

УДК 519.6:536.71

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КВАЗИДИФФУЗИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. Г. Карлыханов
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается применение метода квазидиффузии для расчета задач переноса излучения. Проведено исследование данного подхода на решении ряда методических задач.

Ключевые слова: перенос излучения, квазидиффузия.

Введение

Впервые квазидиффузионный подход был применен для решения проблемы ускорения сходимости итераций по интегралу рассеяния в задачах переноса нейтронов [1]. В иностранной литературе данный подход называется методом множителей Эдингтона (Eddington Factor) [2, 3]. В данной работе проводится исследование метода квазидиффузии применительно к решению задач о переносе излучения в спектральной кинетической постановке. При практическом использовании излагаемого метода возникает несколько вопросов: есть ли необходимость во внешних итерациях по коэффициенту квазидиффузии, какова скорость сходимости этого процесса; с какой точностью необходимо рассчитывать указанные коэффициенты, можно ли в этом случае для решения уравнения переноса излучения в кинетической постановке использовать простые разностные схемы первого порядка точности. Ответы на эти вопросы можно получить при анализе результатов численных расчетов специально подобранных задач.

Постановка задачи

Известно, что перенос теплового излучения в случаях, интересных для практического применения, приходится описывать в спектральной кинетической постановке. Соответствующая система уравнений при этом имеет сложный

нелинейный интегродифференциальный вид с двойным интегрированием по спектру и углу. Это вызывает серьезные трудности, связанные с организацией итерационных процессов при численном решении указанных уравнений. Различные типы используемых итерационных процессов при всех своих достоинствах обладают теми или иными недостатками: от медленной скорости сходимости для методов простой итерации до очень больших объемов вычислений и памяти для методов полной линеаризации.

В настоящей работе предлагается всю тяжесть итерационного процесса переложить на усредненное по углу уравнение переноса излучения, для которого с большой эффективностью можно применить метод, описанный в работе [4]. Для получения усредненных коэффициентов предлагается ввести дополнительный этап, где решается спектральное кинетическое уравнение переноса излучения при известной температуре, взятой, например, с предыдущего шага или предыдущей итерации по температуре. Такой расчет, как правило, не представляет труда, поскольку в этом случае имеет место линейная система уравнений. Далее, после получения на данном этапе спектрального и углового распределения излучения, проводится вычисление коэффициентов квазидиффузии.

Коротко изложим суть метода квазидиффузии. Для простоты рассмотрим кинетическое уравнение в плоском одномерном *сером* случае без учета рассеяния и движения среды:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial t} + \mu \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial x} + \kappa_\varepsilon I_\varepsilon &= \kappa_\varepsilon I_{r,\varepsilon}; \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \int_{-1}^1 \int_0^\infty \kappa_\varepsilon (I_\varepsilon - I_{r,\varepsilon}) d\mu d\varepsilon. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь введены стандартные обозначения: c — скорость света; t — время; I_ε — интенсивность излучения с энергией ε ; μ — косинус угла полета фотона относительно оси x ; κ_ε — коэффициент поглощения излучения; $I_{r,\varepsilon}$ — интенсивность равновесного излучения; $E = E(T)$ — плотность энергии вещества как функция температуры T . Система уравнений (1) дополняется начальными условиями, вид которых несущественный, и граничными условиями следующего вида:

$$I_\varepsilon(\mu > 0) = f_l(\mu, \varepsilon, t) \text{ на левой границе;}$$

$$I_\varepsilon(\mu < 0) = f_r(\mu, \varepsilon, t) \text{ на правой границе,}$$

где $f_l(\mu, \varepsilon, t)$, $f_r(\mu, \varepsilon, t)$ — заданные функции.

Если проинтегрировать первое уравнение системы (1) дважды, с весом 1 и μ , получится следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \nu_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial x} + c\kappa_\varepsilon \nu_{r,\varepsilon}; \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial D_\varepsilon \nu_\varepsilon}{\partial x} + \kappa_\varepsilon S_\varepsilon = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^\infty \kappa_\varepsilon (\nu_\varepsilon - \nu_{r,\varepsilon}) d\varepsilon. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения

$$\nu_\varepsilon = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I_\varepsilon d\mu; \quad \nu_{r,\varepsilon} = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I_{r,\varepsilon} d\mu;$$

$$S_\varepsilon = \int_{-1}^1 \mu I_\varepsilon d\mu; \quad (5)$$

$$D_\varepsilon = \frac{\int_{-1}^1 \mu^2 I_\varepsilon d\mu}{\int_{-1}^1 I_\varepsilon d\mu}. \quad (6)$$

Для согласованности граничных условий в кинетическом и квазидиффузионном уравнениях воспользуемся следующими тождественными преобразованиями.

Запишем поток на левой границе (см. формулу (5)) в виде двух слагаемых:

$$S_\varepsilon = \int_{-1}^0 \mu I_\varepsilon d\mu + \int_{-1}^0 \mu I_\varepsilon d\mu. \quad (7)$$

Первое слагаемое в формуле (7) полностью определяется заданной граничной интенсивностью $f_l(\mu, \varepsilon, t)$. Второе слагаемое запишем в виде дробно-линейного функционала. Тогда выражение (7) примет следующий вид:

$$S_\varepsilon = \int_0^1 \mu f_l(\mu, \varepsilon, t) d\mu + \frac{\int_{-1}^0 \mu I_\varepsilon d\mu}{\int_{-1}^0 I_\varepsilon d\mu} \nu_\varepsilon.$$

Если ввести обозначения

$$\alpha_\varepsilon = \frac{\int_{-1}^0 \mu I_\varepsilon d\mu}{\int_{-1}^0 I_\varepsilon d\mu}; \quad (8)$$

$$\beta_\varepsilon = \int_0^1 \mu f_l(\mu, \varepsilon, t) d\mu, \quad (9)$$

то для квазидиффузионных уравнений граничное условие на левой границе можно записать в следующем виде:

$$S_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \nu_\varepsilon + \beta_\varepsilon.$$

Отметим, что коэффициент α_ε вычисляется аналогично коэффициенту D_ε . Коэффициент β_ε — заданная функция времени и энергии фотона.

На правой границе согласование граничных условий происходит аналогично.

Система уравнений (2)–(4) называется системой уравнений квазидиффузии, а коэффициент D_ε — коэффициентом квазидиффузии. Если из каких-либо соображений точно известны коэффициенты D_ε и α_ε , то система дифференциальных уравнений квазидиффузии полностью эквивалента кинетическому уравнению (1). Теоретически коэффициент D_ε меняется в пределах от 0 до 1, для большинства практически важных задач — от 1/3 до 1. Значение коэффициента α_ε находится в пределах от 0,5 до 1 на левой границе и от -1 до $-0,5$ на правой границе.

Рассмотрим вопрос о численном нахождении коэффициента квазидиффузии. Очень важно, чтобы при вычислении интегралов в формуле (6) в случае изотропного распределения излучения по угловой переменной значение коэффициента D_ϵ было равно $1/3$, а при сильно анизотропном распределении излучения, когда все фотоны летят в направлении с $\mu = 1$, D_ϵ было бы равно 1 при любой сетке по угловой переменной. Применение метода трапеций не удовлетворяет вышепредставленным требованиям в изотропном случае, но дает точное значение в случае сильной анизотропии. Применение методов интегрирования более высокого порядка точности, например метода Симпсона, позволяет в изотропном случае получить точное значение, но в сильно анизотропном пределе получается лишь приближенное значение.

Для выхода из данной ситуации предлагается соответствующие интегралы вычислять по методу трапеций, а затем перевычислять значение коэффициента квазидиффузии по следующей формуле:

$$D_\epsilon = (aD_\epsilon^* + b)D_\epsilon^*.$$

Здесь D_ϵ^* — коэффициент квазидиффузии, рассчитанный по формуле трапеций, и введены обозначения

$$a = -\frac{\langle \mu^2 \rangle - 1/3}{\langle \mu^2 \rangle (\langle \mu^2 \rangle - 1)}; \quad (10)$$

$$b = \frac{\langle \mu^2 \rangle^2 - 1/3}{\langle \mu^2 \rangle (\langle \mu^2 \rangle - 1)}; \quad (11)$$

$$\langle \mu^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu. \quad (12)$$

Интеграл в формуле (12) также рассчитывается по методу трапеций на заданной сетке по угловой переменной. Если сетка по угловой переменной достаточно подробна, так что значение $\langle \mu^2 \rangle$ становится близко к $1/3$, то согласно формулам (10), (11) получаем значения $a = 0$, $b = 1$.

Таким образом, на подробной сетке по μ значение D_ϵ будет близко к значению D_ϵ^* . Если значение D_ϵ^* будет близко к $\langle \mu^2 \rangle$, то коэффициент квазидиффузии будет равен $1/3$. Если $D_\epsilon^* = 1$, то и $D_\epsilon = 1$.

Аналогичные требования накладываются и на вычисление интегралов в формуле (8), т. е.

в случае изотропного распределения излучения $\alpha_\epsilon = 0,5$, а в случае сильной анизотропии $\alpha_\epsilon = 1$. Для выполнения этих требований достаточно применения интегрирования по методу трапеций.

Исследование метода квазидиффузии на модельных задачах

Ответы на вопросы, поставленные в начале статьи, получим на основе анализа результатов численных расчетов модельных задач. Отметим, что при решении нижеприведенных задач значения интенсивности излучения, используемые для расчета коэффициентов квазидиффузии и коэффициента α_ϵ , рассчитывались по схеме первого порядка точности как по пространственной, так и по временной и угловой переменным. Для квазидиффузионной системы уравнений используется схема второго порядка точности по пространственной переменной.

Задача 1. Рассмотрим задачу о распространении излучения в сферической системе с нулевыми коэффициентами поглощения и рассеяния. Рассчитывается распределение излучения в системе с внутренним радиусом 0,4 см и наружным радиусом 4 см. На внутренней границе задан падающий поток равновесного излучения с температурой 1 кэВ, на внешней границе задано условие на свободной поверхности.

Сетка по энергии имеет следующий вид: $\epsilon = 0,0001; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 1,0; 1,4; 1,8; 2,2; 2,6; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5; 5,0; 5,5; 6,0; 7,0; 8,0; 10,0; 12,0; 15,0$ (кэВ). Сетка по пространству берется неравномерная: вблизи внутренней и внешней границ интервал равен 10^{-4} , к середине системы размер ячейки увеличивается по геометрической прогрессии. Всего в расчете задается 134 пространственных интервала. Сетка по угловой переменной — равномерная с числом углов от 4 до 1024.

Для получения квазидиффузионных коэффициентов решается кинетическое уравнение с использованием схемы первого порядка точности. Стационарное распределение температуры излучения в этой задаче описывается формулой

$$T_f = T_{lg} \sqrt[4]{\sqrt{1 - \sqrt{1 - r_{lg}^2/r^2}}}.$$

Здесь T_{lg} — заданная температура на внутренней поверхности сферы радиусом r_{lg} ; r — текущий радиус.

Данная задача характеризуется тем, что вблизи внешней поверхности все излучение сосредоточено в узком угловом диапазоне в пределах $0,995 < \mu < 1$. Поэтому для решения задачи требуется очень подробная сетка по угловой переменной. В рассматриваемом случае по угловой переменной необходимо более 1000 направлений, чтобы в указанный диапазон попало хотя бы несколько точек.

На рис. 1 представлена температура излучения, рассчитанная из уравнений квазидиффузии при различном числе направлений по угловой переменной. Хорошо видно, что 8–16 углов вполне достаточно, чтобы получить хорошее приближение к точному решению. Хотя, как сказано выше, для корректного расчета кинетического уравнения требуется не менее 1000 направлений по углу. Это объясняется тем, что на грубой сетке по угловой переменной решение кинетического уравнения вблизи внешней границы будет отлично от нуля только для одного угла, соответствующего $\mu = 1$. Коэффициент квазидиффузии в этом случае равен 1 и слабо зависит от числа направлений по угловой переменной.

Решение кинетического уравнения в данной задаче, особенно по недивергентной схеме первого порядка, будет сильно зависеть от сетки по угловой переменной. Это хорошо видно из рис. 2, на котором представлены зависимость мощности потока излучения от числа направлений по угловой переменной, полученные из кинетического и квазидиффузионного уравнений на внешней границе. Для вычисления потока использовалось интегрирование по методу трапеций.

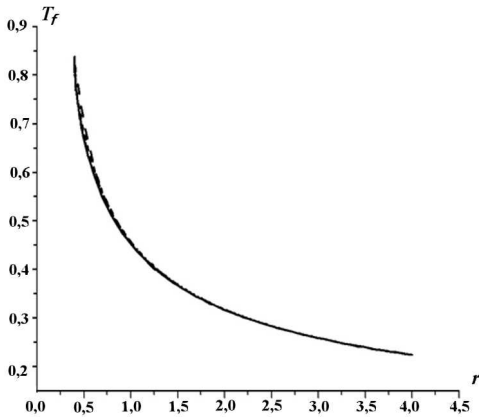


Рис. 1. Профиль температуры излучения: — — — точное решение; — — — — 4 направления по угловой переменной; - - - - 8 направлений по угловой переменной; - - - - 16 направлений по угловой переменной; ... — 32 направления по угловой переменной

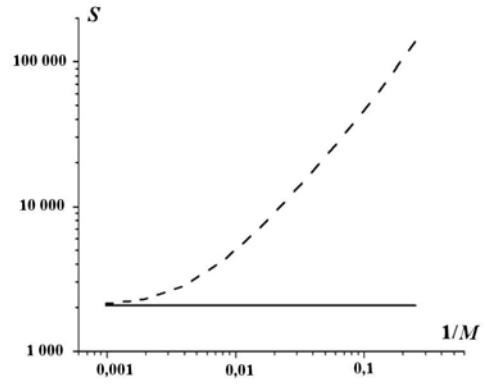


Рис. 2. Мощность потока излучения на внешней границе в зависимости от числа направлений M по угловой переменной: — — — расчет по квазидиффузионному уравнению; - - - - расчет по кинетическому уравнению

Отметим, что в данной задаче полный поток равен падающему потоку (см. формулу (9)). Поэтому использование консервативных разностных схем (а для квазидиффузионной постановки используется именно такая схема) позволяет правильно передать полный поток, независимо от угловой сетки. Отметим также, что использование консервативной схемы для уравнения переноса приводит к тому же эффекту. В расчетах кинетического уравнения использовалась более простая неконсервативная схема, поэтому решение, полученное из кинетического уравнения, сходится к решению, полученному из квазидиффузионного уравнения, только при 1024 направлениях по углу.

Задача 2. Рассмотрим задачу из работы [5], которая имеет аналитическое решение. Рассчитывается прохождение неравновесного излучения через плоский слой вещества толщиной 4 см. Начальная температура вещества $T = 0,001$ кэВ. Плотность вещества $\rho = 1$. Уравнение состояния задается в виде $E = 152,73T^4$. Спектральный коэффициент поглощения

$$\kappa_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4T^2(1 - \exp(-\varepsilon/T))}.$$

На правой границе задается условие на свободной поверхности, на левой границе — входящая интенсивность

$$I_\varepsilon(x_0 = 0, t > 4,66, \varepsilon, \mu > 0) = \frac{200\varepsilon^3}{(4 - 3,7\mu) \left(\exp\left(-\frac{\varepsilon}{5(t - 4,66)}\right) - 1 \right)}.$$

В расчетах использовалась равномерная сетка по пространственной и угловой переменным. В первом варианте задача считается с 40 интервалами по пространству и 12 направлениями по углу; во втором варианте — 160 интервалов по пространству и 28 направлений по углу. Сетка по спектру задавалась в том же виде, что и в задаче 1.

Решение данной задачи имеет вид

$$T = \begin{cases} 5(t - 4,66x), & \text{если } t > 4,66x; \\ 0, & \text{если } t < 4,66x. \end{cases}$$

Результаты расчетов задачи представлены на рис. 3, 4. На них приведено сравнение полученного решения не только с точным решением, но и с решениями, из *кинетического расчета* по схемам первого и второго порядка точности, которые любезно представлены В. В. Завьяловым [5].

Как видно из рис. 3, решение, полученное на грубой сетке (40 пространственных интервалов и 12 направлений по угловой переменной) на основе квазидиффузионного подхода с использованием схемы первого порядка для решения кинетического уравнения, существенно точнее, чем прямой расчет переноса излучения по кинетическому уравнению с использованием схемы первого порядка. Схема второго порядка на этой сетке дает более точный результат, хотя размазывание фронта тепловой волны примерно одинаково.

На рис. 4 приведены результаты расчета данной задачи на более подробной сетке (160 про-

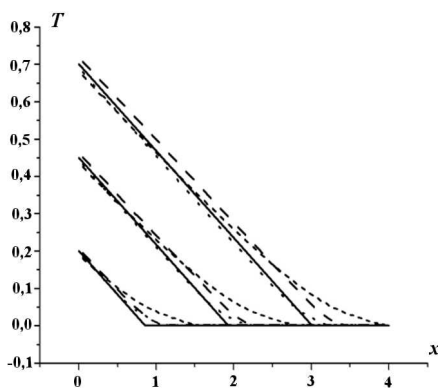


Рис. 3. Профили температуры на различные моменты времени на сетке из 40 интервалов по пространству и 12 направлений по угловой переменной: — — точное решение; — — — квазидиффузионное решение; - - - кинетический расчет по схеме первого порядка точности; . . . кинетический расчет по схеме второго порядка точности

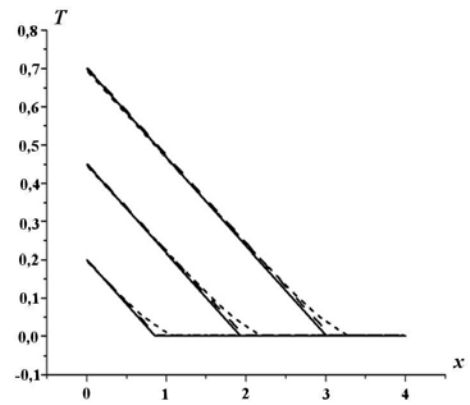


Рис. 4. Профили температуры на различные моменты времени на сетке из 160 интервалов по пространству и 28 направлений по угловой переменной: — — точное решение; — — — квазидиффузионное решение; - - - кинетический расчет по схеме первого порядка точности

странственных интервалов и 28 направлений по угловой переменной). Как хорошо видно, квазидиффузионный подход на этой сетке дает существенно более точное решение, чем прямой расчет по кинетическому уравнению с использованием схемы первого порядка точности.

Задача 3. В качестве следующей задачи рассмотрим вторую задачу Флека из работы [6]. Наиболее подробно данная задача рассмотрена в работе [5]. На поверхности плоского слоя толщиной 4 см задается источник изотропного планковского излучения с температурой 1 кэВ. Слой состоит из трех физических областей: область 1 — $0 < x < 2$; область 2 — $2 < x < 2,4$; область 3 — $2,4 < x < 4$. Коэффициент поглощения вычисляется по формуле

$$\kappa_\varepsilon = \frac{\kappa_0(1 - \exp(-\varepsilon/T))}{\varepsilon^3};$$

$\kappa_0 = 27$ в областях 1 и 3, $\kappa_0 = 10000$ в области 2. Уравнение состояния вещества взято в виде: $E = 0,81T$.

Пространственная сетка — неравномерная и имеет следующий вид: $x_0 = 0; 0,004; 0,04; x_3 = 0,1; \dots; x_{21} = 1,9$ (8 интервалов, $h = 0,1$); $x_{22} = 1,987; 1,999; 2; 2,001; 2,004; 2,013; x_{28} = 2,04; \dots; x_{36} = 2,36$ (8 интервалов, $h = 0,04$); $x_{37} = 2,396; 2,4; 2,404; 2,44; x_{41} = 2,5; \dots; x_{56} = 4$ (15 интервалов, $h = 0,1$). При этом число интервалов в областях 1, 2, 3 — 24, 14, 18 соответственно, итого 56 интервалов по простран-

ству. Был также проведен расчет с утроенным числом интервалов по пространству. Сетка по μ во всех расчетах выбиралась равномерной, задавалось 16 направлений по угловой переменной.

Результаты расчетов данной задачи представлены на рис. 5, 6. Из рисунков видно, что квазидиффузионный подход дает практически точное решение на сетке со 168 пространственными интервалами (за точное решение взято решение из работы [5]), в то время как в прямом расчете кинетического уравнения по схеме первого порядка получен результат, весьма далекий от точного решения.

Во всех вышеприведенных расчетах коэффициент квазидиффузии рассчитывался один раз на шаге. Представляет интерес вопрос, как повлияет на динамику расчета организация внешних итераций, когда на каждой итерации по температуре после получения нового значения температуры вещества будет пересчитываться коэффициент квазидиффузии.

С целью исследования скорости сходимости внешних итераций решалась вторая задача Флека. Следует отметить, что в этом случае количество итераций по температуре возросло на одну, максимум две итерации. Результаты расчетов с внешними итерациями по коэффициенту квазидиффузии и без них совпали с точностью до

константы сходимости. Итерации проводились до получения пяти верных знаков.

Характер сходимости итераций сохраняется и на других задачах. Это вполне естественно, поскольку в оптически плотных средах коэффициент квазидиффузии стремится к $1/3$ и практически не зависит от получаемого решения. В оптически прозрачных средах в силу слабого взаимодействия излучения с веществом значение коэффициента квазидиффузии по существу мало меняется на квазидиффузионном этапе расчета, т. е. на этапе расчета взаимодействия излучения с веществом. Для промежуточных оптических толщин количество итераций также увеличивается незначительно.

Для понимания описываемого итерационного процесса, особенно для умеренных оптических толщин, приведем следующую его интерпретацию. Известно, что, за исключением экзотических случаев, коэффициенты квазидиффузии могут меняться в узком диапазоне: от $1/3$ до 1. Коэффициент α_ε в граничном условии находится в пределах $0,5 < |\alpha_\varepsilon| < 1$. Трудно представить, что при решении нестационарных задач радиационной газовой динамики с временным шагом, обеспечивающим приемлемую точность, значение коэффициента квазидиффузии и α_ε на шаге менялось бы в указанных крайних пределах.

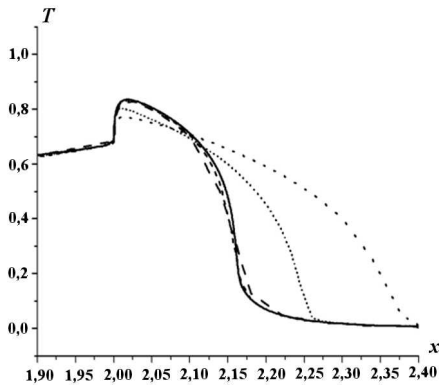


Рис. 5. Профиль температуры вещества на момент времени $ct = 9$: — — точное решение; — — — квазидиффузионное решение на сетке с 56 интервалами по пространству; - - - квазидиффузионное решение на сетке со 168 интервалами по пространству; ··· — кинетический расчет на сетке с 56 интервалами по пространству по схеме первого порядка точности; ··· — кинетический расчет на сетке со 168 интервалами по пространству по схеме первого порядка точности

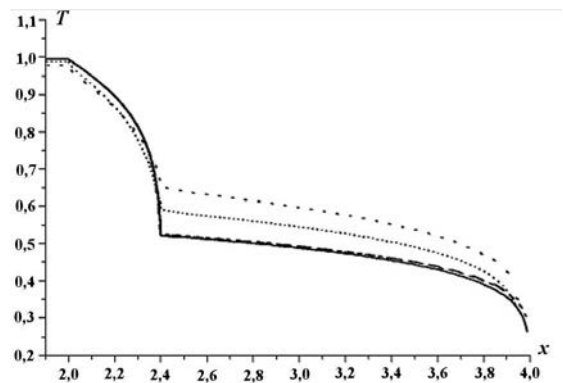


Рис. 6. Профиль температуры вещества на момент времени $ct = 360$: — — точное решение; — — — квазидиффузионное решение на сетке с 56 интервалами по пространству; - - - квазидиффузионное решение на сетке со 168 интервалами по пространству; ··· — кинетический расчет на сетке с 56 интервалами по пространству по схеме первого порядка точности; ··· — кинетический расчет на сетке со 168 интервалами по пространству по схеме первого порядка точности

Приведенные здесь рассуждения и численные эксперименты дают основание сделать вывод, что расчеты большинства нестационарных задач в режиме, когда тепловая волна распространяется на несколько (один-два) пространственных интервалов за один временной шаг, можно вести без внешних итераций по коэффициенту квазидиффузии, не опасаясь за точность результатов.

Из приведенных выше результатов видно (особенно из рис. 5, 6), что использование для расчетов в спектральной кинетической постановке схемы первого порядка точности приводит к существенному отклонению полученного решения от точного, в то время как при квазидиффузионном подходе использование этой схемы для вычисления коэффициентов квазидиффузии оправданно.

Возможность использования в квазидиффузионном подходе для решения кинетического уравнения простых абсолютно устойчивых и монотонных схем первого порядка точности по всем переменным приводит к существенному упрощению общего алгоритма вычислений. Применение схем повышенного порядка точности для вычисления коэффициентов квазидиффузии, как показали численные эксперименты, не повышает точности расчета, а приводит лишь к усложнению общего алгоритма счета и, как следствие, увеличению времени расчета задачи в целом.

Выводы

Квазидиффузионный подход имеет следующие преимущества перед кинетической постановкой:

1. Для вычисления коэффициентов квазидиффузии и коэффициентов α_ϵ в граничном условии используются простые монотонные схемы первого порядка точности по всем переменным.
2. Построение быстросходящихся итерационных процессов по температуре гораздо проще осуществить для уравнений квазидиффузионного типа, нежели для кинетического уравнения, особенно если для решения

последнего использовать схемы повышенного порядка точности.

3. Итерации по коэффициенту квазидиффузии и коэффициентам α_ϵ в граничном условии быстро сходятся, так что для большинства практически важных задач счет можно вести без внешних итераций по коэффициенту квазидиффузии.

Список литературы

1. *Гольдин В. Я.* Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078—1087.
2. *Freeman B. E., Hauser L. E., Pahner J. T., Pickard S. O., Simmons G. M., Williston D. G., Zerkle J. E.* DASA Report No. 2135. Vol. I. La Jolla: Systems, Science and Software Inc. 1968.
3. *Spillman G. R.* Formulation of the Eddington factor for use in one-dimensional nonequilibrium diffusion calculations // Scientific Laboratory Office Memorandum. Los Alamos, 1968.
4. *Карлыханов Н. Г.* Построение оптимальных многодиагональных методов решения задач переноса излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 4. С. 494—498.
5. *Завьялов В. В., Козманов М. Ю., Селезнёв В. Н., Черняков В. Е., Шестаков А. А.* Результаты численных расчетов одномерных тестовых задач переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 26—36.
6. *Fleck J. A., Cummings Jr. J. D.* An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency depend nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys., 1971. Vol. 8. P. 313—342.

Статья поступила в редакцию 20.10.08.