

УДК 621.039.586

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

М. В. Кащеев
(ГНЦ РФ-ФЭИ, г. Обнинск)

Методом конечных интегральных преобразований решена задача нестационарной теплопроводности ограниченного цилиндра с непрерывно действующими источниками тепла, помещенного в среду с переменной во времени температурой, с граничными условиями третьего рода на трех границах.

Ключевые слова: задача теплопроводности, цилиндрический стержень, внутренние источники тепла, метод конечных интегральных преобразований, дифференциальный оператор, характеристическое уравнение, ядро преобразования, граница, окружающая среда.

Рассмотрим задачу об остывании однородного цилиндрического стержня с круглым сечением радиусом R и длиной l , помещенного в среду с температурой $\hat{T}_c(t)$. На границах стержня происходит теплообмен по закону Ньютона. В цилиндре действуют источники тепла, зависящие от времени. Если вести отсчет температуры от *ложного нуля* $\hat{T}_c(t)$, т. е. $T = \hat{T} - \hat{T}_c$, то в системе координат (r, z) математическую постановку задачи можно записать в следующем виде:

– дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_V(t)}{\lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{T}_c(t)}{\partial t}, \quad 0 < r < R, \quad 0 < z < l, \quad 0 < t < \infty; \quad (1)$$

– начальное условие

$$T(r, z, 0) = T^0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < z < l; \quad (2)$$

– граничные условия

$$\frac{\partial T(0, z, t)}{\partial r} = 0, \quad 0 < z < l, \quad 0 < t < \infty; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(R, z, t)}{\partial r} + h_1 T(R, z, t) = 0, \quad 0 < z < l, \quad 0 < t < \infty; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(r, 0, t)}{\partial z} - h_2 T(r, 0, t) = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < t < \infty; \quad (5)$$

$$\frac{\partial T(r, l, t)}{\partial z} + h_3 T(r, l, t) = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < t < \infty. \quad (6)$$

Здесь r, z [м] — поперечная и продольная координаты соответственно; t [с] — время; T, T^0 [К] — текущая и начальная температура; a [$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$] — коэффициент температуропроводности; q_V [$\text{Вт}/\text{м}^3$] — мощность источников тепла; λ [$\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$] — коэффициент теплопроводности; $h_i = \alpha_i/\lambda$ [м^{-1}], α_i [$\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$] — коэффициент теплоотдачи, $i = 1, 2, 3$.

Если ввести масштабы: T_M — для температуры, R — для линейных размеров, R^2/a — для времени, q_{V0} — для объемной плотности тепловыделения, то задача (1)–(6) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} + Q(\tau) - \frac{\partial \hat{u}_c(\tau)}{\partial \tau}, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < Z < \Lambda, \quad 0 < \tau < \infty; \quad (7)$$

$$u(\rho, Z, 0) = u^0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < Z < \Lambda; \quad (8)$$

$$\frac{\partial u(0, Z, \tau)}{\partial \rho} = 0, \quad 0 < Z < \Lambda, \quad 0 < \tau < \infty; \quad (9)$$

$$\frac{\partial u(1, Z, \tau)}{\partial \rho} + \text{Bi}_1 u(1, Z, \tau) = 0, \quad 0 < Z < \Lambda, \quad 0 < \tau < \infty; \quad (10)$$

$$\frac{\partial u(\rho, 0, \tau)}{\partial Z} - \text{Bi}_2 u(\rho, 0, \tau) = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \tau < \infty; \quad (11)$$

$$\frac{\partial u(\rho, \Lambda, \tau)}{\partial Z} + \text{Bi}_3 u(\rho, \Lambda, \tau) = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \tau < \infty. \quad (12)$$

Здесь $\rho = r/R$; $Z = z/R$; $\Lambda = l/R$; $u = T/T_M$; $u^0 = T^0/T_M$; $\hat{u}_c = \hat{T}_c/T_M$; $T_M = q_{V0}R^2/\lambda$; $\tau = \text{Fo} = at/R^2$ (Fo — число Фурье); $h_i R = \alpha_i R/\lambda = \text{Bi}_j$, $j = 1, 2, 3$ (Bi — число Био); $Q(\tau) = q_V(t)/q_{V0}$.

Решим задачу (7)–(12) с использованием метода конечных интегральных преобразований [1, 2]. Следуя указанным работам, для исключения дифференциальных выражений по Z можно получить ядро прямого преобразования в виде

$$\bar{K}_{\mu_n}(Z) = \frac{1}{C_{\mu_n}} \left(\cos \mu_n Z + \frac{\text{Bi}_2}{\mu_n} \sin \mu_n Z \right). \quad (13)$$

При этом нормирующий делитель равен

$$C_{\mu_n} = \frac{\Lambda}{2} \left(1 + \frac{\text{Bi}_2^2}{\mu_n^2} \right) + \frac{(\text{Bi}_2 + \text{Bi}_3)(\mu_n^2 + \text{Bi}_2 \text{Bi}_3)}{2\mu_n^2(\mu_n^2 + \text{Bi}_3^2)},$$

а собственные числа μ_n^2 ($n = 1, 2, 3, \dots$) — положительные корни характеристического уравнения

$$\text{ctg} \mu \Lambda = \frac{\mu^2 - \text{Bi}_2 \text{Bi}_3}{\mu(\text{Bi}_2 + \text{Bi}_3)}. \quad (14)$$

С помощью интегрального преобразования в интервале $0 < Z < \Lambda$ с ядром (13) задачу (7)–(12) приведем к виду

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} - \mu_n^2 \bar{u} + \bar{f}(\tau), \quad (15)$$

где чертой обозначены интегральные образы исходных величин u , $u(0)$ и $f(\tau) = Q(\tau) - \frac{\partial \hat{u}_c}{\partial \tau}$, т. е.

$$\bar{u} = \int_0^\Lambda \bar{K}_{\mu_n} u dZ; \quad \bar{u}(0) = A_n u^0; \quad \bar{f}(\tau) = A_n f(\tau), \quad (16)$$

где

$$A_n = \frac{1}{C_{\mu_n} \mu_n^2} \left((-1)^{n+1} \text{Bi}_3 \sqrt{\frac{\mu_n^2 + \text{Bi}_2^2}{\mu_n^2 + \text{Bi}_3^2}} + \text{Bi}_2 \right).$$

Теперь исключим дифференциальные операции по ρ . Ядро прямого преобразования в этом случае имеет вид

$$\tilde{K}_{\nu_k}(\rho) = \frac{\rho}{C_{\nu_k}} J_0(\nu_k \rho), \quad (17)$$

где нормирующий делитель

$$C_{\nu_k} = \int_0^1 J_0^2(\nu_k \rho) \rho d\rho = \frac{1}{2} (J_0^2(\nu_k) + J_1^2(\nu_k));$$

$J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя первого рода соответственно нулевого и первого порядков. Собственные числа ν_k^2 ($k = 1, 2, 3, \dots$) — положительные корни характеристического уравнения

$$\frac{J_0(\nu)}{J_1(\nu)} = \frac{\nu}{\text{Bi}_1}. \quad (18)$$

Осуществляя прямое преобразование задачи (15), (16) с ядром (17) в интервале $0 < \rho < 1$, получаем обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} + (\mu_n^2 + \nu_k^2) \tilde{u} = \tilde{f}(\tau),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{C_{\nu_k}} \int_0^1 \bar{u}(\rho, \tau) J_0(\nu_k \rho) \rho d\rho, \\ \tilde{u}(0) &= A_n A_k u^0, \quad \tilde{f}(\tau) = A_n A_k f(\tau), \quad A_k = \frac{2\text{Bi}_1}{J_0(\nu_k) (\nu_k^2 + \text{Bi}_1^2)}, \end{aligned} \quad (19)$$

решение которого с начальным условием (19) (первая формула), полученное методом вариации постоянной [3], имеет вид

$$\tilde{u}(\tau) = e^{-(\mu_n^2 + \nu_k^2)\tau} \left(\int_0^\tau \tilde{f}(\tau') e^{(\mu_n^2 + \nu_k^2)\tau'} d\tau' + \tilde{u}(0) \right).$$

Заметим, что тильдой обозначены интегральные образы двойного преобразования исходных величин.

Осуществляя обратное преобразование, находим решение задачи

$$u(\rho, Z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_n A_k \left(\cos \mu_n Z + \frac{\text{Bi}_2}{\mu_n} \sin \mu_n Z \right) J_0(\nu_k \rho) e^{-(\mu_n^2 + \nu_k^2)\tau} \left(\int_0^\tau f(\tau') e^{(\mu_n^2 + \nu_k^2)\tau'} d\tau' + u^0 \right). \quad (20)$$

Полученное решение (20) является знакопеременным рядом. Так как для знакопеременных рядов сумма отброшенных членов по абсолютной величине не превышает первого из этих членов, то при относительной погрешности $\varepsilon = 0,001$ для малых времен ($\tau \sim 10^{-4}$) $n = k = 30$. С увеличением времени число членов уменьшается. Так, при $\tau > 0,5$ указанная точность достигается удержанием всего лишь четырех членов ряда.

Для решения трансцендентных характеристических уравнений (14), (18) целесообразно применять итерационный метод Вегстейна [4].

В справочнике [5] приведено решение задачи в аналогичной физической постановке для прямого кольцевого конечного цилиндра с объемными источниками энергии, зависящими от координат и времени, но с постоянной температурой среды, равной нулю. Решение (20) является частным решением по сравнению с решением [5] в смысле геометрии и отсутствия зависимости энерговыделения от координат, но более общим вследствие изменения во времени температуры среды. Решение, приведенное в [5], менее пригодно для практического использования по сравнению с решением, полученным в данной работе. Достоинством полученного решения является также его критериальная форма.

В заключение отметим, что из решения (20) можно получить решения частных задач, некоторые из которых рассмотрены в монографии [6]. Так, при $Bi_1 = 0$ и $f(\tau) = 0$ имеем задачу охлаждения бесконечно протяженной пластины толщиной l : если $Bi_2 = Bi_3$ — задача симметричная, если $Bi_2 \neq Bi_3$ — несимметричная. При $Bi_2 = Bi_3 = 0$ и $f(\tau) = 0$ получается задача охлаждения бесконечного стержня при граничном условии третьего рода; при $Bi_1 = Bi_2 = Bi_3 = \infty$ — задача охлаждения конечного цилиндра, помещенного в кипящую среду; при $Bi_2 = 0$ и $f(\tau) = 0$ — задача охлаждения (нагрева) конечного цилиндра.

Список литературы

1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
2. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959.
4. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962.
5. Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М.: Факториал, 1998.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.

Статья поступила в редакцию 24.02.09.
