

УДК 533.6.011.72

ОБОБЩЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ НА СКАЧКЕ УПЛОТНЕНИЯ

А. Л. Адрианов
(СибГАУ им. академика М. Ф. Решетнева,
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск)

Дается вывод обобщенных дифференциальных соотношений на криволинейном скачке уплотнения в неравномерном потоке вязкого теплопроводного совершенного газа. *Вязкие* слагаемые при этом учтены в приближении сдвигового слоя с асимптотическим порядком $O(1)$. В процессе вывода соотношений применяется система символьных преобразований на ЭВМ. Окончательно соотношения записаны в матричной форме с малым параметром при старших производных и нелинейных членах. Коэффициенты соотношений в силу их громоздкости не приводятся. В предельном невязком случае обобщенные дифференциальные соотношения тождественно совпадают с известным результатом.

Ключевые слова: криволинейный скачок уплотнения (СУ), вязкий теплопроводный совершенный газ, сдвиговой слой, схематизация скачка поверхностью сильного газодинамического разрыва, система аналитических символьных преобразований на ЭВМ, обобщенные дифференциальные соотношения (условия) на криволинейном СУ, асимптотический подход, малый параметр, предельный невязкий случай, краевой эффект, дополнительная дифференциальная связь, вихревая модель взаимодействия, аналитическое решение.

Введение

Дифференциальные соотношения (ДС), выполняющиеся на фронте криволинейного скачка уплотнения (СУ), рассматриваются в работах [1–9], причем в [2, 3] для модели идеального совершенного газа соотношения получены в наиболее общей и удобной при решении практических задач форме. Приближенные ДС с исключенным краевым эффектом за СУ получены в [6]. Применительно к нестационарным газодинамическим течениям ДС на двигающейся с ускорением криволинейной ударной волне получены в [4].

В настоящей работе, являющейся продолжением исследований [5–9], дается вывод асимптотических ДС, выполняющихся на фронте криволинейного СУ проникающего в высокоградиентный вихревой поток вязкого теплопроводного совершенного газа. Для придания *вязким* слагаемым ранговых отношений с последующей выбраковкой асимптотически малых членов делается дополнительное предположение относительно структуры газодинамического течения: это сдвиговой слой (СС), пересекаемый фронтом СУ.

Основные допущения

Приведем допущения, используемые в настоящей работе на этапе постановки задачи, в математических выкладках и в ходе вычислений:

Д1. Газ считается совершенным, а сдвиговое течение (по обе стороны СУ) — двумерным (плоская или осевая симметрия) стационарным сверхзвуковым ламинарным при больших ($> 10^3$) числах Рейнольдса.

Д2. СУ схематизируется поверхностью *сильного газодинамического разрыва*.

Д3. Справедливо *погранслоиное* соотношение масштабов производных в областях гладкости (вне СУ (Д2)) сдвигового течения.

Из перечисленных допущений в некотором обосновании нуждаются лишь два последних.

С одной стороны, известно [10, 11], что внутренняя структура *сильного СУ* не может быть достоверно воспроизведена даже в рамках полных уравнений Навье—Стокса¹ (УНС). Кроме того, при численном моделировании ударно-волновых течений с использованием *методов сквозного счета* (например, [12—16]) всегда присутствует повышенная локальная ошибка аппроксимации в окрестности скачка, а главное, не используется естественная гладкость фронта СУ в касательном направлении. С другой стороны, применение высокоточного *метода выделения разрывов* [17, 18, 12, 3] для моделирования течений вязкого теплопроводного газа, несмотря на имеющийся отдельный опыт [13—16, 19, 20, 7—9], не является общепринятым.

Следует отдельно упомянуть важную для настоящих исследований работу аналитического характера [19], где СУ в задаче обтекания равномерным потоком вязкого теплопроводного газа тела малого радиуса (число Рейнольдса, как пишут авторы [19], снижалось даже до 15) схематизирован² поверхностью *сильного газодинамического разрыва*. Аналитическое решение в данной задаче ищется исключительно в центральной точке за прямым криволинейным СУ; при этом используются как симметрия течения, так и специфичное для данной задачи сильное допущение: "изменение по координатам величин вязких напряжений и потока тепла считается малым в сравнении с самими этими величинами". Очевидно, что в случае, рассматриваемом в настоящей работе, где в качестве натекающего неравномерного потока берется высокоградиентный вихревой СС, последнее допущение оказывается неприемлемым. С другой стороны, в произвольном СС отсутствует и какая-либо дополнительная (к плоской или осевой симметрии) симметрия течения.

В пользу Д3 можно сказать следующее. Например, из работы [21] (см. также приведенную в ней обширную библиографию) следует, что уравнения типа уравнений пограничного слоя (УПС) могут применяться как вблизи точки отрыва, так и для расчета некоторых отрывных течений. В [21] получено хорошее согласие решений по данным уравнениям с решениями на основе полных УНС и с результатами физического эксперимента. Следовательно, погранслоиные оценки величин (например, [22]) продолжают быть справедливыми и в случае возмущенной задачи, что, в частности, доказывает обоснованность Д3. Более того, в настоящей работе используются более общие, чем УПС, уравнения для описания движения в областях гладкости (вне СУ Д2) сдвигового течения.

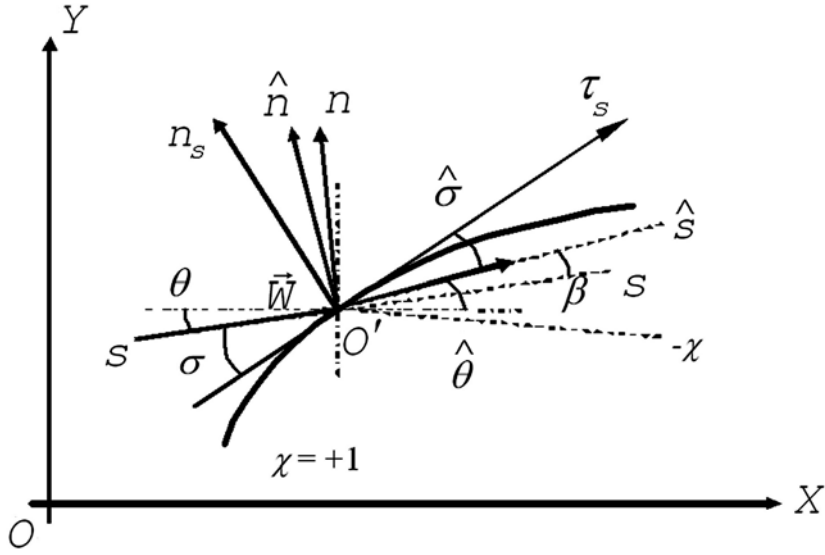
В результате автором получены общие ДС, выполняющиеся на криволинейном СУ в неравномерном потоке вязкого теплопроводного совершенного газа [5, 7], связывающие производные от газодинамических величин по обе стороны СУ с его кривизной. В отличие от своего "невязкого предшественника" [1—3, 6] данные соотношения являются приближенными асимптотическими выражениями при $Re_\infty \rightarrow \infty$ (точнее, при $(Re_\infty)^{-1} \rightarrow 0$), поскольку при их выводе для ограничения числа вязких слагаемых удерживаются лишь члены с асимптотическим порядком малости $O(1)$ (см. Д3). В случае $(Re_\infty)^{-1} \equiv 0$ полученные в настоящей работе ДС тождественно совпадают с полученными в [2, 3].

Вывод соотношений

Рассмотрим сверхзвуковое движение вязкого теплопроводного газа при больших (Д1) числах Re_∞ с образованием в поле течения СУ и СС. Известно (например, [14]), что толщины этих образований после соответствующего обезразмеривания величин имеют разный асимптотический масштаб при $Re_\infty \rightarrow \infty$, а именно: толщина СС $\delta_\tau \sim \varepsilon = (Re_\infty)^{1/2}$ — *малый параметр*, толщина СУ $\delta_s \sim \varepsilon^2$ — обратное число Рейнольдса. Таким образом, в задаче присутствуют три линейно независимых масштаба: 1, ε , ε^2 , причем $1 \gg \varepsilon \gg \varepsilon^2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (единица соответствует характерному размеру L

¹Другое, возможно, более правильное название этих уравнений — уравнения вязкого теплопроводного сжимаемого газа.

²Собственно термин *схематизация* заимствован из указанной работы.



Собственные системы координат, связанные со скачком уплотнения и линией тока

задачи). Учитывая данную "вилку" масштабов, исключим наименьший из них, схематизировав СУ математической поверхностью (Д2). Получим соотношения, выполняющиеся на данной поверхности.

Рассматривая стационарный физический процесс прохождения газа через СУ в плоскости $\vec{W}O'\vec{n}_s$ (\vec{n}_s — нормаль к СУ в текущей точке O' , \vec{W} — вектор скорости набегающего потока в той же точке; см. рисунок), введем для скачка (см., например, [20, 14]) внутренние *растянутые* ортогональные координаты $n_{so} = n_s/\delta_s$, $\tau_{so} = \tau_s/R_s$. Здесь δ_s — характерный масштаб длины (толщины) СУ в нормальном направлении (в направлении быстрого изменения газодинамических функций); τ_s — координата в касательном направлении $\vec{\tau}_s$; R_s — радиус кривизны СУ ($R_s \sim 1$ или $R_s \sim \delta\tau$). Переходя в стационарных УНС, переписанных в переменных τ_{so} , n_{so} , к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая лишь главные члены в разложении по $\zeta = \delta_s/R_s$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V)}{\partial n_{so}} = 0; \quad & \frac{\partial}{\partial n_{so}} \left(\rho V U - \frac{\mu}{\delta_s} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial n_{so}} + \zeta \frac{\partial V}{\partial \tau_{so}} \right) - t\zeta \frac{2}{3} \frac{\partial V}{\partial \tau_{so}} \right] \right) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial n_{so}} \left(\rho V^2 + p - \frac{\mu}{\delta_s} \left[\frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial V}{\partial n_{so}} - \zeta \frac{\partial U}{\partial \tau_{so}} \right) + t\zeta \frac{\partial U}{\partial \tau_{so}} \right] \right) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial n_{so}} \left(\rho V H - \frac{\mu}{\delta_s} \left[U \left(\frac{\partial U}{\partial n_{so}} + \zeta \frac{\partial V}{\partial \tau_{so}} \right) + V \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial V}{\partial n_{so}} - \zeta \frac{\partial U}{\partial \tau_{so}} \right) + \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial n_{so}} - \right. \right. \\ \left. \left. - t\zeta \left(U \frac{2}{3} \frac{\partial V}{\partial \tau_{so}} - V \frac{\partial U}{\partial \tau_{so}} \right) \right] \right) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь U и V — проекции скорости \vec{W} соответственно в направлениях $\vec{\tau}_s$ и \vec{n}_s , $W^2 = U^2 + V^2$; ρ — плотность; p — давление; H — полная энтальпия, $H = h + W^2/2$, где $h = \frac{\gamma}{(\gamma-1)\rho} p$; γ — показатель изэнтропы, $\gamma = c_p/c_v$; λ — коэффициент теплопроводности, $\lambda/c_p = \mu/\text{Pr}$ (Pr — число Прандтля); t — "выключатель" ($t = 0; 1$; $t^2 = t$), учитывающий при $t = 1$ часть вязких напряжений, остающихся от дифференцирования потоков основных величин в направлении $\vec{\tau}_s$ в исходных УНС. В дальнейшем для упрощения записи положим $t = 0$, тогда в (1) и следующих из (1) интегральных соотношениях останутся те же вязкие компоненты, что и в [23]. Например, в соотношениях, приведенных в [20], производные в направлении $\vec{\tau}_s$ вообще исключены.

Примем степенной закон вязкости: $\mu/\mu_\infty = (h/h_\infty)^\omega$, $1/2 \leq \omega \leq 1$.

В отличие от математических исследований Беккера [24] (см. также [25]) в настоящей работе внутренняя структура СУ представляет второстепенный интерес, поэтому, проинтегрировав (1), вернемся к прежним координатам τ_s, n_s . Проведя обезразмеривание величин

$$\begin{aligned} \bar{n}_s &= \frac{n_s}{L}; & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_\infty}; & \bar{W} &= \frac{W}{W_\infty}; & \bar{h} &= \frac{h}{W_\infty^2}; \\ \bar{T} &= \frac{c_p T}{W_\infty^2} = \bar{h}; & \bar{p} &= \frac{p}{\rho_\infty W_\infty^2} = \bar{\rho} \bar{T}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; & \bar{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{\bar{h}}{\bar{h}_\infty} \right)^\omega \end{aligned}$$

(T — абсолютная температура), первые интегралы (1) представим в виде следующих предельных соотношений:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \hat{V} &= \rho V = M; \\ \hat{\rho} \hat{V} \hat{U} - \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}_\infty} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial n_s} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau_s} \right) &= \rho V U - \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left(\frac{\partial U}{\partial n_s} + \frac{\partial V}{\partial \tau_s} \right) = I_\tau; \\ \hat{\rho} \hat{V}^2 + \hat{p} - \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}_\infty} \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial \hat{V}}{\partial n_s} - \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau_s} \right) &= \rho V^2 + p - \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial V}{\partial n_s} - \frac{\partial U}{\partial \tau_s} \right) = I_n; \\ \hat{\rho} \hat{V} \hat{H} - \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}_\infty} \left[\hat{U} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial n_s} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau_s} \right) + \hat{V} \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial \hat{V}}{\partial n_s} - \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau_s} \right) + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial n_s} \right) \right] &= \\ = \rho V H - \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left[U \left(\frac{\partial U}{\partial n_s} + \frac{\partial V}{\partial \tau_s} \right) + V \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial V}{\partial n_s} - \frac{\partial U}{\partial \tau_s} \right) + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial h}{\partial n_s} \right) \right] &= E. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем черта в обозначении безразмерных величин опущена, а надстрочным символом " $\hat{}$ " помечены газодинамические величины за СУ.

Ограничиваясь двумерностью (плоской или осевой симметрией) внешнего течения, перейдем локально в естественную систему координат (s, n) , связанную с линией тока и нормалью к ней (см. рисунок). С учетом того, что каждое из направлений \vec{s}, \vec{n} терпит разрыв при переходе через СУ (Д2), компоненты скоростей и производные от них для вязких членов в (2) в новой системе координат записываются следующим образом (в качестве примера только в полуобласти за СУ):

$$\begin{aligned} \hat{V} &= -\hat{W} \sin \hat{\sigma}; & \hat{U} &= \hat{W} \cos \hat{\sigma}; & \hat{\sigma} &= \Omega - \hat{\theta}; & \Omega &= \Omega(\tau_s); & K_w &= \frac{d\Omega}{d\tau_s}; \\ \frac{d\hat{V}}{dn_s} &= - \left[\frac{d\hat{W}}{dn_s} \sin \hat{\sigma} + \hat{U} \left(-\frac{d\hat{\theta}}{dn_s} \right) \right]; & \frac{d\hat{U}}{dn_s} &= \frac{d\hat{W}}{dn_s} \cos \hat{\sigma} + \hat{V} \left(-\frac{d\hat{\theta}}{dn_s} \right); \\ \frac{d\hat{V}}{d\tau_s} &= - \left[\frac{d\hat{W}}{d\tau_s} \sin \hat{\sigma} + \hat{U} \left(K_w - \frac{d\hat{\theta}}{d\tau_s} \right) \right]; & \frac{d\hat{U}}{d\tau_s} &= \frac{d\hat{W}}{d\tau_s} \cos \hat{\sigma} + \hat{V} \left(K_w - \frac{d\hat{\theta}}{d\tau_s} \right); \\ \frac{d\hat{\Phi}}{dn_s} &= \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{n}} \cos \hat{\sigma} - \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{s}} \sin \hat{\sigma}, & \frac{d\hat{\Phi}}{d\tau_s} &= \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{n}} \sin \hat{\sigma} + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{s}} \cos \hat{\sigma}, & \hat{\Phi} &= \{ \hat{W}, \hat{\theta} \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Компоненты скоростей V, U и производные от них до СУ записываются аналогично. В формулах (3) использованы следующие обозначения (см. рисунок): W — модуль скорости; σ — острый угол между \vec{W} и СУ (между \vec{s} и $\vec{\tau}_s$); $\hat{\sigma}$ — аналогичный угол за СУ (между \vec{s} и $\vec{\tau}_s$), $\hat{\sigma} = \sigma - \beta$, $\beta = \hat{\theta} - \theta$, где β — угол преломления вектора скорости на СУ, а θ и $\hat{\theta}$ — углы наклона соответствующих линий тока к оси OX декартовой системы координат XOY ; K_w — продольная кривизна СУ (в отличие от радиальной кривизны $1/y$ в осесимметричном случае). Ось OX либо является осью симметрии, либо лежит в плоскости симметрии течения. $\chi = \text{sign}(\sigma)$ (см. рисунок) определяет семейство, к которому принадлежит тот или иной СУ (характеристика) в предельном невязком стационарном случае, когда уравнения движения имеют гиперболический тип: $\chi = +1$ для основного СУ, $\chi = -1$ для отраженной характеристики противоположного семейства за СУ.

Соотношения (2) с учетом (3) для полуобласти за СУ запишутся так:

$$\begin{aligned} M &= \hat{\rho}\hat{V} = \rho V; & I_\tau &= M\hat{U} - \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}_\infty} \left(\frac{d\hat{U}}{dn_s} + \frac{d\hat{V}}{d\tau_s} \right); \\ I_n &= M\hat{V} + \hat{p} - \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}_\infty} \frac{2}{3} \left(2\frac{d\hat{V}}{dn_s} - \frac{d\hat{U}}{d\tau_s} \right); & \hat{\rho} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\hat{p}}{\hat{h}}; \\ E &= M \left(\hat{h} - \frac{\widehat{W}^2}{2} + \frac{I_n - \hat{p}}{\hat{\rho}} \right) + I_\tau \hat{U} - \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}_\infty} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{d\hat{h}}{dn_s}. \end{aligned} \quad (4)$$

При выводе соотношений (2)–(4) не оговаривался асимптотический порядок входящих в них производных, т. е. фактически структура течения до СУ и за ним. Учитывая, что в качестве невозмущенного течения рассматривается СС, проанализируем (4) с помощью погранслоевых оценок величин ДЗ с учетом разрыва последних на СУ:

$$\begin{aligned} W, h, \widehat{W}, \hat{h}, \hat{\theta}, \frac{\partial \theta}{\partial n}, \frac{\partial W}{\partial s} &\sim 1; & \theta &\sim \varepsilon, & \varepsilon &= \text{Re}_\infty^{-1/2} \text{ — малый параметр;} \\ \frac{\partial W}{\partial n}, \frac{\partial h}{\partial n}, \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2}, \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{n}}, \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{n}} &\sim \frac{1}{\varepsilon}; & \frac{\partial^2 W}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{n}^2}, \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial \hat{n}^2} &\sim \frac{1}{\varepsilon^2} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим лишь, что для симметризации оценок (5) относительно сторон СУ малостью величины θ удобно не пользоваться.

С учетом (5) видно, что соотношения (3), (4) содержат дифференциальные члены, имеющие порядок малости $O(\varepsilon)$ и $O(\varepsilon^2)$ при $\text{Re}_\infty \rightarrow \infty$, приближенно учитывающие вязкость и теплопроводность среды (слагаемые с множителем $\hat{\mu}/\text{Re}_\infty$, $\hat{\mu} \sim 1$). При отбрасывании их из (4) получаются обычные условия на косом СУ, и, следовательно, полные³ соотношения (4) могут рассматриваться как обобщенные соотношения нулевого порядка. Например, в дифференциальных УПС удерживаются лишь члены порядка малости $O(1)$ [1, 22, 14, 16].

Продифференцируем массу M , тангенциальную I_τ и нормальную I_n компоненты импульса, энергию E в полных соотношениях (4) вдоль СУ $w \equiv \tau_s$ с помощью следующих операторов (в качестве примера только за СУ):

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\Phi}}{dw} &= \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{s}} \cos \hat{\sigma} + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{n}} \sin \hat{\sigma}, & \hat{\Phi} &= \{\widehat{W}, \hat{\theta}, \hat{p}, \hat{h}\}, & \hat{\Phi} &\neq \hat{\sigma}; \\ \frac{d\hat{\sigma}}{dw} &= K_w - \left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{s}} \cos \hat{\sigma} + \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{n}} \sin \hat{\sigma} \right), & K_w &= \frac{d\Omega}{dw}, & \Omega &= \theta + \sigma \equiv \hat{\theta} + \hat{\sigma}. \end{aligned}$$

Для исключения производных по направлениям \hat{s} и s из продифференцированных соотношений (4) используем параболизованные УНС (ПУНС), записанные для вектора зависимых переменных $\Phi = (W, \theta, p, h)^T$ в (s, n) -координатах (в качестве примера — за СУ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(\hat{\rho}\widehat{W})}{\partial \hat{s}} &= -\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{n}} - \frac{\delta}{y} \sin \hat{\theta}, & \hat{\rho} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\hat{p}}{\hat{h}}; \\ \hat{\rho}\widehat{W} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \hat{s}} &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{s}} + \frac{1}{\text{Re}_\infty y^\delta} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left(y^\delta \hat{\mu} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \hat{n}} \right); \\ \hat{\rho}\widehat{W}^2 \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{s}} &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{n}} + \frac{1}{\text{Re}_\infty y^\delta} \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left(y^\delta \hat{\mu} \widehat{W} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{n}} \right); \\ \hat{\rho}\widehat{W} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{s}} &= \widehat{W} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{s}} + \frac{1}{\text{Re}_\infty y^\delta} \left[\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \left(y^\delta \hat{\mu} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{n}} \right) + y^\delta \hat{\mu} \left(\frac{\partial \widehat{W}}{\partial \hat{n}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

³Без отбрасывания каких-либо членов.

Здесь $\delta = 0$ соответствует плоскому, $\delta = 1$ — осесимметричному случаю течения. Подразумевается, что под (6) "скрывается" и аналогичная система ПУНС до СУ, при этом УПС, адекватные течению перед скачком, получаются из ПУНС упрощением радиального уравнения импульсов до равенства $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$. При отбрасывании из того же уравнения лишь вязкого члена получим так называемые *уравнения вязкого ударного слоя* (УВУС) (например, [14]). Известно, что отличительной чертой УВУС является удобство сопряжения вязких и невязких участков течения. В ряде случаев, когда требуется оттенить действие фактора вязкости-теплопроводности исключительно в механизме ударного перехода, имеет смысл вместо УВУС использовать более простые уравнения Эйлера. Отметим, что выбранная локальная система координат (s, n) наиболее подходяща не только для записи невязких ДС [1—3], но и для записи упрощенных уравнений типа ПУНС (6) (например, [26]).

Выразив из (6) вектор $\Phi_{\hat{s}} = \left(\widehat{W}_{\hat{s}}, \widehat{\theta}_{\hat{s}}, \widehat{p}_{\hat{s}}, \widehat{h}_{\hat{s}} \right)^T$ и подставив его в продифференцированные вдоль фронта обобщенные соотношения (4), получим для полуобласти за СУ выражения, не содержащие производных по \hat{s} . Аналогичная процедура выполняется и для полуобласти до СУ. Как уже отмечалось, в ходе выполнения всех подстановок среди вязких слагаемых согласно (5) в ДС удерживаются лишь члены порядка $O(1)$ — слагаемые, содержащие нормальные производные выше второго порядка, будут аннулированы. Важно, что невязкие слагаемые при этом остаются без каких-либо изменений независимо от их асимптотического масштаба.

Полученный таким путем окончательный математический объект определим как *обобщенные ДС на СУ* в вязком теплопроводном газе в приближении СС (ОДСС), которые, в отличие от (4), следует рассматривать как *обобщенные соотношения первого порядка*. ОДСС связывают нормальные (к линиям тока) производные первого-второго порядка от газодинамических величин по обе стороны СУ с его кривизной K_w . В предельном невязком случае в ОДСС фигурируют лишь первые производные. В общем случае первые производные от газодинамических величин входят в ОДСС уже нелинейно.

Несмотря на применение указанных выше асимптотических упрощений, ОДСС представляют собой конечные, но некомпактные математические выражения, в связи с чем в процессе их вывода должна применяться та или иная *система аналитических преобразований* на ЭВМ (REDUCE, "Maple" и т. п.). Более того, практический опыт работы с подобного рода системами показывает, что разумные с точки зрения количества слагаемых математические уравнения и якобиан к ним удается получить лишь для фиксированных значений газодинамических констант, например для $\gamma = 7/5$, $\omega = 1$, $\text{Pr} = 1$.

Ограничимся одной из возможных удобных форм записи ОДСС в виде системы уравнений (коэффициенты в силу их громоздкости не приводятся):

$$a_{ij} \left(\widehat{\Phi}_j \right)_{\hat{n}} + b_i K_w + c_{ij} (\Phi_j)_n + d_i \frac{\delta}{y} + \varepsilon^2 \left[e_{ij} \left(\widehat{\Phi}_j \right)_{\hat{n}\hat{n}} + f_i K'_w + g_{ij} (\Phi_j)_{nn} + N_i \right] = 0, \quad (7)$$

$$\Phi = (W, \theta, p, h)^T; \quad i, j = 1, \dots, 4,$$

где

$$\delta = 0 \ (\delta = 1); \quad \varepsilon^2 = (\text{Re}_\infty)^{-1}; \quad N_i = N_i \left(\left(\widehat{\Phi}_j \right)_{\hat{n}}, (\Phi_j)_n, \widehat{\Phi}_j, \Phi_j, K_w \right).$$

В (7) применено суммирование по повторяющемуся индексу j ; величина $K'_w = \frac{d^2 \Omega}{dw^2}$ представляет собой производную от кривизны СУ; вектор \mathbf{N} явно объединяет все нелинейные слагаемые (произведения младших производных и кривизны). Функциональные матрицы (векторы) коэффициентов A, \dots, G (в дальнейшем просто коэффициенты) сложным образом зависят от газодинамических величин по обе стороны СУ.

Важно, что в невязком случае ($\varepsilon^2 = 0$ в (4) и (7)) коэффициенты A, \dots, D в (7) после соответствующих допустимых преобразований в точности приводятся к аналогичным коэффициентам, полученным в [2, 3], где использована другая (удобная для невязкого случая) группа зависимых переменных. Таким образом, в частном случае конечный результат приведенного в настоящей работе вывода в точности совпадает с известным ранее результатом.

Анализ соотношений

Проанализируем ОДСС (7) с точки зрения их практического использования, полагая, что коэффициенты A, \dots, G на данный момент (в данной точке СУ) уже вычислены и газодинамические параметры по обе стороны СУ удовлетворяют либо обычным, либо обобщенным соотношениям нулевого порядка (4). Газодинамический процесс в касательном к СУ направлении считается гладким. Тогда система четырех ($i = 1, \dots, 4$) уравнений (7) содержит 10 неизвестных величин: 8 нормальных производных первого-второго порядка от газодинамических величин за СУ, его кривизну и производную от нее. Производные от тех же величин в невозмущенном СС (до СУ) полагаются известными: гладкое распределение газодинамических параметров поперек невозмущенного СС может иметь либо аналитическое представление, либо подходящую параметризацию⁴.

Для замыкания (7) необходимо задать какую-либо из производных за СУ или их комбинацию. В частности, в качестве таковой может быть использована дополнительная дифференциальная связь [27], исключающая краевой эффект за СУ [6]. В этом случае система (7) становится однозначно разрешимой относительно производных за СУ в любой его расчетной точке и может быть численно проинтегрирована вдоль его фронта [6–9]. При этом важно, что соотношения нулевого порядка на СУ (в частности, обычные соотношения на косом скачке) в любой его расчетной точке будут выполняться автоматически (!) и поэтому могут привлекаться в ходе расчета, например, с целью дополнительного поточечного контроля точности вычислений.

Заметим, что указанная выше громоздкость коэффициентов ОДСС (7), не позволившая в рамках настоящей работы записать их в явном виде, не является препятствием к практическому применению ОДСС: после замыкания (7) полученная система рабочих уравнений, выполняющихся вдоль СУ, и якобиан к ней легко компилируются в Fortran-среде.

В частном случае $\varepsilon^2 = 0$ системы (4), (7) разрешаются аналитически в явном виде, так что получаются известные в литературе (например, [1–3]) математические формулы. Их использование при численном моделировании в процессе построения обобщенного решения дифференциальной задачи [28, 29, 3] может рассматриваться как альтернатива известному численному методу характеристик (например, [30]) и позволяет проводить выделение множества поверхностей разрыва на несогласованной с ними (произвольной) разностной сетке. Схожие частные вычислительные процедуры на СУ, объединенные с теми или иными конечно-разностными алгоритмами, описаны также в [31].

В общем случае ($\varepsilon^2 \neq 0$) важно помнить, что вязкие слагаемые в (7) возникли по двум независимым причинам: а) из-за учета фактора вязкости-теплопроводности в первообразных соотношениях на СУ (4); б) из-за учета данного фактора в дифференциальных уравнениях в гладкой окрестности СУ (6). Следовательно, при математическом моделировании ударных процессов на основе ОДСС (7) для выявления вклада указанных отдельных вязких компонентов целесообразно рассматривать как совместное, так и раздельное их влияние на конечный результат вычислений.

Заключение

Существенно, что полученные в настоящей работе ОДСС (см. также [5, 7]) позволяют построить новую стационарную *вязкую модель* взаимодействия скачка и СС [7–9], обобщающую и улучшающую *вихревые модели* [6, 32]. Например, в [6], построенной на основе *невязких* ДС, число Рейнольдса фигурирует неявно как внешний параметр, определяющий поперечные масштабы СС (в частности, тепловой) и компоненту скорости невозмущенного течения. В вязкой модели [7–9] на основе ОДСС наряду с таким входением фактор вязкости-теплопроводности присутствует явно и поэтому частично, а в ряде случаев значительно, определяет структуру возмущенного течения. Вычислительный эксперимент показывает, что при определенных параметрах течения неучет или учет данного фактора в явном виде при расчете возмущенного течения в слое приводит к двум значительно различающимся математическим решениям задачи.

Автор глубоко благодарен профессору И. Д. Софронову за обсуждение вычислительных аспектов данной работы в период ее становления, а также выражает благодарность профессору В. К. Андрееву за внимание к работе и ценные замечания и профессору В. Н. Ускову за приобщение автора к

⁴Например, с помощью кусочно-кубического сплайна.

ударно-волновой тематике в период обучения в институте и аспирантуре, постоянное внимание к проводимым исследованиям и научное руководство.

Список литературы

1. *Бай Ши-и*. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Усков В. Н.* Интерференция стационарных газодинамических разрывов // Сверхзвуковые газовые струи. Новосибирск: Наука, 1983. С. 22—46.
3. *Адрианов А. Л., Старых А. Л., Усков В. Н.* Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995.
4. *Русанов В. В.* Производные газодинамических функций за искривленной ударной волной: Препринт № 18. М.: АН СССР / ИПМ им. М. В. Келдыша, 1973.
5. *Адрианов А. Л.* Дифференциальные соотношения на скачке уплотнения в вязком газе при больших числах Рейнольдса // Тр. семинара "Мат. моделирование в механике" ВЦК СО РАН. Красноярск, 1996.
6. *Адрианов А. Л.* О модельной кривизне скачка уплотнения в неравномерном потоке // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 6. С. 3—14.
7. *Адрианов А. Л.* Асимптотическая модель взаимодействия скачка со сдвиговым слоем // Вестник Сиб. гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М. Ф. Решетнева. 2002. Вып. 3. С. 22—34.
8. *Адрианов А. Л.* Выделение разрывов в двумерных течениях невязкого и вязкого теплопроводного газа // Там же. 2005. Вып. 7. С. 11—17.
9. *Адрианов А. Л.* Другой подход к математическому моделированию течений вязкого теплопроводного газа с ударными волнами // Наука и технологии. Том 1. Труды XXVI Российской школы. М.: РАН, 2006. С. 108—122.
10. *Гриффитс У.* Ударные волны // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы / Под ред. Дж. Бэтчелора и Г. Моффата. М.: Мир, 1984.
11. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
12. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
13. *Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984.
14. *Тимошенко В. И.* Сверхзвуковые течения вязкого газа. Киев: Наук. думка, 1987.
15. *Карлин В. А., Русанов В. В., Теряев С. Е.* Метод установления для численного решения задачи о пространственном сверхзвуковом обтекании затупленных тел вязким теплопроводным газом: Препринт № 20. М.: АН СССР / ИПМ им. М. В. Келдыша, 1988.
16. *Ковеня В. М., Тарнавский Г. А., Черный С. Г.* Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990.
17. *Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В.* Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М.: Наука, 1964.
18. *Алалыкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Л., Плинер Л. А.* Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1970.
19. *Седов Л. И., Михайлова М. П., Черный Г. Г.* Влияние вязкости и теплопроводности на течение за сильно искривленной ударной волной // Вестник МГУ. Механика. 1953. № 3. С. 95—100.
20. *Толстых А. И.* О структуре криволинейной ударной волны // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 553—556.

21. Уэрл М., Ватса В. Новый метод расчета отрыва сверхзвуковых пограничных слоев // Ракетная техника и космонавтика. 1974. Т. 12, № 11. С. 45—53.
22. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1994.
23. Седов Л. И. Плоские задачи гидромеханики. М.: Гостехтеоретиздат, 1950.
24. Becker R. Stosswelle und detonation // Z. Phys. 8 (1921—1922). S. 321—362.
25. Рождественский В. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
26. Черный С. Г. О выборе системы координат для численного решения упрощенных уравнений Навье—Стокса маршевым методом // Числ. методы мех. спл. среды. 1982. Т. 13, № 1. С. 132—146.
27. Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
28. Адрианов А. Л. Выделение множества разрывов на несогласованной сетке в двумерных стационарных сверхзвуковых течениях // Моделирование в механике. Сер. Струйные течения. 1988. Т. 2 (19), № 6. С. 3—9.
29. Адрианов А. Л. Некоторые особенности численного моделирования разрывных газодинамических течений на комбинированной нерегулярной сетке // Там же. 1990. Т. 4 (21), № 5. С. 3—14.
30. Жуков А. И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1960. Т. 58. С. 5—149.
31. Abbet M. J. Boundary condition calculation procedures for inviscid supersonic flow fields // Proc. AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Palm Springs, California, 1973. P. 153—173.
32. Усков В. Н., Цымбалова Е. Н. Скачки уплотнения в течении со сдвигом // Специальные вопросы аэрогазодинамики летательных аппаратов: межвуз. сб. 1974. Вып. 173. С. 104—111.

Статья поступила в редакцию 28.11.08.
