

УДК 519.6

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА РАЙБИКИ К ПРОЦЕССУ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ИТЕРАЦИЯМИ ПО ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ

Е. В. Грошев
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Предлагается один алгоритм использования метода Райбики в итерациях по граничным условиям, совмещенных с простой итерацией кинетического уравнения, при решении нестационарных спектральных сферически-симметричных задач переноса излучения. Вся система разбивается на математические подобласти, и после проведения простой итерации для кинетического уравнения со значениями спектральной интенсивности, которые служат входящими потоками для соответствующих математических подобластей, решается (методом Райбики) задача переноса излучения.

Ключевые слова: система уравнений переноса излучения, метод Райбики, итерации по граничным условиям, алгоритм использования метода Райбики в итерациях по граничным условиям.

Введение

Система уравнений переноса излучения в многогрупповом приближении нелинейна. Если линеаризовать функцию Планка и внутреннюю энергию по температуре и исключить температуру, то получим уравнение переноса излучения с полной матрицей взаимодействия между группами [1].

В работе Фотрие [2] для решения линеаризованной системы предложено применять *прямой* метод матричной прогонки, который становится экономически неэффективным при возрастании числа точек по пространству и особенно числа групп фотонов.

В работе [3] для решения линеаризованной системы в двумерном случае предложен успешно применяемый на практике КМ-метод.

Если для решения линеаризованной системы для схем *треточечного* типа применить метод типа Якоби, то получим метод из работы [4]. Киспользуя так или иначе для ускорения сходимости простых итераций метод Якоби следует отнести работы [5, 6]. Надо отметить, что успешное применение метода Якоби напрямую связано с монотонностью схемы, применяемой для решения уравнения переноса излучения.

Для немонотонных схем (под этим понимаются S_n -, DS_n -схемы второго порядка точности с разными алгоритмами монотонизации) можно использовать метод выделения диагонального элемента (ВДЭ), изложенный в работе [7].

К прямым методам решения системы уравнений переноса излучения следует отнести метод Райбики [8]. В статьях [9, 10] рассмотрены методы ускорения, основанные на замене в итерационном процессе матрицы Райбики на *многодиагональную* матрицу, что может приводить к сокращению объема вычислений и времени счета по сравнению с методом Райбики.

В данной работе предлагается один алгоритм использования метода Райбики в итерациях по граничным условиям, совмещенных с простой итерацией кинетического уравнения, при решении нестационарных спектральных сферически-симметричных задач переноса излучения [11]. Вся система разбивается на математические подобласти, и после проведения простой итерации кинетического уравнения для всей системы с теми значениями спектральной интенсивности, которые служат входящими потоками для соответствующих математических подобластей, решается (методом Райбики) задача переноса излучения. Полученные в результате значения тем-

ператур служат "отправными" для следующей простой итерации уравнения переноса.

На примере решения вариантов задачи Флека [12] с разными шагами по времени показывается, что при оптимальных разбиениях системы время решения сокращается по сравнению с методом Райбки от 1,8 до 20 раз. Отношения оптимальных времен счета соответствующих вариантов задачи ко временам, затраченным при расчете по ST_n -схеме [13], использующей быстроходящиеся спектральные P_1 -поправки [6], колеблются в пределах от 1,66 до 0,67.

1. Метод Райбки

Метод Райбки [8] для решения задач переноса излучения заключается в следующем.

Рассмотрим систему нестационарных спектральных уравнений, описывающую процесс переноса излучения в веществе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\omega}{c\partial t} + \frac{\partial r^2 \mu N_\omega}{r^2 \partial r} + \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{(1 - \mu^2) N_\omega}{r} + \\ + \chi_\omega N_\omega = \frac{\chi_\omega}{2} B_\omega; \quad (1) \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} = \int_\omega \chi_\omega \left(n_\omega^{(0)} - B_\omega \right) d\omega, \end{aligned}$$

где для уравнения переноса фотонов возьмем многогрупповое сферически-симметричное приближение. Здесь c — скорость света; r — радиус; t — время; ω — частота; μ — косинус угла между направлением полета фотонов и радиусом; $N_\omega(r, \mu, \omega, t)$ — спектральная интенсивность излучения; $\chi_\omega(r, \omega, T)$ — коэффициент поглощения, $T(r, t)$ — температура среды; $E(r, t)$ — внутренняя энергия вещества; $B_\omega(\omega, T)$ — функция Планка; $n_\omega^{(0)} = \int_{-1}^{+1} N_\omega d\mu$.

Для аппроксимации системы (1) по времени применим неявную схему первого порядка; по переменным r и μ используем DS_n^7 -схему [14], причем для простоты сетку по угловой переменной возьмем из двух интервалов: $-1 \leq \mu \leq 0$; $0 < \mu \leq +1$.

На рис. 1 изображена сетка по r и μ в задаче, а также показано центрирование значений функции N (см. [14]), индекс группы опущен. В соответствии с рисунком имеем формулу $n_{p+1/2}^{(0)} = N_{p+1/2, 2} + N_{p+1/2, 4}$.

Систему разностных уравнений, возникшую при аппроксимации задачи (1), будем решать

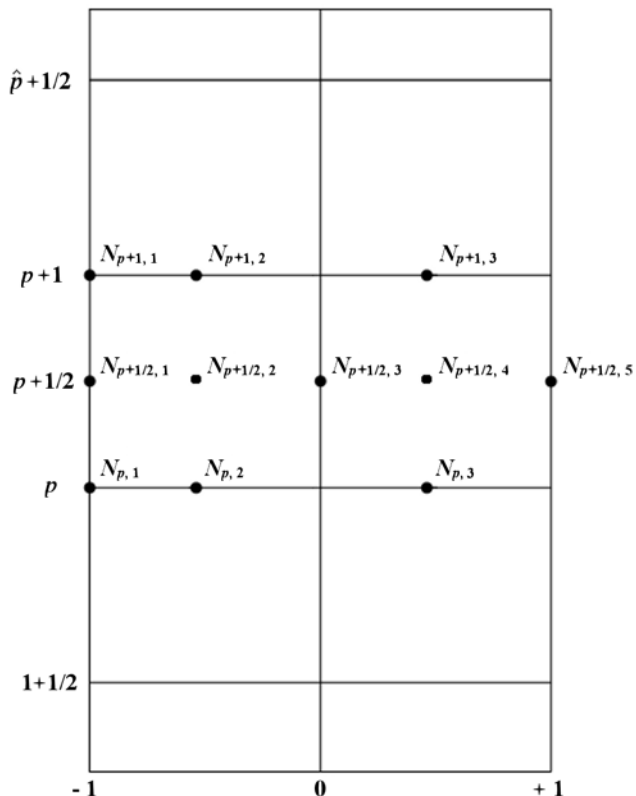


Рис. 1. Сетка по r и μ , центрирование функции N

простыми итерациями. Запишем ν -ю итерацию, оставляя для краткости в записи дифференциальные операторы только по r и μ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^2 \mu N_k^{\nu+1/2}}{r^2 \partial r} + \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{(1 - \mu^2) N_k^{\nu+1/2}}{r} + \\ + \left(\chi_k^n + \frac{1}{c\Delta t} \right) N_k^{\nu+1/2} = \frac{\chi_k^n}{2} B_k^\nu + \frac{N_k^n}{c\Delta t}; \quad (2) \\ \rho \frac{E^{\nu+1/2} - E^n}{\Delta t} = \\ = \sum_k \chi_k^n \left(\Delta n_k^{(0)\nu+1/2} - B_k^{\nu+1/2} \right) \Delta \omega_k, \end{aligned}$$

где n — номер временного шага; k — номер группы фотонов.

В результате решения системы (2) по температуре T^ν находим температуру $T^{\nu+1/2}$.

Во время проведения простой итерации, пользуясь тем, что сетка по μ содержит два интервала, нетрудно получить в каждой группе фотонов с номером k связь между векторами $\left(\overrightarrow{n_k^{(0)}} \right)^{\nu+1/2} = \left(n_{k,1+1/2}^{(0)\nu+1/2}, \dots, n_{k,p+1/2}^{(0)\nu+1/2}, \dots, n_{k,\hat{p}+1/2}^{(0)\nu+1/2} \right)$ и $\left(\overrightarrow{B_k^\nu} \right)^\nu = \left(B_{k,1+1/2}^\nu, \dots, B_{k,p+1/2}^\nu, \dots, B_{k,\hat{p}+1/2}^\nu \right)$, где \hat{p} — число интервалов сетки по r .

Для $(p + 1/2)$ -й компоненты вектора $\left(\overrightarrow{n_k^{(0)}}\right)^{\nu+1/2}$ имеем

$$\left(n_{k,p+1/2}^{(0)}\right)^{\nu+1/2} = \left(\sum_{q=1}^{\hat{p}} A_{k,p+1/2,q+1/2}^{\nu+1/2} B_{k,q+1/2}^{\nu}\right) + C_{k,p+1/2}^{\nu+1/2}. \quad (3)$$

Считая, что решение разностного аналога системы (1) — вектор $\overrightarrow{n_k^{(0)}}$ — связано с вектором $\overrightarrow{B_k}$ через матрицу $A_{k,p+1/2,q+1/2}^{\nu+1/2}$, подставляем эту связь в уравнение энергии. Получаем

$$\rho_{p+1/2} \frac{E_{p+1/2}^{\nu+1} - E_{p+1/2}^{\nu}}{\Delta t} = \sum_k \left\{ \Delta\omega_k \chi_{k,p+1/2}^n \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\sum_q A_{k,p+1/2,q+1/2}^{\nu+1/2} B_{k,q+1/2}^{\nu+1}\right) + C_{k,p+1/2}^{\nu+1/2} - B_{k,p+1/2}^{\nu+1} \right] \right\}. \quad (4)$$

Решая уравнение (4) методом Ньютона, находим значение температуры $T^{\nu+1}$. С этой температурой начинаем простую итерацию с номером $\nu + 1$.

Описанный итерационный процесс называется методом Райбики для задач переноса излучения. Скажем несколько слов о его особенностях.

Если бы схема, используемая при решении уравнения переноса в системе (1), была линейной (точнее, весовые параметры γ_r , γ_μ не менялись на простых итерациях), то связь (3) являла бы собой разностный аналог уравнения Пайерлса, эквивалентного уравнению переноса. Для решения системы (1) требовалась бы одна итерация метода Райбики. Метод Райбики в этом случае был бы прямым методом решения системы (1). Однако поскольку на практике схемы второго порядка (в частности DS_n^γ -схема) немонотонны, то из-за различных алгоритмов монотонизации схемы становятся нелинейными, и вследствие этого метод Райбики получается итерационным. На практике (см. разд. 3) число этих итераций по всем расчетам невелико (в среднем не превышает 7), и это является основным достоинством метода Райбики.

К сожалению, метод Райбики является дорогостоящим. Время тратится как на простой итерации кинетического уравнения при получении матриц $A_{k,p+1/2,q+1/2}^{\nu+1/2}$, так и при подстановке

матричной связи (3) в уравнение энергии и его решении методом Ньютона.

Число операций при получении матриц равно

$$LI_1 \hat{p}^2. \quad (5)$$

Здесь I_1 — число энергетических групп в задаче; L — число операций на один элемент матрицы размером $\hat{p} \times \hat{p}$ (если сетка по μ будет состоять из \hat{f} интервалов, то $L \approx 5\hat{f}$; в частности, для двух интервалов сетки по μ $L \approx 5 \cdot 2 = 10$).

Число операций при решении уравнения энергии —

$$M\alpha I_1 \hat{p}^2, \quad (6)$$

где M — число операций на один элемент матрицы размером $\hat{p} \times \hat{p}$, $M \approx 10^2$; α — число итераций метода Ньютона. Время, затрачиваемое на решение матричного уравнения размером $\hat{p} \times \hat{p}$, например, методом Гаусса, вообще говоря, имеет порядок \hat{p}^3 . Однако в приведенных ниже примерах оно составляет не более 5% от времени, которое тратится на получение этой матрицы, и поэтому не рассматривается. В задачах, где это время является определяющим, выигрыш от предлагаемого алгоритма еще больше.

Суммарное время (время блока Райбики) составляет "львиную долю" общего времени, затрачиваемого на решение системы (1). Заметим, что число операций в блоке Райбики квадратично зависит от числа пространственных интервалов, т. е. резко сокращается при уменьшении их количества в системе. Поэтому представляется перспективным использовать метод Райбики в рамках алгоритма итераций по областям [11], применяя его для решения задач переноса излучения (1) в областях с малым числом пространственных интервалов.

2. Использование метода Райбики в итерациях по граничным условиям

Рассмотрим следующий алгоритмический процесс, важным элементом которого сделаем метод Райбики. Метод Райбики будем использовать для решения задачи переноса излучения в математических подобластях, которые будем вводить в физических областях, образующих систему.

Более конкретно: возьмем для примера трехобластную задачу. Сетку по r в каждой области выберем равномерной.

В каждой из физических областей введем математические подобласти. Для этого будем объединять интервалы первоначального разбиения физической области. Для определенности пусть в пределах каждой физической области математические подобласти будут по размерам одинаковыми. Описанная конструкция изображена на рис. 2: первая физическая область состоит из четырех ячеек — двух математических подобластей; вторая физическая область совпадает с математической подобластью; третья физическая область состоит из четырех ячеек — двух математических подобластей.

Сформулируем теперь основные положения предлагаемого алгоритма.

Сначала проводим простую итерацию для всей системы с номером ν (см. (2)).

Далее в каждой группе фотонов из значений $N^{\nu+1/2}$, полученных на простой итерации, выбираем те, которые служат граничными условиями для введенных математических подобластей (на рис. 2 значения $N^{\nu+1/2}$ — граничные условия для математической подобласти 1 физи-

ческой области 3), после чего в каждой из этих математических подобластей решаем задачу (1) методом Райбки. При этом весовые параметры в каждой из ячеек сохраняем с простой итерации с номером ν .

Таким образом, получаем итерационный процесс, который доводим до сходимости. На практике итерации по температуре метода Райбки в математических подобластях (их назовем *внутренними* итерациями) сводятся с большей точностью (раз в 10), нежели итерации с индексом ν (последние назовем *внешними*). Внешние итерации называются итерациями по подобластям, совмещенными с простыми итерациями кинетического уравнения [11]. Такие итерации широко применяются для решения многомерных задач переноса нейтронов и фотонов. Они хорошо сходятся в оптически плотных системах. При увеличении шага по времени, а также при возрастании числа подобластей их сходимость замедляется.

Представляется интересным оценить количество операций в блоке метода Райбки при переходе от его использования для всей системы (классический метод Райбки) к применению в итерациях *по областям* (предлагаемый метод).

Для этого рассмотрим систему G из \hat{d} физических областей с равным числом интервалов по пространству и общим числом интервалов \hat{p} . Таким образом, в каждой физической области \hat{p}/\hat{d} интервалов. Рассмотрим такое разбиение системы G , при котором каждая физическая область считается математической.

Прежде всего заметим, что на простой итерации для всей системы число операций в блоке метода Райбки пропорционально \hat{p}^2 (см. (5), (6)). Если провести простую итерацию одновременно во всех областях, то суммарное число операций в блоке Райбки будет пропорционально числу $\frac{\hat{p}^2}{\hat{d}} = \hat{d} \frac{\hat{p}^2}{\hat{d}^2}$, т. е. в \hat{d} раз меньше.

Этот факт является основной предпосылкой для успешного применения предлагаемого алгоритма. Оценим точнее соотношение числа операций в методе Райбки и предлагаемом алгоритме на шаге по времени.

При применении метода Райбки для решения задачи (1) во всей области G в блоке алгоритма Райбки на шаге по времени будет сделано следующее число операций:

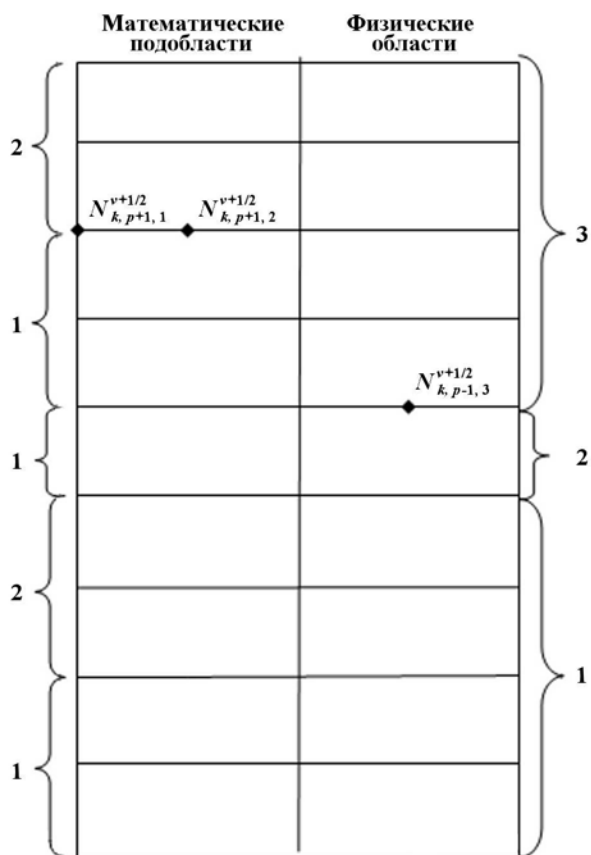


Рис. 2. Система из трех физических областей с выделенными математическими подобластями

$$\sum_{S=1}^K (I_1 L \hat{p}^2 + I_1 \alpha_S M \hat{p}^2). \quad (7)$$

Здесь K — число итераций метода Якоби в области G ; $I_1 L \hat{p}^2$ (5) — число операций при получении групповых матриц Райбики на итерации метода Якоби; $I_1 \alpha_S M \hat{p}^2$ (6) — число операций при решении уравнения энергии с помощью групповых матриц Райбики.

Если теперь использовать вышеуказанный алгоритм счета по областям, то на шаге по времени на него будет затрачено операций

$$\sum_{\nu=1}^{K_1} \left[\sum_{d=1}^{\hat{d}} \left(\sum_{S=1}^{K_{\nu,d}} I_1 L \frac{\hat{p}^2}{d^2} + \sum_{S=1}^{K_{\nu,d}} I_1 \alpha_{\nu,d,S} M \frac{\hat{p}^2}{d^2} \right) \right], \quad (8)$$

где K_1 — число итераций по областям (внешних итераций); $K_{\nu,d}$ — число итераций метода Якоби в математической области с индексом d на ν -й внешней итерации; $\alpha_{\nu,d,S}$ — число итераций в методе Ньютона при решении уравнения энергии на S -й итерации метода Якоби в d -й области системы на ν -й внешней итерации.

На основании следующих рассуждений:

- оптическая толщина любой математической подобласти меньше оптической толщины системы;
- математические подобласти рассчитываются в каждой группе с фиксированными значениями весовых параметров;
- любая подобласть может иметь фоновую температуру, поскольку тепловая волна до нее еще, скажем, не дошла, и т. д.

с большой долей достоверности можно утверждать, что все $K_{\nu,d} \leq K$. Также можно утверждать следующее: поскольку любая математическая подобласть содержит меньше интервалов по пространству, чем вся система, метод Ньютона сходится в ней быстрее, а следовательно, $\alpha_{\nu,d,S} \leq \alpha_S$. В принципе эти соотношения в данной ситуации можно просто навязать. Поэтому значение величины (8) только увеличится при замене $K_{\nu,d}$ на K и $\alpha_{\nu,d,S}$ на α_S .

С учетом сказанного число операций при счете по областям становится равным

$$K_1 \left(\sum_{S=1}^K I_1 L \frac{\hat{p}^2}{\hat{d}} + \sum_{S=1}^K I_1 \alpha_S M \frac{\hat{p}^2}{\hat{d}} \right). \quad (9)$$

Разность между (7) и (9) имеет вид

$$I_1 \hat{p}^2 \left[L \left(1 - \frac{K_1}{\hat{d}} \right) + M \left(1 - \frac{K_1}{\hat{d}} \right) \sum_S \alpha_S \right]. \quad (10)$$

Если число (10) положительно, то происходит уменьшение числа операций. Отрадно, что это число увеличивается с возрастанием I_1 и \hat{p} .

Итак, если число $1 - K_1/\hat{d}$ положительно, то происходит уменьшение числа операций (времени) при переходе от классического метода Райбики к предлагаемому алгоритму. Заведомо можно указать ситуацию, когда это выполняется: при малых шагах по времени, когда число K_1 невелико, за счет увеличения числа областей \hat{d} выражение (10) нетрудно сделать положительным.

На практике (см. разд. 3) уменьшение времени счета происходит в большинстве случаев и при крупных шагах Δt , а также при значениях $K_1/\hat{d} > 1$. Это свидетельствует о том, что при предположении $K_{\nu,d} = K$ и $\alpha_{\nu,d,S} = \alpha_S$ сильно завышается (8).

3. Численные результаты

Рассматривались два варианта задачи Флека [12].

На внутреннюю поверхность сферического слоя толщиной 4 см падает планковский поток излучения, соответствующий температуре вещества $T = 1$ кэВ. Слой состоит из трех физических областей: область 1 — $100 < r < 102$; область 2 — $102 < r < 102,4$; область 3 — $102,4 < r < 104$. Коэффициент поглощения вычислялся по формуле $\chi_\omega = \frac{A(1 - e^{-\omega/T})}{\omega^3}$, параметр A варьировался (табл. 1).

Начальная температура $T_{\text{фон}} = 0,00001$ кэВ, уравнение состояния — $E = 0,81T$. По энергетической переменной расчеты производились на сетке $\omega = 0; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 1; 1,4; 1,8; 2,2; 2,6; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 7; 8; 10; 12; 15$ (всего 28 групп). Сетка

Таблица 1

Значения параметра A в трех областях для двух вариантов задачи Флека

Номер варианта	Область 1	Область 2	Область 3
1	27	10^4	27
2	10^4	10^4	10^4

по угловой переменной состояла из двух равных интервалов.

Для варианта 1 задачи Флека сетка по пространству состояла из 360 интервалов: 144 интервала в области 1; 96 интервалов в области 2; 120 интервалов в области 3. В каждой области сетка выбиралась равномерной.

Для варианта 2 (все области плотные) сетка по пространству состояла из 360 равных интервалов.

Каждый вариант просчитывался с шагами $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$ (10 000 шагов), $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ (1 000 шагов), $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ (100 шагов), $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ (в варианте 2 — 30 шагов, в варианте 1 — до стационарного решения). Внешние итерации сводились с относительной точностью $\varepsilon = 10^{-8}$.

В табл. 2 приведены результаты решения варианта 2 задачи Флека: для определенных значений временного шага указывается время расчета на ПЭВМ, а также среднее число итераций на шаге для метода Райбики и ST_n -схемы или среднее число внешних итераций в расчетах с предложенным алгоритмом (d — количество математических областей в разбиении).

Прокомментируем результаты, приведенные в табл. 2.

По табл. 2 можно наблюдать действие предложенного алгоритма: при равенстве среднего числа внешних итераций время расчета падает при увеличении числа математических подобластей.

Оптимальные по времени расчеты: при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$ — для 60 математических подобластей; при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ — для 60 математических подобластей; при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ — для 6 математических подобластей; при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ — для 60 математических подобластей. Таким образом максимальный выигрыш предлагаемого алгоритма по сравнению с методом Райбики (см. времена в первой строке табл. 2 и оптимальное время) колеблется в пределах от 8,5 до 22,8 раза. Эффективность алгоритма также возрастает при уменьшении шага по времени. Оптимальное время расчета варианта 2 задачи Флека существенно сблизилось (по сравнению с методом Райбики) со временем расчета этой же задачи с помощью ST_n -схемы. Отношения оптимального времени расчета второго варианта задачи Флека для каждого выбранного Δt ко времени расчета этой же задачи с помощью ST_n -схемы равны соответственно 1,66; 1,47; 0,75; 0,67.

Главный вывод: экономия времени происходит при любом разбиении системы.

В табл. 3 приведены результаты решения варианта 1 задачи Флека: для определенных шагов указывается время расчета на ПЭВМ, а также среднее число итераций на шаге для метода Райбики и ST_n -схемы или среднее число внешних итераций в расчетах с предложенным алгоритмом (три числа в первом столбце — число математических подобластей в каждой физической области).

Прокомментируем результаты, приведенные в табл. 3.

Оптимальные по времени расчеты: при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$ в каждой из трех областей — 24 математические подобласти; при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ в каждой области — 24 математические подобласти; при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ в каждой области — 12 математических подобластей; при $\Delta t = 2 \times 10^{-3}$ в каждой области — 6 математических подобластей. Таким образом, максимальный выигрыш при использовании предлагаемого алгоритма в данном случае колеблется от 1,8 до 19,5 раза. Эффективность алгоритма также возрастает при уменьшении шага по времени. Отношения оптимального времени расчета первого варианта задачи Флека для каждого выбранного Δt ко времени расчета этой же задачи с помощью ST_n -схемы равны соответственно 1,58; 0,89; 0,75; 0,97.

По результатам табл. 3 отметим, что с возрастанием шага Δt в оптимальном разбиении число математических подобластей сокращается.

Скажем также, что расчеты с разбиением, где каждая ячейка системы объявляется математической подобластью (см. предпоследние строки табл. 2 и 3), можно считать расчетами по методу ВДЭ из [7], правда, там этот метод рассматривается для P_1 -приближения уравнения переноса фотонов. В связи с этим заметим, что ни в одном из столбцов табл. 2 и 3 такой расчет не является оптимальным по времени.

Теперь коснемся вопроса о затратах оперативной памяти. Если нужно решить задачу, скажем, с $\hat{p} = 1500$ и числом групп $i1 = 50$, то число элементов матрицы $A_{k,p+1/2,q+1/2}$ в методе Райбики равно $1500 \cdot 1500 \cdot 50 = 112\,500\,000$ ($\sim 10^8$). Если систему разбить хотя бы на 10 областей со 150 точками, то число элементов матрицы $A_{k,p+1/2,q+1/2}$, которая будет использоваться в математических подобластях, равно $50 \cdot 150 \times 150 = 1\,125\,000$ ($\sim 10^6$), т. е. в 100 раз меньше. Таким образом, предлагаемый метод заметно сокращает объем оперативной памяти, требуемый при его реализации.

Таблица 2

Результаты решения варианта 2 задачи Флека для различных разбиений физических областей системы на математические области

Метод расчета	$\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$		$\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$		$\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$		$\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$	
	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге
Метод Райбики	21:10:20	1,12	3:23:16	1,54	0:46:02	2,86	0:45:36	6,43
$d = 2$	5:30:38	1,13	0:57:08	1,59	0:20:45	2,94	0:36:45	6,37
$d = 3$	2:30:30	1,13	0:25:20	1,59	0:09:18	2,94	0:14:45	6,5
$d = 4$	1:33:52	1,13	0:15:21	1,59	0:05:24	2,94	0:17:31	26,1
$d = 6$	1:05:12	1,13	0:09:18	1,59	0:02:50	2,94	0:13:18	42,9
$d = 12$	1:04:00	2,73	0:12:46	6,08	0:05:22	16,7	0:08:37	64,0
$d = 24$	0:58:42	3,84	0:11:32	8,45	0:04:35	23,6	0:06:36	87,6
$d = 40$	0:57:50	4,53	0:11:21	9,99	0:04:13	27,5	0:06:41	115
$d = 60$	0:55:40	4,70	0:11:00	10,5	0:03:32	27,8	0:05:20	110
$d = 90$	0:57:51	5,25	0:11:12	11,4	0:03:24	29,1	0:06:11	142
$d = 120$	1:00:07	5,68	0:12:24	13,1	0:05:15	45,3	0:11:00	296
$d = 180$	1:04:11	6,31	0:11:46	12,7	0:03:35	32,1	0:08:11	216
$d = 360$	1:07:30	6,67	0:15:00	16,7	0:10:52	105	0:27:30	785
ST_n -схема	0:33:25	1,07	0:07:27	2,06	0:03:48	3,31	0:08:00	6,73

Таблица 3

Результаты решения варианта 1 задачи Флека для различных разбиений физических областей системы на математические области

Метод расчета	$\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$		$\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$		$\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$		$\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$	
	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге
Метод Райбики	18:29:00	1,34	2:57:25	2,13	0:16:30	4,00	0:15:30	5,67
1, 1, 1	4:31:45	2,09	1:02:30	3,94	0:18:02	7,67	0:12:08	9,50
2, 2, 2	2:34:23	2,98	0:42:27	7,10	0:14:35	18,4	0:11:40	20,5
3, 3, 3	1:55:47	3,39	0:30:36	8,14	0:11:01	21,9	0:10:00	26,2
4, 4, 4	1:36:00	3,63	0:24:24	8,64	0:09:08	23,7	0:09:02	30,5
6, 6, 6	1:17:33	3,87	0:18:50	9,25	0:07:27	26,6	0:08:33	40,0
12, 12, 12	0:59:48	4,34	0:13:42	10,0	0:06:05	32,8	0:08:38	64,8
24, 24, 24	0:56:43	5,06	0:11:52	11,1	0:06:34	47,6	0:11:43	108
48, 32, 40	0:57:20	5,73	0:13:06	14,0	0:08:42	73,7	0:12:50	157
72, 48, 60	1:02:30	6,57	0:11:22	12,3	0:07:52	71,3	0:14:38	188
144, 96, 120	1:06:11	7,36	0:19:21	23,3	0:18:10	181	0:27:03	387
ST_n -схема	0:35:50	1,7	0:13:30	3,23	0:07:56	4,85	0:08:46	5,20

Об одном способе оптимального разбиения

Разумеется, при решении задач на практике, особенно когда шаг по времени заранее не известен, определить оптимальное разбиение, не проводя численных экспериментов, очень сложно. Автор пока не знает, как это сделать. Однако получить заметный выигрыш по времени по

сравнению с методом Райбики с помощью предлагаемого алгоритма решения задачи переноса излучения можно.

Пусть предстоит выполнить расчет задачи Флека до установления со следующим режимом выбора шагов (k — номер шага):

$$\begin{aligned}
 1 \leq k \leq 500, & \quad \Delta t = 2 \cdot 10^{-6}; \\
 501 \leq k \leq 1000, & \quad \Delta t = 4 \cdot 10^{-6}; \\
 1001 \leq k \leq 1500, & \quad \Delta t = 6 \cdot 10^{-6}; \\
 1501 \leq k \leq 2000, & \quad \Delta t = 8 \cdot 10^{-6}; \\
 2001 \leq k \leq 2500, & \quad \Delta t = 10^{-5}; \\
 2501 \leq k \leq 3000, & \quad \Delta t = 2 \cdot 10^{-5}; \\
 3001 \leq k \leq 3500, & \quad \Delta t = 4 \cdot 10^{-5}; \\
 3501 \leq k \leq 4000, & \quad \Delta t = 6 \cdot 10^{-5}; \\
 4001 \leq k \leq 4500, & \quad \Delta t = 8 \cdot 10^{-5}; \\
 4501 \leq k \leq 5000, & \quad \Delta t = 10^{-4}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Результаты решения варианта 1 задачи Флека для различных разбиений физических областей системы на математические области

Метод расчета	Время, ч:мин:с	Среднее число итераций на шаге
Метод Райбики	6:57:36	1,32
Алгоритм 1	0:49:04	4,70
Алгоритм 2	0:33:07	5,96
ST_n -схема	0:32:10	2,17

Автор выражает благодарность В. А. Пастушенко за помощь в оформлении статьи.

Список литературы

1. *Мухалас Д.* Звездные атмосферы. М: Мир, 1982.
2. *Fautrier P. C. R.* // Acad. Sci. Paris. 1964. Vol. 258. P. 3198.
3. *Федотова Л. П., Шагалев Р. М.* Конечно-разностный КМ-метод для двумерных нестационарных процессов переноса в многогрупповом кинетическом приближении // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 6.
4. *Зуев А. И., Карлыханов Н. Г.* Метод решения уравнений радиационно-кондуктивного теплопереноса // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 4.
5. *Гусев В. Ю., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б.* Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения // Там же. 1984. Т. 24, № 12.
6. *Грошев Е. В.* Об одном методе ускорения сходимости итераций для численного решения одномерного нестационарного уравнения переноса излучения в многогрупповом кинетическом приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1992. Вып. 1.
7. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А.* Метод выделения диагональной матрицы для численного решения уравнений переноса излучения в P1-приближении по схеме "Ромб" // Там же. 2006. Вып. 1.

Интуиция подсказывает, что в случае большого разнообразия шагов нужное разбиение можно получить следующим образом. Предварительно необходимо рассчитать задачу с постоянным, средним шагом для данной системы и найти оптимальное разбиение для него, а затем с таким разбиением уже считать задачу по режиму (11).

В качестве такого шага можно взять время, при котором свет проходит через систему, от одного ее конца до другого. Для этого шага $c\Delta t = 4$ ($c = 3000$ — скорость света), следовательно $\Delta t = 0,00133\dots 3$. Заметим, что это значение Δt , как минимум, в 10 раз больше любого шага в (11).

Оптимальное разбиение для такого среднего шага — (6, 6, 6), т. е. каждая физическая область разбивается на шесть равных математических подобластей, причем этот факт определяется за 5-10 шагов счета (не обязательно считать задачу до установления). Расчет с таким разбиением назовем алгоритмом 1.

Если же провести все расчеты по режиму (11) с разбиениями, указанными в табл. 3, оптимальным будет разбиение (24, 24, 24). Расчет с таким разбиением назовем алгоритмом 2.

В табл. 4 приводятся результаты расчета задачи Флека с режимом счета (11) при помощи метода Райбики, с алгоритмами 1 и 2, а также с использованием ST_n -схемы.

Алгоритм 1 сокращает время счета задачи по сравнению с методом Райбики в 8,5 раза и уступает ST_n -схеме в 1,5 раза. Алгоритм 2 сокращает время счета задачи по сравнению с методом Райбики в 12,7 раза, и уступает ST_n -схеме в 1,03 раза.

8. *Rybicki G.* // J. of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 1971. Vol. 11. P. 589.
9. *Карлыханов Н. Г.* Построение оптимальных многодиагональных методов решения задач переноса излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 4.
10. *Гусев В. Ю., Завьялов В. В., Козманов М. Ю.* Об ускорении сходимости итераций для системы переноса теплового излучения в кинетическом приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 2.
11. *Бутнева О. В., Шумилин В. А.* Численное исследование сходимости итераций по подобластям при решении нестационарного уравнения переноса нейтронов // Там же. 1994. Вып. 1.
12. *Fleck J. A., Cummings J. D.* // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313–342.
13. *Грошев Е. В., Пастушенко А. М., Юдинцев В. Ф.* Об одной трехточечной разностной схеме с весовым множителем для уравнения переноса // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып. 2.
14. *Грошев Е. В., Мясчиц С. В., Юдинцев В. Ф.* О некоторых свойствах DS_n^2 -схем для сферически-симметричного уравнения переноса // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 2.

Статья поступила в редакцию 10.06.09.