений (2) по фиксированному числу направлений на такой сетке вряд ли удастся.

И. Д. Софроновым было предложено строить совершенно произвольные пути, проходящие через ребра ячеек, удовлетворяющие только лишь двум требованиям:

- через каждое ребро сетки должен проходить один и только один путь;
- никакой путь не может быть самопересекающимся.

Понятно, что среди различных путей могут быть и короткие, и длинные. Начинаться и кончаться пути могут как на границе области, так и внутри нее.

Рассмотрим произвольную ячейку сетки и пути, проходящие через нее. Для ячейки, изображенной на рис. 2, имеем четыре проходящих через нее пути. Это позволяет расщепить уравнение (2) на четыре одномерных уравнения:

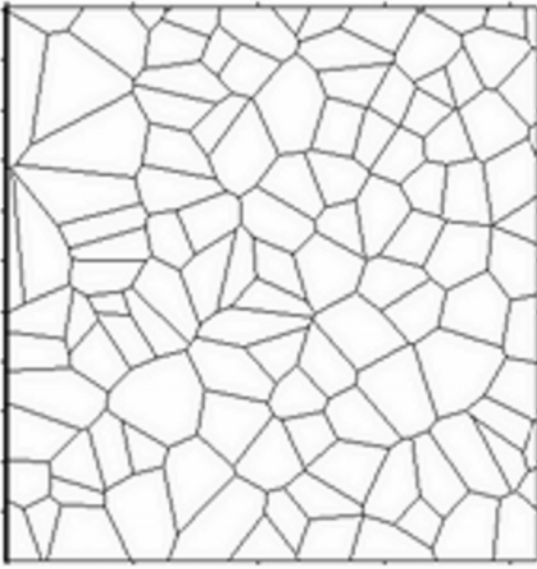


Рис. 1. Нерегулярная сетка Дирихле

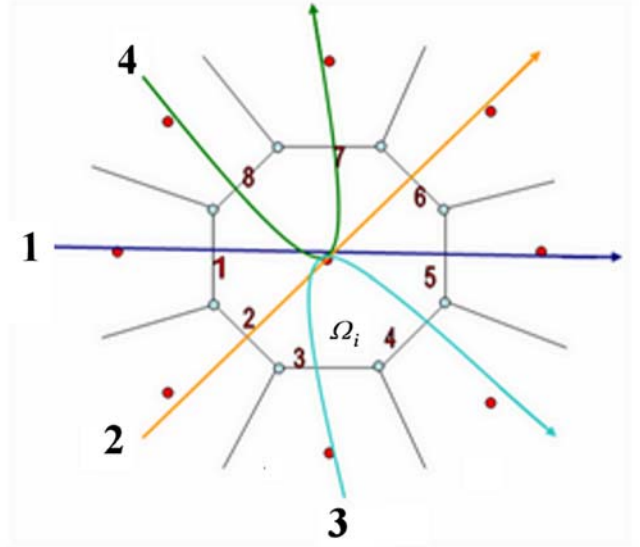


Рис. 2. Пример путей, проходящих через ячейку сетки

$$\begin{aligned}
 m_i \frac{\varepsilon_i^{n+1/4} - \varepsilon_i^n}{\tau} &= \varkappa_1 \frac{T_{i_1}^{n+1/4} - T_i^{n+1/4}}{l_{i_1 i}} S_{i_1 i} + \varkappa_5 \frac{T_{i_5}^{n+1/4} - T_i^{n+1/4}}{l_{i_5 i}} S_{i_5 i}; \\
 m_i \frac{\varepsilon_i^{n+2/4} - \varepsilon_i^{n+1/4}}{\tau} &= \varkappa_2 \frac{T_{i_2}^{n+2/4} - T_i^{n+2/4}}{l_{i_2 i}} S_{i_2 i} + \varkappa_6 \frac{T_{i_6}^{n+2/4} - T_i^{n+2/4}}{l_{i_6 i}} S_{i_6 i}; \\
 m_i \frac{\varepsilon_i^{n+3/4} - \varepsilon_i^{n+2/4}}{\tau} &= \varkappa_3 \frac{T_{i_3}^{n+3/4} - T_i^{n+3/4}}{l_{i_3 i}} S_{i_3 i} + \varkappa_4 \frac{T_{i_4}^{n+3/4} - T_i^{n+3/4}}{l_{i_4 i}} S_{i_4 i}; \\
 m_i \frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^{n+3/4}}{\tau} &= \varkappa_8 \frac{T_{i_8}^{n+1} - T_i^{n+1}}{l_{i_8 i}} S_{i_8 i} + \varkappa_7 \frac{T_{i_7}^{n+1} - T_i^{n+1}}{l_{i_7 i}} S_{i_7 i}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Если предположить, что температурам ячеек одного и того же пути приписаны одинаковые верхние индексы, то процедура (3) расщепляет систему уравнений (2) в набор трехдиагональных систем, причем число систем совпадает с числом путей. Последовательно решая полученные системы (используя в качестве начального распределения измененные предыдущими проходами температуры), получаем искомое решение.

Предложенный способ расчета двумерного уравнения теплопроводности естественным образом обобщается на трехмерный случай.

Остановимся более подробно на выборе произвольных путей.

Рассмотрим произвольно выбранную  $i$ -ю ячейку. Для каждого ребра будем рассчитывать поток температуры в виде  $Q_{i_k} = \varkappa_k \frac{T_{i_k} - T_i}{l_{i_k i}}$ . Сравнивая потоки, в итоге получаем максимальное значение  $Q_{i_k}$  для  $i$ -й ячейки и  $k$ -го ребра. Набирая таким образом, от ячейки к ячейке, максимальные значения  $Q_{i_k}$ , получаем путь по максимальному потоку. Отметим, что сначала выбираются все пути, которые начинаются с границы, а затем оставшиеся внутри области, причем первый путь определяется по максимальному потоку среди всех граничных ребер.

### Результаты тестовых расчетов

В качестве тестов были взяты известные задачи о движении плоской тепловой волны, а также об остывании бесконечного параллелепипеда в двумерном случае и куба — в трехмерном случае. Ниже приведены постановки задач и результаты расчетов в сравнении с точным решением. Для всех тестовых расчетов были вычислены относительные погрешности в сеточных нормах трех типов:

- 1)  $L_\infty$ :  $\|U - \tilde{U}\|_{L_\infty} = \max_i |U_i - \tilde{U}_i|$ ;
- 2)  $L_1$ :  $\|U - \tilde{U}\|_{L_1} = \sum_i V_i |U_i - \tilde{U}_i|$ ;
- 3)  $L_2$ :  $\|U - \tilde{U}\|_{L_2} = \sqrt{\sum_i V_i |U_i - \tilde{U}_i|^2}$ ,

где  $U, \tilde{U}$  — точное и численное решения соответственно .

**Задача 1. Остывание бесконечного параллелепипеда.** Рассмотрим задачу, взятую из [7]. Счетная область задачи — прямоугольный параллелепипед с сечением в плоскости  $XY$  в виде квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$  и бесконечный в направлении  $Z$ . Коэффициент теплопроводности имеет вид  $\kappa = 1$ , удельная внутренняя энергия  $\varepsilon = T$ . В начальный момент времени температура внутри параллелепипеда равна 1, а на его границе температура поддерживается равной 0. Задача имеет аналитическое решение  $T(x, y, t) = f(x, t) f(y, t)$ , где

$$f(x, t) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(-\pi^2 (2k+1)^2 t)}{\pi (2k+1)} \sin(\pi (2k+1) x). \quad (4)$$

Рассмотрим сетку, где центры ячеек Дирихле получены случайным образом (рис. 3). Все расчеты проводились до момента времени  $t = 0,1$  на сетке из 2 496 ячеек при варьировании значения числа Куранта (*Courant*). На рис. 4 (см. также цветную вкладку) приведено распределение температуры при  $t = 0,1$  в расчете с числом Куранта, равным 20. На рис. 5 (см. также цветную вкладку) показано распределение температуры вдоль отрезка  $AB$ ,  $A = (0; 0,5)$ ,  $B = (1; 0,5)$ .

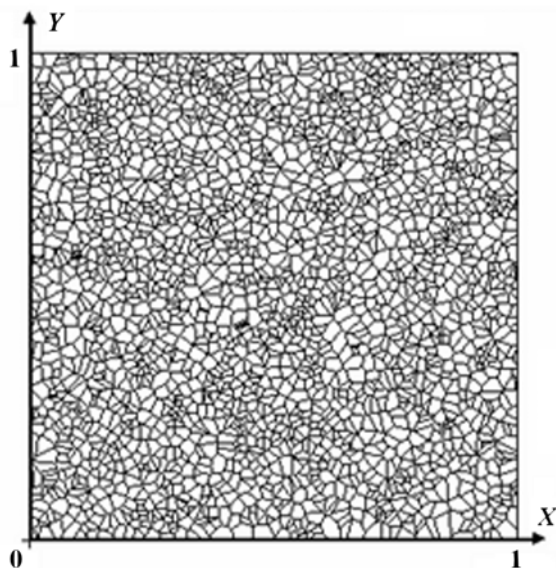


Рис. 3. Начальная сетка из 2 496 ячеек Дирихле

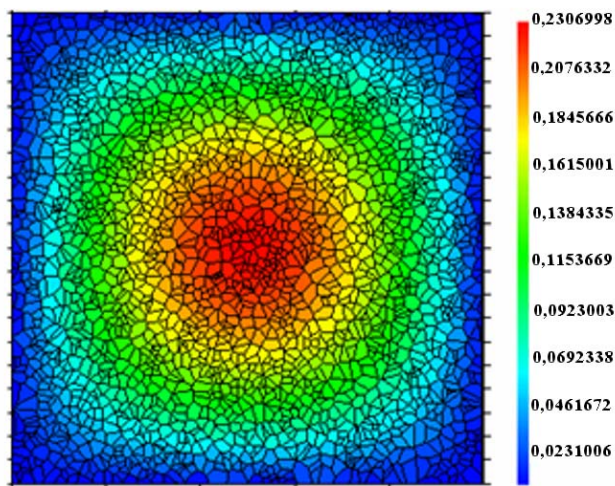


Рис. 4. Распределение температуры на момент времени  $t = 0,1$ ; *Courant* = 20

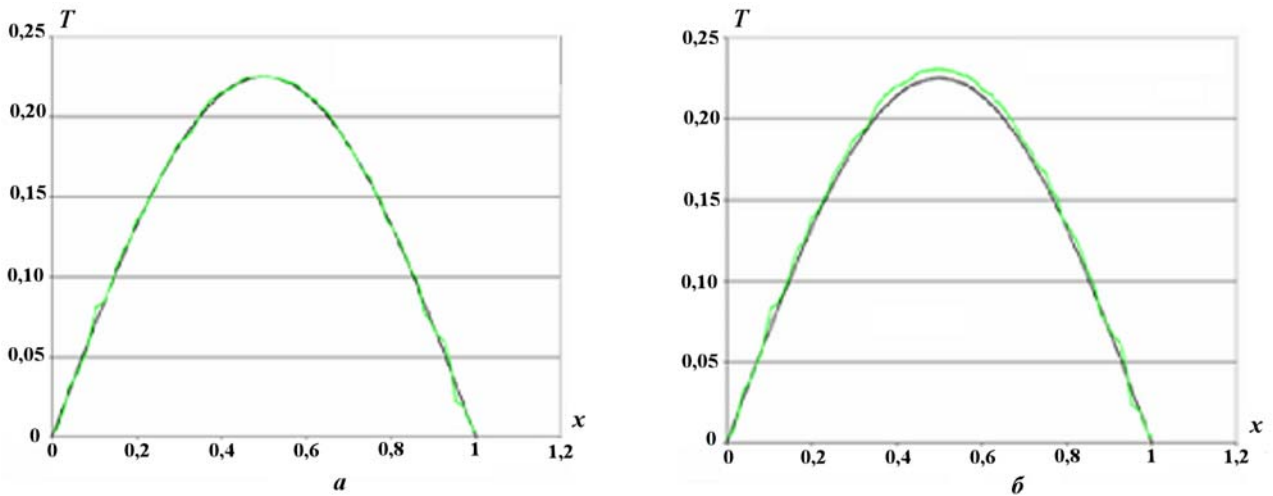


Рис. 5. Распределение температуры вдоль отрезка  $AB$ ,  $A = (0; 0,5)$ ,  $B = (1; 0,5)$ , на момент времени  $t = 0,1$ :  $a$  —  $Courant = 0,4$ ;  $b$  —  $Courant = 20$ ; темная кривая — аналитическое решение, светлая кривая — численное решение

Относительные погрешности в трех сеточных нормах приведены в табл. 1.

Во всех расчетах устойчивость схемы не нарушалась.

Расчет данной задачи проводился также с использованием симметричных проходов. Основная суть заключается в том, что каждый счетный шаг разбивается на два этапа; сначала используются произвольно выбранные пути, затем те же пути, но в обратном порядке и в обратном направлении.

В табл. 2 приведены относительные погрешности для расчетов с использованием симметричных проходов. Из таблицы видно, что использование симметричных проходов улучшения решения не дает.

Таблица 1

Относительные погрешности при расчетах задачи 1

Число Куранта	$L_\infty$	$L_1$	$L_2$
0,4	$2,965 \cdot 10^{-3}$	$3,020 \cdot 10^{-3}$	$2,987 \cdot 10^{-3}$
4	$7,055 \cdot 10^{-3}$	$7,488 \cdot 10^{-3}$	$7,265 \cdot 10^{-3}$
20	$2,519 \cdot 10^{-2}$	$2,759 \cdot 10^{-2}$	$2,644 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2

Относительные погрешности при расчетах задачи 1 с использованием симметричных проходов

Число Куранта	$L_\infty$	$L_1$	$L_2$
20	$2,615 \cdot 10^{-2}$	$2,820 \cdot 10^{-2}$	$2,722 \cdot 10^{-2}$

**Задача 2. Плоская тепловая волна.** Задача также взята из [7]. Коэффициент теплопроводности имеет вид  $\kappa = 3T^3$ , удельная внутренняя энергия  $\varepsilon = T$ . Начальное условие  $T(x, 0) = 0$ , граничное условие  $T(t) = \sqrt[3]{t}$ . Счетная область представляет собой квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Данная

задача имеет аналитическое решение  $T(t, x) = \begin{cases} \sqrt[3]{t-x}, & x < t \\ 0, & x > t \end{cases}$ .

Все расчеты проводились до момента времени  $t = 0,8$  с разными значениями временного шага  $\tau$ . Счетная сетка состояла из 2525 ячеек Дирихле.

На рис. 6 (см. также цветную вкладку) показано распределение температур при  $t = 0,8$ ,  $\tau = 0,0001$ .

На рис. 7 изображены графики распределения температур по всем счетным ячейкам с шагами  $\tau = 0,0001$  и  $\tau = 0,00001$ . В расчете с  $\tau = 0,0001$  значение числа Куранта менялось от 0,1 до 403, в расчете с  $\tau = 0,00001$  — от 0,01 до 42.

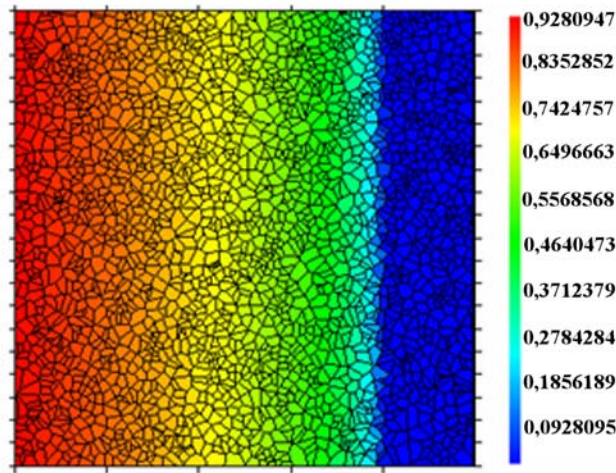


Рис. 6. Распределение температуры на момент времени  $t = 0,8$ ;  $\tau = 0,0001$

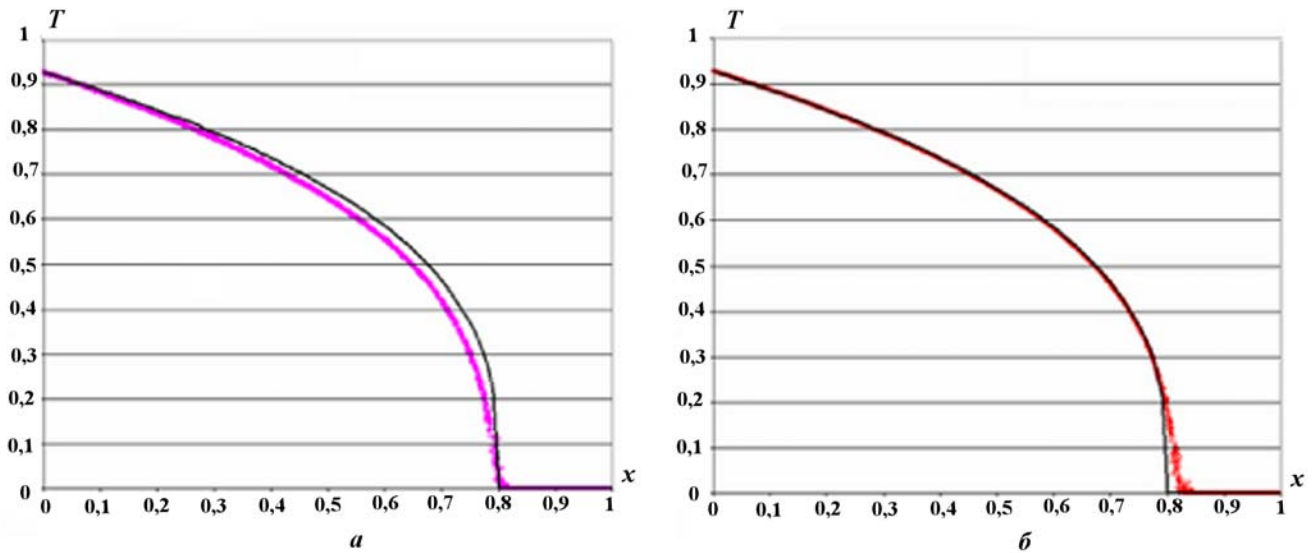


Рис. 7. Распределение температуры по ячейкам на момент времени  $t = 0,8$ :  $a - \tau = 0,0001$ ;  $b - \tau = 0,00001$ ; — — аналитическое решение;  $\circ$  — численное решение

Относительные погрешности при расчете задачи 2 приведены в табл. 3. В табл. 4 приведены относительные погрешности для расчетов с использованием симметричных проходов. Из полученных результатов видно, что использование симметричных проходов не приводит к улучшению решения.

Таблица 3

Относительные погрешности при расчетах задачи 2

$\tau$	$L_\infty$	$L_1$	$L_2$
0,0001	0,223	$3,487 \cdot 10^{-2}$	$4,606 \cdot 10^{-2}$
0,00001	0,1687	$8,986 \cdot 10^{-3}$	$2,939 \cdot 10^{-2}$

Таблица 4

Относительные погрешности при расчетах задачи 2 с использованием симметричных проходов

$\tau$	$L_\infty$	$L_1$	$L_2$
0,0001	0,231	$2,164 \cdot 10^{-2}$	$2,770 \cdot 10^{-2}$
0,00001	0,1683	$8,242 \cdot 10^{-3}$	$3,185 \cdot 10^{-2}$

**Задача 3. Остывание куба.** Рассмотрим задачу, взятую из [7]. Выберем все ребра куба единичной длины:  $0 \leq x \leq 1$ ;  $0 \leq y \leq 1$ ;  $0 \leq z \leq 1$ . В начальный момент времени температура внутри куба равна 1, а на его границе температура поддерживается равной 0, коэффициент теплопроводности равен 1, удельная внутренняя энергия  $\epsilon = T$ . Задача имеет аналитическое решение  $T(x, y, z, t) = f(x, t) f(y, t) f(z, t)$ , где  $f(x, t)$  определяется формулой (4).

Все расчеты проводились на нерегулярной сетке Дирихле  $20 \times 20 \times 20$ , центры ячеек выбирались случайным образом.

На рис. 8 (см. также цветную вкладку) изображена геометрия задачи, а также показано сечение плоскостью  $Z = 0,5$ , параллельное плоскости  $XY$ , на момент времени  $t = 0,1$  при расчете с числом Куранта, равным 10.

На рис. 9 (см. также цветную вкладку) представлены результаты распределения температуры на момент времени  $t = 0,1$ , полученные в расчетах с различными значениями числа Куранта. Относительные погрешности при расчетах задачи 3 приведены в табл. 5.

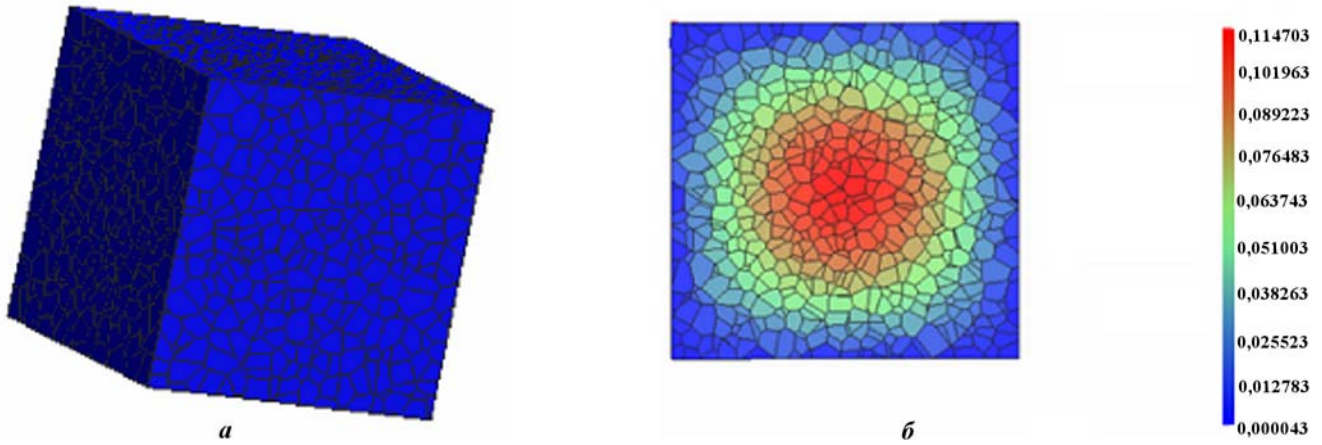


Рис. 8. Геометрия задачи (а) и сечение плоскостью  $Z = 0,5$ , параллельное плоскости  $XY$  (б), на момент времени  $t = 0,1$ ;  $Courant = 10$

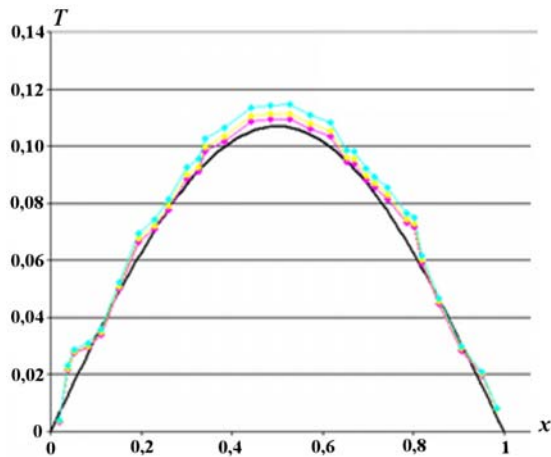


Рис. 9. Распределение температуры вдоль отрезка  $AB$ ,  $A = (0; 0,5; 0,5)$ ,  $B = (1; 0,5; 0,5)$ , на момент времени  $t = 0,1$ : — — аналитическое решение; —●— — численные решения ( $Courant = 4, 10, 20$ )

Таблица 5

Относительные погрешности при расчетах задачи 3

Число Куранта	$L_\infty$	$L_1$	$L_2$
4	$3,132 \cdot 10^{-2}$	$3,252 \cdot 10^{-2}$	$3,209 \cdot 10^{-2}$
10	$4,948 \cdot 10^{-2}$	$5,102 \cdot 10^{-2}$	$5,021 \cdot 10^{-2}$
20	$8,054 \cdot 10^{-2}$	$8,292 \cdot 10^{-2}$	$8,128 \cdot 10^{-2}$

**Задача 4. Плоская тепловая волна.** Расчетная область была взята в виде куба из предыдущей задачи, размер куба —  $20 \times 20 \times 20$ . Расчет проводился до момента времени  $t = 0,8$ .

На рис. 10 (см. также цветную вкладку) изображены счетная геометрия задачи на момент времени  $t = 0,8$  при расчете с шагом по времени  $\tau = 0,0001$ , а также сечение плоскостью  $Z = 0,5$ , параллельное плоскости  $XU$ .

На рис. 11 показаны графики распределения температуры по всем счетным ячейкам для расчетов с  $\tau = 0,0001$  и  $\tau = 0,00001$  на момент времени  $t = 0,8$ . В расчете с  $\tau = 0,0001$  значение числа Куранта менялось от 0,01 до 83, в расчете с  $\tau = 0,00001$  — от 0,001 до 8.

Относительные погрешности при расчетах задачи 4 приведены в табл. 6.

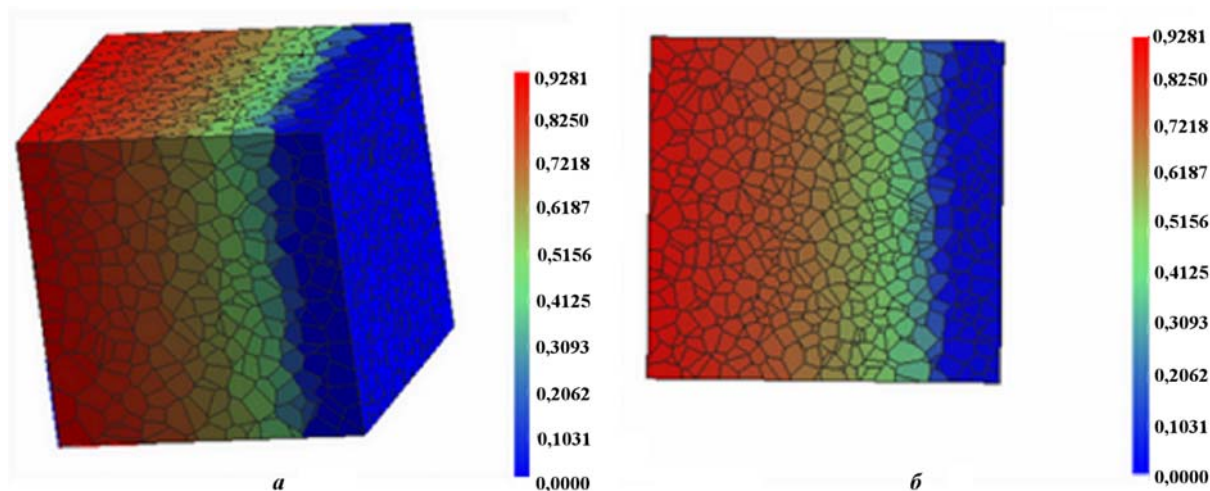


Рис. 10. Распределение температуры (а) и сечение плоскостью  $Z = 0,5$ , параллельное плоскости  $XU$  (б), на момент времени  $t = 0,8$ ;  $\tau = 0,0001$

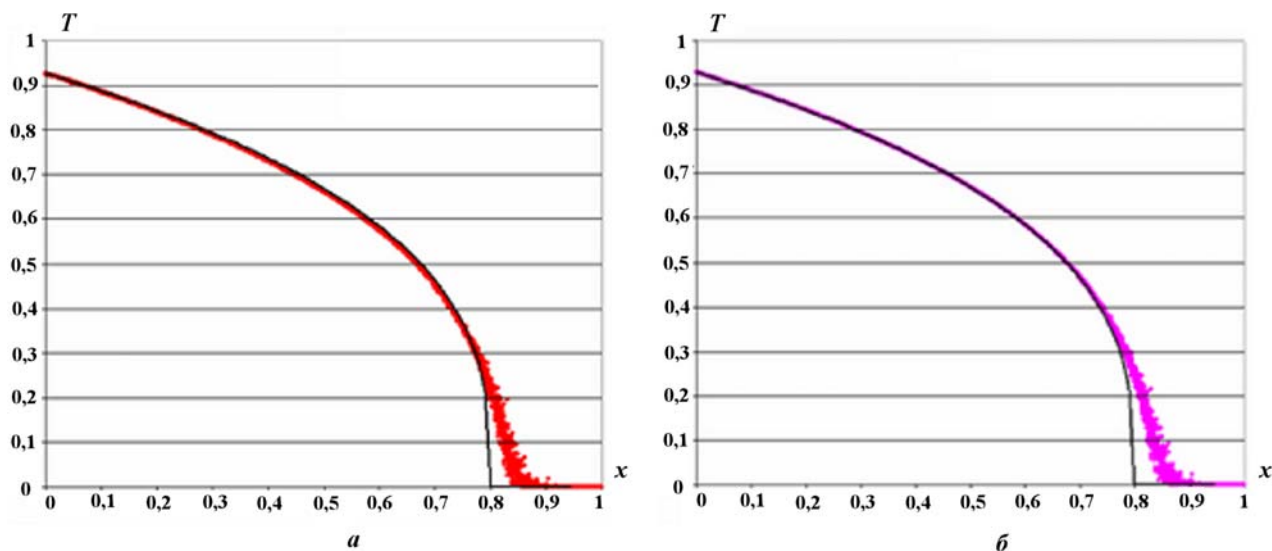


Рис. 11. Распределение температуры по всем счетным точкам на момент времени  $t = 0,8$ : а —  $\tau = 0,0001$ ; б —  $\tau = 0,00001$ ; — — аналитическое решение; о — численное решение

Таблица 6

**Относительные погрешности при расчетах задачи 4**

$\tau$	$L_\infty$	$L_1$	$L_2$
0,0001	0,2601	$2,209 \cdot 10^{-2}$	$6,210 \cdot 10^{-2}$
0,00001	0,2846	$1,998 \cdot 10^{-2}$	$5,121 \cdot 10^{-2}$



**Расчеты на сходимость.** В качестве тестовых расчетов на сходимость была выбрана задача о плоской тепловой волне (задача 2). В начальный момент времени выбирался шаг  $\tau = 0,0005$  и вводилось ограничение на число Куранта — 50. Количество счетных ячеек менялось от 1000 до 10 000.

Результаты приведены в табл. 7. Из полученных результатов видна сходимость к аналитическому решению.

Таблица 7

**Относительные погрешности в расчетах на сходимость**

Кол-во ячеек	$L_\infty$	$L_1$	$L_2$
1 000	0,1975	$1,801 \cdot 10^{-2}$	$3,475 \cdot 10^{-2}$
2 500	0,1963	$1,152 \cdot 10^{-2}$	$2,257 \cdot 10^{-2}$
5 000	0,1502	$1,124 \cdot 10^{-2}$	$1,909 \cdot 10^{-2}$
10 000	0,1588	$4,090 \cdot 10^{-3}$	$1,407 \cdot 10^{-2}$

**Заключение**

В работе дано описание метода и приведены результаты тестовых расчетов уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках Дирихле с использованием экономичной разностной схемы, предложенной и обоснованной Иваном Денисовичем Софроновым. Проведенные численные эксперименты подтвердили утверждение И. Д. Софронова о том, что данный метод является безусловно устойчивым.

Одним из достоинств метода является то, что он естественным образом обобщается с двумерного на трехмерный случай, а также то, что он годится как для линейной, так и для квазилинейной теплопроводности. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о хорошем согласии численного и аналитического решений.

**Список литературы**

1. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
2. Софронов И. Д. О численном решении уравнения теплопроводности на неортогональной сетке // Тез. кратких науч. сообщ. секции 14 Межд. конгресса математиков. М., 1966.
3. Софронов И. Д., Глаголева Ю. П., Жогов Б. М. и др. Основы методики МЕДУЗА численного расчета двумерных нестационарных задач газодинамики // Числ. методы мех. спл. среды. 1972. Т. 3, № 2. С. 18—55.
4. Софронов И. Д., Жогов Б. М., Пастернак В. М. и др. Основы организации программы для решения двумерных задач на нерегулярной треугольной сетке // Комплексы программ математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1972. С. 24—26.
5. Sofronov I. D., Rasskazova V. V., Nesterenko L. V. The use of nonregular net for solving two-dimension nonstationary problem in gas dynamics // Numerical Methods in Fluid Dynamics / Ed. N. N. Yanenko, Yu. I. Shokin. M.: Mir Publishers, 1984. P. 82—121.
6. Софронов И. Д., Урм В. Я. О решении уравнений акустики и теплопроводности методом конечных разностей на нерегулярных сетках // Комплексы программ математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1972. С. 79—86.
7. Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М.: Факториал, 1998.

Статья поступила в редакцию 30.05.09.