

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Математическое моделирование
физических процессов**

ВЫПУСК 1

2010

ФГУП
"РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР —
ВНИИЭФ"

ВОПРОСЫ
АТОМНОЙ НАУКИ
И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

Математическое моделирование
физических процессов

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 1

Издается с 1978 г.

Саров — 2010

Главный редактор Р. М. Шагалиев

Редакционная коллегия:

Ю. Г. Бартенов (ВНИИЭФ), Ю. А. Бондаренко (ВНИИЭФ) — зам. главного редактора,
А. Н. Быков (ВНИИЭФ), Н. Н. Залялов (ВНИИЭФ), А. Д. Зубов (ВНИИТФ),
Н. В. Иванов (ВНИИЭФ), В. Л. Ковалев (МГУ), М. Ю. Козманов (ВНИИТФ),
В. Е. Неуважаев (ВНИИТФ), Е. В. Соколовская (ВНИИЭФ) — ответственный секретарь,
А. А. Соловьев (ВНИИЭФ), В. Ф. Спиридонов (ВНИИЭФ),
В. Ф. Тишкин (ИММ РАН) — зам. главного редактора, А. А. Холостов (ВНИИЭФ),
А. Н. Чекалин (Казанский ГУ), В. Н. Чубариков (МГУ)

УДК 519.6

МАТРИЦА ИСКУССТВЕННЫХ ВЯЗКОСТЕЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ЛАГРАНЖЕВОЙ ГАЗОДИНАМИКИ, СПОСОБСТВУЮЩАЯ УМЕНЬШЕНИЮ "ЭНТРОПИЙНОГО СЛЕДА" В ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТАХ

А. М. Стенин, Е. А. Соловьева

(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

В систему уравнений газовой динамики, описывающую двумерные течения в эйлеровых координатах, консервативным образом вводятся искусственные диффузии массы, импульса и полной энергии. После перехода к лагранжевым координатам получены формулы для скорости искусственной диффузии массы в уравнении неразрывности, а также для искусственных вязкостей в уравнениях движения и энергии. Искусственная вязкость в уравнении движения представляет собой тензор, пропорциональный дивергенции тензора скоростей деформаций.

Результаты тестовых расчетов демонстрируют высокую эффективность новой системы вязкостей по уменьшению *энтропийного следа* в численном решении уравнений лагранжевой газовой динамики.

Ключевые слова: лагранжева газодинамика, искусственная вязкость, тензорная вязкость, энтропийный след, задача Ноха, задача Зальцмана.

Введение

Данная работа посвящена обобщению на двумерный случай набора, или матрицы, искусственных вязкостей, полученных в [1] для каждого из уравнений газодинамической системы, описывающей одномерные течения в переменных Лагранжа.

Известно (см., например, [2–4]), что одним из существенных недостатков метода сквозного счета гидродинамических скачков с помощью искусственной вязкости, предложенного в 1950 г. Нейманом и Рихтмайером [5] и ставшего к настоящему времени классическим, является появление в численном решении так называемого *энтропийного следа*. Энтропийный след проявляется в виде ошибок конечной величины в значениях плотности и внутренней энергии:

- около внешних границ счетных областей;
- около внутренних границ раздела между разными веществами после прохождения через эти границы ударной волны (УВ);
- при столкновении УВ даже в однородном веществе;
- при резком изменении шага по времени;
- при переходе УВ через резкую неравномерность в размерах ячеек.

Предложенное позднее добавление линейной искусственной вязкости способствует уменьшению осцилляций за фронтом УВ в численных расчетах, но по существу не влияет на энтропийный след.

В 1987 г. в работе Ноха [2] отмечено, что энтропийный след является свойством дифференциальных уравнений с классической вязкостью. Там же для уменьшения энтропийного следа был предложен метод искусственной теплопроводности. Позднее Ю. А. Бондаренко [3] с помощью расчетов на сходимость подтвердил вывод о том, что решающую роль в наличии энтропийного следа

в численных расчетах играют используемые виды искусственных вязкостей, включенных в систему дифференциальных уравнений газовой динамики, а не применяемая разностная схема.

В 2002 г. для одномерных течений, обладающих плоской, цилиндрической и сферической симметрией, авторами [1] было предложено использовать искусственные вязкости во всех трех уравнениях газовой динамики в лагранжевых координатах. Результаты проведенных тестовых расчетов ряда типичных одномерных задач показали высокую эффективность применения матрицы вязкостей для уменьшения энтропийного следа.

В работе [1] формулы для скорости искусственной диффузии массы в уравнении неразрывности, для искусственных вязкостей в уравнениях движения и энергии, записанных в переменных Лагранжа, были получены на основе системы уравнений газовой динамики в эйлеровых координатах. В эти уравнения консервативным образом были введены искусственная диффузия массы, искусственная диффузия импульса и искусственная диффузия полной энергии.

Для получения матрицы вязкостей в двумерном случае используется тот же подход.

Искусственная диффузия массы, импульса и энергии

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики, записанную в виде законов сохранения в эйлеровых координатах. Введем искусственную диффузию массы в уравнение неразрывности, искусственную диффузию импульса — в уравнения движения, искусственную диффузию полной энергии — в уравнение энергии. Для двумерных течений, обладающих плоской симметрией, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \frac{\partial \rho}{\partial y} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e + P) u}{\partial x} + \frac{\partial(\rho e + P) v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \frac{\partial(\rho e)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \frac{\partial(\rho e)}{\partial y} \right). \quad (4)$$

Здесь используются следующие обозначения: ρ — плотность; P — газодинамическое давление; $e = E + 0,5 \vec{U}^2$ — полная энергия; E — удельная внутренняя энергия. Пространственные точки $\vec{Z} = (x, y)$ являются точками плоскости XOY прямоугольной декартовой системы координат; вектор скорости $\vec{U} = (u, v)$ имеет составляющие u — вдоль оси OX , v — вдоль оси OY . Функция $C_U \geq 0$ — коэффициент искусственной диффузии (вязкости) с единицами измерения скорости; $l \geq 0$ — малый параметр с единицами измерения длины. C_U и l не предполагаются постоянными. Давление, плотность и энергия связаны уравнением состояния

$$P = P(\rho, E). \quad (5)$$

Перейдем от системы уравнений (1)–(4) путем эквивалентных преобразований к уравнениям в лагранжевых координатах. Предварительно через

$$u_B = \frac{1}{\rho} C_U l \frac{\partial \rho}{\partial x}; \quad v_B = \frac{1}{\rho} C_U l \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (6)$$

обозначим компоненты скорости искусственной диффузии массы $\vec{U}_B = (u_B, v_B)$. Введем субстанциональную производную по времени $\frac{D}{Dt}$ вдоль траектории $\frac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{U}$, определив ее формулой

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (7)$$

где $\vec{U} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ — модифицированная скорость вещества:

$$\tilde{u} = u - u_B; \quad \tilde{v} = v - v_B. \quad (8)$$

После необходимых преобразований получим систему уравнений газодинамики в лагранжевых координатах с искусственными вязкостями во всех уравнениях:

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{U}; \quad (9)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 0; \quad (10)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (11)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad (12)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + \frac{\partial Pu}{\partial x} + \frac{\partial Pv}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial e}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Здесь важно отметить, что благодаря введению в рассмотрение производной по времени (7) при выводе уравнений (9)–(13) не потребовалось предположения о постоянстве коэффициента C_U и малого параметра l .

Учитывая, что $e = E + 0,5\vec{U}^2$, преобразуем уравнение энергии (13):

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} + \frac{\partial Pu}{\partial x} + \frac{\partial Pv}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial E}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial (0,5\vec{U}^2)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial (0,5\vec{U}^2)}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

В итоге уравнения движения (11), (12) и уравнение для полной энергии (14) можно записать в виде

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \text{grad } P = \text{div } \tilde{S}; \quad (15)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + \text{div} (P\vec{U}) = \text{div } \vec{Q}_E + \text{div} (\tilde{S}\vec{U}). \quad (16)$$

Здесь \vec{Q}_E — вектор, пропорциональный градиенту удельной внутренней энергии, который представляет собой искусственный поток внутренней (тепловой) энергии:

$$\vec{Q}_E = \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial E}{\partial x}, C_{Ul} \rho \frac{\partial E}{\partial y} \right); \quad (17)$$

\tilde{S} — тензор, пропорциональный градиенту скорости:

$$\tilde{S} = C_{Ul} \rho \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

В правой части уравнения движения (15) получена дивергенция от \tilde{S} (18) — несимметричного тензора градиента скорости, умноженного на некий коэффициент. В правой части уравнения для полной

энергии (16) — сумма двух слагаемых: дивергенции от вектора \vec{Q}_E (17), соответствующей так называемой искусственной теплопроводности, и дивергенции вектора $\vec{S}\vec{U}$, являющегося произведением тензора \vec{S} на вектор скорости \vec{U} .

Учитывая в (14), что $e = E + 0,5\vec{U}^2$, и используя уравнения движения (11), (12), получаем уравнение для удельной внутренней энергии:

$$\rho \frac{DE}{Dt} + P \operatorname{div} \vec{U} = \operatorname{div} \vec{Q}_E + Q_{\vec{S}}. \quad (19)$$

Здесь слагаемое $Q_{\vec{S}}$ определяет диссипацию кинетической энергии во внутреннюю энергию вследствие действия вязкости \vec{S} в уравнении движения (15):

$$Q_{\vec{S}} = C_U l \rho \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right).$$

Тензор \vec{S} (18) в уравнении движения (15), пропорциональный градиенту скорости, представляет собой несимметричный тензор. Он включает в себя составляющую градиента скорости, соответствующую вращению газодинамической системы как твердого тела, и не инвариантен относительно поворота осей координат. Поэтому вместо него в уравнении движения (15) и в уравнении для полной энергии (16) целесообразно использовать тензор вязкости \hat{S} , пропорциональный тензору скоростей деформаций для случая плоской симметрии [6], который отличается от тензора градиента скорости тем, что из него исключена составляющая, соответствующая вращению системы как твердого тела, и что он является симметричным. То есть вместо уравнений (15), (16) возьмем уравнения

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \operatorname{grad} P = \operatorname{div} \hat{S}; \quad (20)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + \operatorname{div} (P\vec{U}) = \operatorname{div} \vec{Q}_E + \operatorname{div} (\hat{S}\vec{U}), \quad (21)$$

где

$$\hat{S} = C_U l \rho \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Более подробно уравнения движения (20) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right); \\ \rho \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая в (21), что $e = E + 0,5\vec{U}^2$, и используя уравнения движения (23), получаем уравнение для удельной внутренней энергии:

$$\rho \frac{DE}{Dt} + P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(C_U l \rho \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_U l \rho \frac{\partial E}{\partial y} \right) + C_U l \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right].$$

То есть имеется уравнение для удельной внутренней энергии того же вида (19), но с диссипативным слагаемым $Q_{\hat{S}}$, обусловленным тензором вязкости (22):

$$Q_{\hat{S}} = C_U l \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Однако окончательно в качестве тензора искусственной вязкости \hat{D} в уравнении движения (15), а следовательно, и в уравнении энергии (16), как и в одномерном случае [1], будем использовать тензор, пропорциональный девиатору тензора скоростей деформаций. То есть будем использовать уравнение движения и уравнение энергии

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \text{grad } P = \text{div} \hat{D}; \quad (24)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} + \text{div} (P\vec{U}) = \text{div} \vec{Q}_E + \text{div} (\hat{D}\vec{U}), \quad (25)$$

где

$$\hat{D} = \hat{S} - \left(C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \text{div} \vec{U} \right) \hat{I} = C_{Ul} \rho \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \text{div} \vec{U} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2} \text{div} \vec{U} \end{pmatrix}; \quad (26)$$

\hat{I} — единичный тензор. Тогда уравнения (24) для компонентов скорости записываются в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right); \\ \rho \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Используя в (25) уравнения движения (27) и учитывая, что $e = E + 0,5\vec{U}^2$, получаем следующее уравнение для удельной внутренней энергии:

$$\begin{aligned} \rho \frac{DE}{Dt} + P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{Ul} \rho \frac{\partial E}{\partial y} \right) + \\ &+ C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет тот же вид уравнения (19), но отличается от него диссипативным слагаемым $Q_{\hat{D}}$ вида

$$Q_{\hat{D}} = C_{Ul} \rho \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right],$$

которое определяет диссипацию кинетической энергии во внутреннюю энергию вследствие действия тензорной вязкости \hat{D} (26) в уравнении движения (24).

Таким образом, получена следующая система уравнений в лагранжевых координатах с искусственной вязкостью в каждом из уравнений:

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{U}; \quad (28)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{U} = 0; \quad (29)$$

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \text{grad } P = \text{div} \hat{D}; \quad (30)$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} + P \text{div} \vec{U} = \text{div} \vec{Q}_E + Q_{\hat{D}}. \quad (31)$$

Здесь $\vec{U} = \vec{U} - \vec{U}_B$ (см. (8)), \vec{U}_B — скорость искусственной диффузии массы (6):

$$\vec{U}_B = \frac{1}{\rho} C_{Ul} \text{grad} \left(\frac{1}{\rho} \right). \quad (32)$$

Производная $\frac{D}{Dt}$ вдоль траектории $\frac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{U}$ определяется формулой (7); \hat{D} — тензор искусственной вязкости (26); \vec{Q}_E — поток искусственной диффузии энергии (17).

Численные расчеты

Для численного решения системы уравнений (28)–(31) используется полностью консервативная разностная схема типа *крест* на регулярной четырехугольной сетке, но с определением всех величин на моменты времени с целочисленными индексами, которая может быть получена с помощью дискретного вариационного метода [7].

Приведем порядок вычисления значений сеточных функций f^{n+1} на момент времени $t = t^{n+1}$ при известных значениях f^n на момент времени $t = t^n$. Как обычно, целочисленными нижними индексами здесь обозначаются сеточные функции, определенные в узлах, а полуцелыми — сеточные функции, определенные в ячейках сетки.

На первом полушаге вычисляются промежуточные значения величин $f^{n+1/2}$ на момент времени $t = t^{n+1/2} = 0,5(t^{n+1} + t^n)$:

$$Z_{ik}^{n+1/2} = Z_{ik}^n + 0,5 \tau^{n+1/2} U_{ik}^n; \quad (33)$$

$$\rho_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2} = \frac{M_{i-1/2, k-1/2}}{S_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2}}; \quad (34)$$

$$E_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2} = E_{i-1/2, k-1/2}^n - 0,5 \tau^{n+1/2} P_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2} \text{DIV}_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2}(U^n); \quad (35)$$

$$P_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2} = P\left(\rho_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2}, E_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2}\right). \quad (36)$$

Здесь $\tau^{n+1/2} = t^{n+1} - t^n$; $M_{i-1/2, k-1/2}$ и $S_{i-1/2, k-1/2}$ — масса и площадь ячейки сетки соответственно.

Разностный оператор DIV аппроксимирует дифференциальный оператор $\frac{1}{\rho} \text{div}$.

Все вычисления первого полушага предназначены исключительно для того, чтобы получить промежуточные значения давления $P_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2}$. После этого вычисляются новые значения всех величин на момент времени $t = t^{n+1}$:

$$U_{ik}^{n+1} = U_{ik}^n - \tau^{n+1/2} \text{GRAD}_{ik}^{n+1/2}\left(P^{n+1/2}\right); \quad (37)$$

$$Z_{ik}^{n+1} = Z_{ik}^{n+1/2} + 0,5 \tau^{n+1/2} U_{ik}^{n+1}; \quad (38)$$

$$\rho_{i-1/2, k-1/2}^{n+1} = \frac{M_{i-1/2, k-1/2}}{S_{i-1/2, k-1/2}^{n+1}}; \quad (39)$$

$$E_{i-1/2, k-1/2}^{n+1} = E_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2} - 0,5 \tau^{n+1/2} P_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2} \text{DIV}_{i-1/2, k-1/2}^{n+1/2}(U^{n+1}); \quad (40)$$

$$P_{i-1/2, k-1/2}^{n+1} = P\left(\rho_{i-1/2, k-1/2}^{n+1}, E_{i-1/2, k-1/2}^{n+1}\right). \quad (41)$$

Разностный оператор GRAD в (37) аппроксимирует дифференциальный оператор $\frac{1}{\rho} \text{grad}$.

В разностных формулах (33)–(41) не учтены искусственные вязкости. Классическая скалярная искусственная вязкость, которая используется в сравнительных расчетах, вычисляется на нижнем слое по времени $t = t^n$ и добавляется к давлению в уравнениях (35), (37) и (40). Новые искусственные вязкости также вычисляются на нижнем слое по времени.

Скорость искусственной диффузии массы учитывается в уравнениях (33), (38). Тензор искусственной вязкости \hat{D} (26) учитывается в уравнении для промежуточной энергии (35), в уравнении движения (37) и в уравнении энергии (40). Поток искусственной диффузии энергии используется в уравнениях (35) и (40). Значения скорости искусственной диффузии массы (32) в разностной схеме определяются в узлах пространственной сетки, значения компонент тензора вязкости (26) — в

ячейках сетки, значения потоков искусственной диффузии энергии (17) определяются на сторонах ячеек сетки.

Коэффициенты вязкости C_U и l пока вычисляются с помощью самых простых формул. Неотрицательный коэффициент $C_U \geq 0$ с единицами измерения скорости для тензорной вязкости (26) вычисляется в ячейках сетки по формуле

$$C_U = \begin{cases} -C_{\text{кв}} l \text{DIV} \vec{U} + C_{\text{л}} C_w, & \text{если } \text{DIV} \vec{U} \leq 0; \\ 0, & \text{если } \text{DIV} \vec{U} > 0. \end{cases} \quad (42)$$

Здесь DIV — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор дивергенции div в ячейках сетки; C_w — изоэнтропическая скорость звука в ячейке сетки; $C_{\text{кв}}$ — безразмерный коэффициент квадратичной части искусственной вязкости; $C_{\text{л}}$ — безразмерный коэффициент линейной части искусственной вязкости.

Линейный характерный размер ячейки сетки l в (42) и (26) вычисляется по формуле, используемой во многих методиках:

$$l = \frac{S}{\sqrt{0,5 (d_1^2 + d_2^2)}}, \quad (43)$$

где S — площадь ячейки сетки; d_1, d_2 — длины диагоналей ячейки.

Для вычисления искусственной вязкости (32) коэффициент вязкости C_U в узлах сетки, как и значение l , вычисляется простым арифметическим усреднением по ячейкам сетки, для которых данный узел является общей вершиной. Для вычисления потоков искусственной диффузии энергии на сторонах ячеек сетки значения C_U и l усредняются по двум соседним ячейкам.

Все представленные ниже расчеты, проведенные с новыми вязкостями, сравнивались с расчетами, проведенными с классической вязкостью, используемой как скалярная добавка к давлению. Скалярная вязкость в этих расчетах вычислялась по формуле

$$Q = -C_U \rho l \text{DIV} \vec{U}$$

с теми же коэффициентами C_U и l из (42) и (43), что и в новых вязкостях. Все расчеты были проведены с одними и теми же безразмерными коэффициентами $C_{\text{кв}} = 4, C_{\text{л}} = 0,4$.

Цилиндрическая задача Ноха. Расчеты цилиндрической задачи Ноха проводились в двух вариантах: вариант 1 — на радиальной сетке; вариант 2 — на квадратной сетке.

В первом варианте счетная область — четверть круга $0 \leq R \leq 1$, расположенная в первом координатном квадранте. Радиальная начальная сетка строится равномерным разбиением на 200 интервалов по радиусу и 10 интервалов по углу.

Во втором варианте счетная область — квадрат $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$. Начальная сетка — квадратная с числом ячеек 50×50 .

Постановка задачи берется из работы Ноха [2]. Там же приводится аналитическое решение. В обоих вариантах вещество — идеальный газ: $P = (\gamma - 1) \rho E$, $\gamma = 5/3$. Начальные значения: плотность $\rho^0 = 1$, энергия $E^0 = 0$, радиальная скорость $U_R = -1$. Граничные условия: границы $x = 0$ и $y = 0$ — жесткие стенки; на внешних границах $U_R = -1$.

По результатам расчетов прежде всего заметим, что, как видно из рис. 1, новая система вязкостей оказывает стабилизирующее воздействие на пространственную сетку в расчете задачи Ноха на квадратной сетке, хотя при аппроксимации новых вязкостей никаких специальных мер для этого не принималось.

Судить об ошибке, возникающей вследствие энтропийного следа в значениях плотности и энергии в окрестности центра схождения скоростей, можно по радиальным распределениям плотности и энергии, представленным на рис. 2, 3.

На рис. 2,а, 2,б видно значительное уменьшение энтропийного следа при использовании в численных расчетах новой матрицы искусственных вязкостей на радиальной сетке. Максимальное откло-

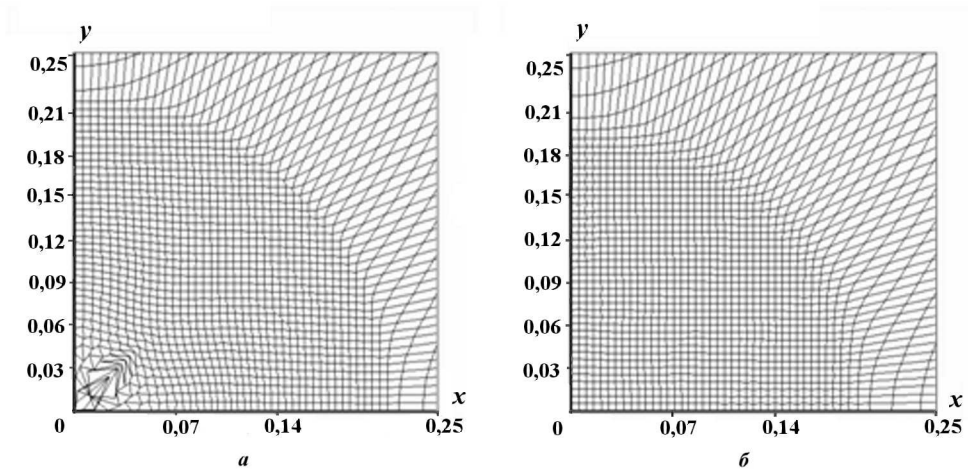


Рис. 1. Цилиндрическая задача Ноха на квадратной сетке, $t = 0,6$. Фрагмент счетной сетки: a — расчет с вязкостью Неймана–Рихтмайера; b — расчет с полной матрицей вязкостей

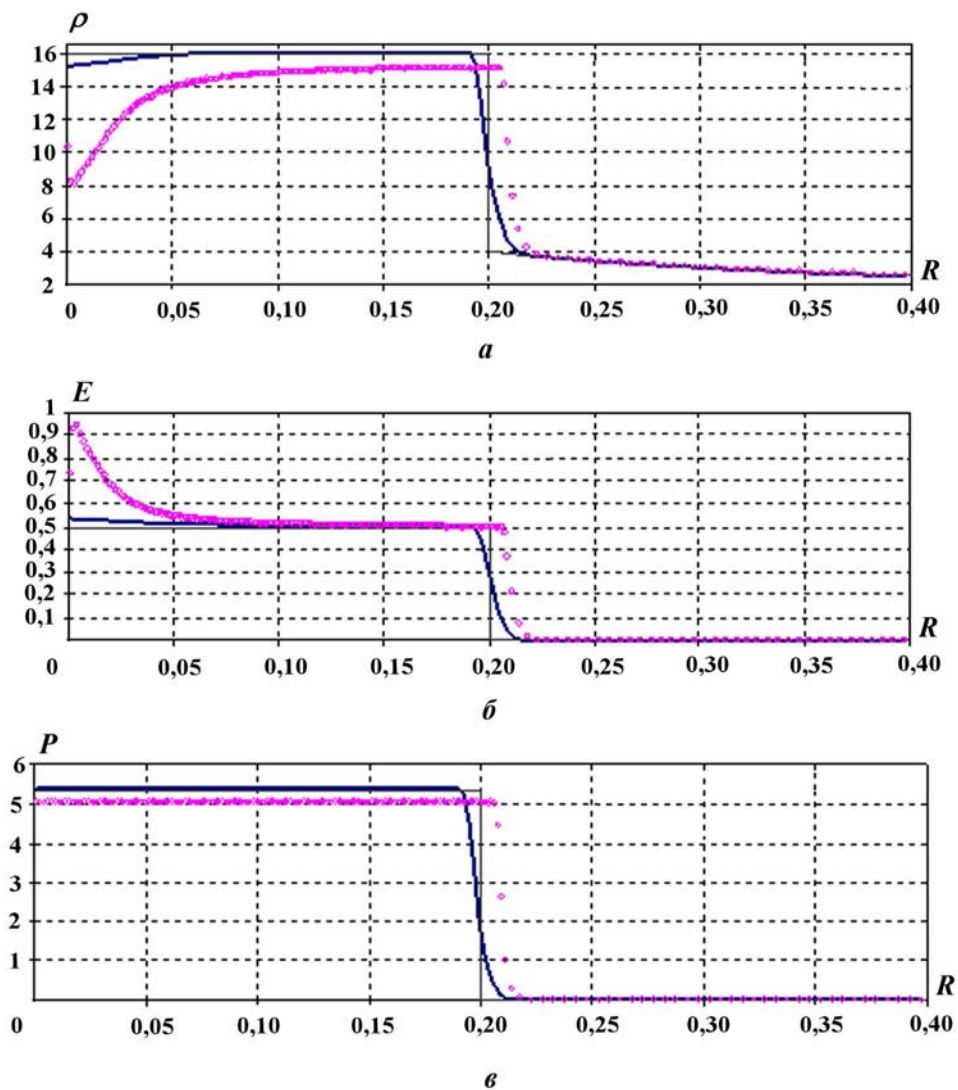


Рис. 2. Цилиндрическая задача Ноха на радиальной сетке, $t = 0,6$. Профили плотности (a), удельной внутренней энергии (b), давления (c): \circ — расчет с классической вязкостью; — — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

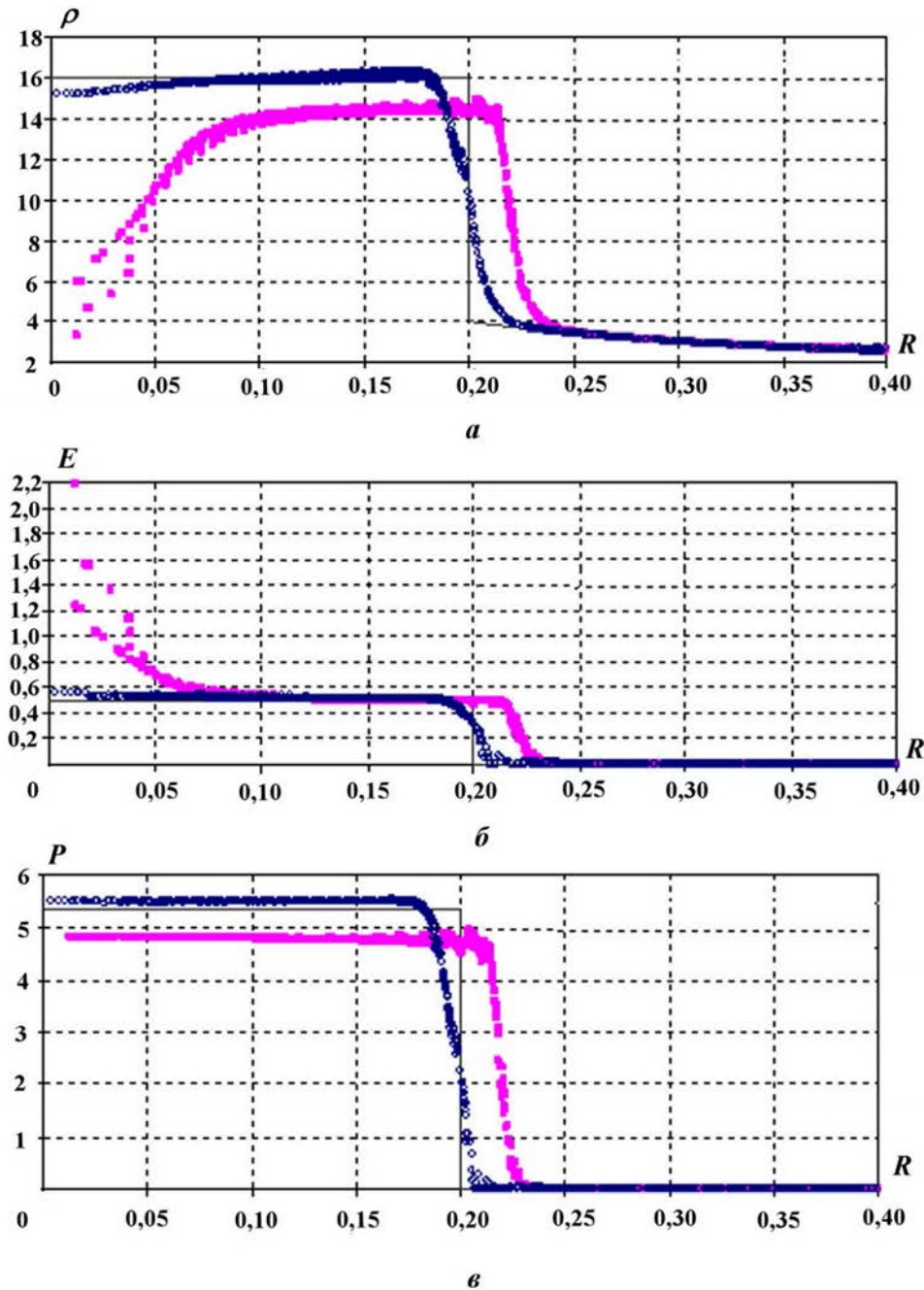


Рис. 3. Цилиндрическая задача Ноха на квадратной сетке, $t = 0,6$. Распределение плотностей (а), энергий (б), давлений (в): ■ — расчет с классической вязкостью; ○ — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

нение плотности от точного значения (см. рис. 2,а) в расчете с использованием матрицы искусственных вязкостей составляет 4,9 %, а в расчете с использованием классической вязкости — 48,8 %. Максимальная ошибка в значениях удельной внутренней энергии (см. рис. 2,б) в расчете с использованием матрицы искусственных вязкостей составляет 6,5 %, а в расчете с классической вязкостью — 88,6 %.

Профили давления в обоих расчетах, как и обычно, не имеют особенностей в области энтропийного следа (см. рис. 2,в). Однако значение давления за фронтом УВ в расчете с классической вязкостью значительно отличается от точного аналитического решения. При этом положение фронта УВ,

полученное в расчете с классической вязкостью, значительно опережает положение фронта УВ в аналитическом решении.

То же самое можно сказать и по результатам расчетов задачи Ноха на квадратной сетке (см. рис. 3).

В обоих вариантах расчетов применение новой матрицы искусственных вязкостей радикально уточняет положение фронта УВ, а также значения плотности и давления за фронтом УВ по сравнению с расчетами, в которых используется классическая вязкость.

Задача Зальцмана. Постановка задачи и результаты многочисленных расчетов этой задачи содержатся, например, в работе [8].

В начальный момент времени $t = 0$ счетная область представляет собой прямоугольник $X_{\min} \leq x \leq X_{\max}$; $Y_{\min} \leq y \leq Y_{\max}$ в декартовой плоскости XOY . Регулярная пространственная сетка строится разбиением счетной области на $N_i - 1$ интервалов вдоль оси OX и на $N_k - 1$ интервалов вдоль оси OY , так что сетка состоит из $N_i \times N_k$ узлов $\vec{Z}_{i,k} = (x_{i,k}, y_{i,k})$, $i = 1, 2, \dots, N_i$, $k = 1, 2, \dots, N_k$ (рис. 4).

Вдоль оси OY принято равномерное разбиение по длине интервала, т. е. ординаты $y_{i,k}$, узлов сетки вычисляются по формуле

$$y_{i,k} = Y_{\min} + (k - 1) h_Y, \quad i = 1, 2, \dots, N_i, \quad k = 1, 2, \dots, N_k,$$

где $h_Y = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{N_k - 1}$.

Абсциссы узлов сетки вычисляются по следующей формуле:

$$x_{i,k} = X_{\min} + (i - 1) h_X + (N_k - k) h_X \sin\left(\frac{(i - 1) \pi}{N_i - 1}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N_i, \quad k = 1, 2, \dots, N_k,$$

где $h_X = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{N_i - 1}$.

Представленные здесь расчеты задачи Зальцмана проводились при следующих значениях параметров, определяющих геометрию счетной области и пространственную сетку: $X_{\min} = 0$; $X_{\max} = 1$; $Y_{\min} = 0$; $Y_{\max} = 0,1$; $N_i = 101$; $N_k = 11$.

Вещество в счетной области — идеальный газ с уравнением состояния $P = (\gamma - 1) \rho E$, $\gamma = 5/3$; начальная плотность газа $\rho^0 = 1$; начальная энергия $E^0 = 0$; начальная скорость $U_X = 0$, $U_Y = 0$. На левой границе в качестве граничного условия задана постоянная скорость $U_X = 1$. Остальные границы — жесткие стенки.

В этой задаче сначала сильная УВ движется по сетке, непараллельной ее фронту, от левой границы области к ее правой границе. Затем, после отражения первой УВ от правой жесткой стенки, образуется вторая УВ, движущаяся справа налево. После отражения второй УВ от левой границы образуется третья УВ, идущая слева направо, и т. д. до полного вырождения объема счетной области.

В таблице приводятся параметры первых трех УВ и времена их отражения от границ области.

На рис. 5–7 представлены пространственные распределения плотности и давления по всем точкам счетной области, полученные на моменты времени $t = 0,7$, $t = 0,85$, $t = 0,925$ в расчетах задачи Зальцмана. В эти моменты времени фиксируются первые три УВ, параметры которых приведены в таблице. Результаты расчетов с новым набором искусственных вязкостей сравниваются с результатами расчетов с классической вязкостью и с аналитическим решением.

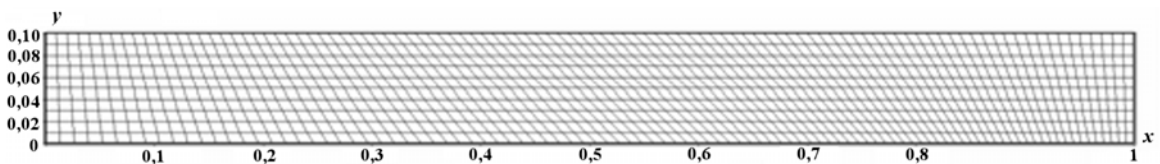


Рис. 4. Задача Зальцмана. Начальная сетка

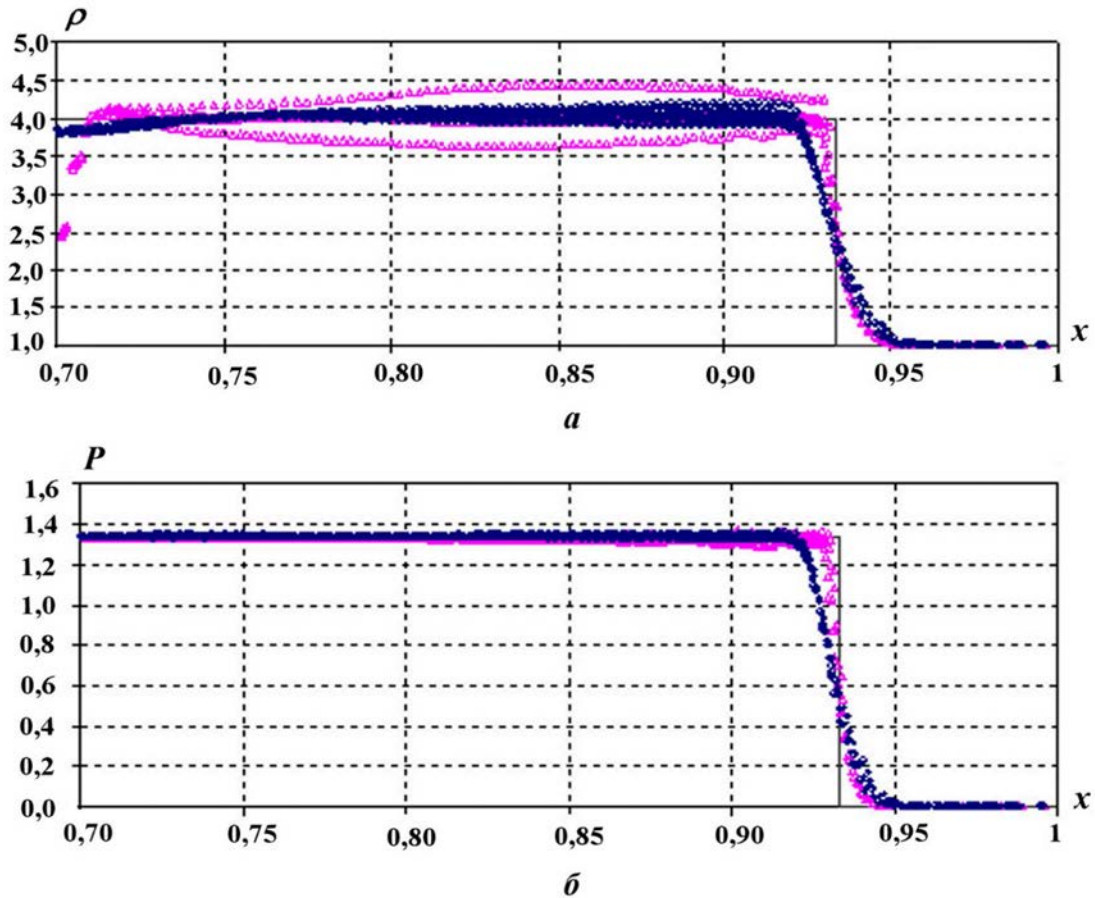


Рис. 5. Задача Зальцмана, $t = 0,7$. Распределение плотностей (а) и давлений (б): Δ — расчет с классической вязкостью; \bullet — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

Из рис. 5–7 видно, что использование новой матрицы искусственных вязкостей позволяет не только практически убрать энтропийный след на границах счетной области, но и существенно улучшить решение внутри области.

Аппроксимируя новые искусственные вязкости на разностной сетке, авторы намеренно не принимали никаких мер, направленных на то, чтобы искусственные вязкости оказывали стабилизирующее действие на лагранжеву пространственную сетку, таких, например, как в работе [8], где для этой цели компоненты тензора искусственной вязкости определялись на сторонах ячеек сетки. В данной работе используется простейший скалярный коэффициент искусственной вязкости C_U (42) и простейший линейный размер ячейки сетки l (43).

Решение вопросов, связанных со стабилизирующим воздействием искусственной вязкости на пространственную сетку, авторы оставляют на будущее. Предложенный подход к получению искусственных вязкостей допускает не только скалярные коэффициенты вязкости C_U и l , но и векторные: $C_U = (C_u, C_v)$ и $l = (l_x, l_y)$.

Можно надеяться, что оптимальный выбор коэффициента искусственной вязкости C_U , векторного или скалярного, и линейного размера ячейки l , векторного или скалярного ориентированного, позволит лучше учесть направление движения фронта УВ относительно пространственной сетки. Это также, по мнению авторов, должно оказывать стабилизирующее воздействие на лагранжеву сетку в численных расчетах.

Несмотря на то, что на данном этапе от новой системы вязкостей не требуется стабилизирующего воздействия на пространственную сетку, из рис. 8 видно, что в расчете с новыми вязкостями качество сетки значительно лучше, чем в расчете с классической вязкостью. Однако основным результатом

Задача Зальцмана. Параметры первых трех УВ и время их отражения от границ области

Параметр	Начальное значение	Первая УВ	Вторая УВ	Третья УВ
Плотность	1	4	10	20
Давление	0	4/3	8	28
Внутренняя энергия	0	0,5	1,2	2,1
Скорость УВ	—	4/3	2/3	2
Время отражения	—	0,75	0,9	0,95

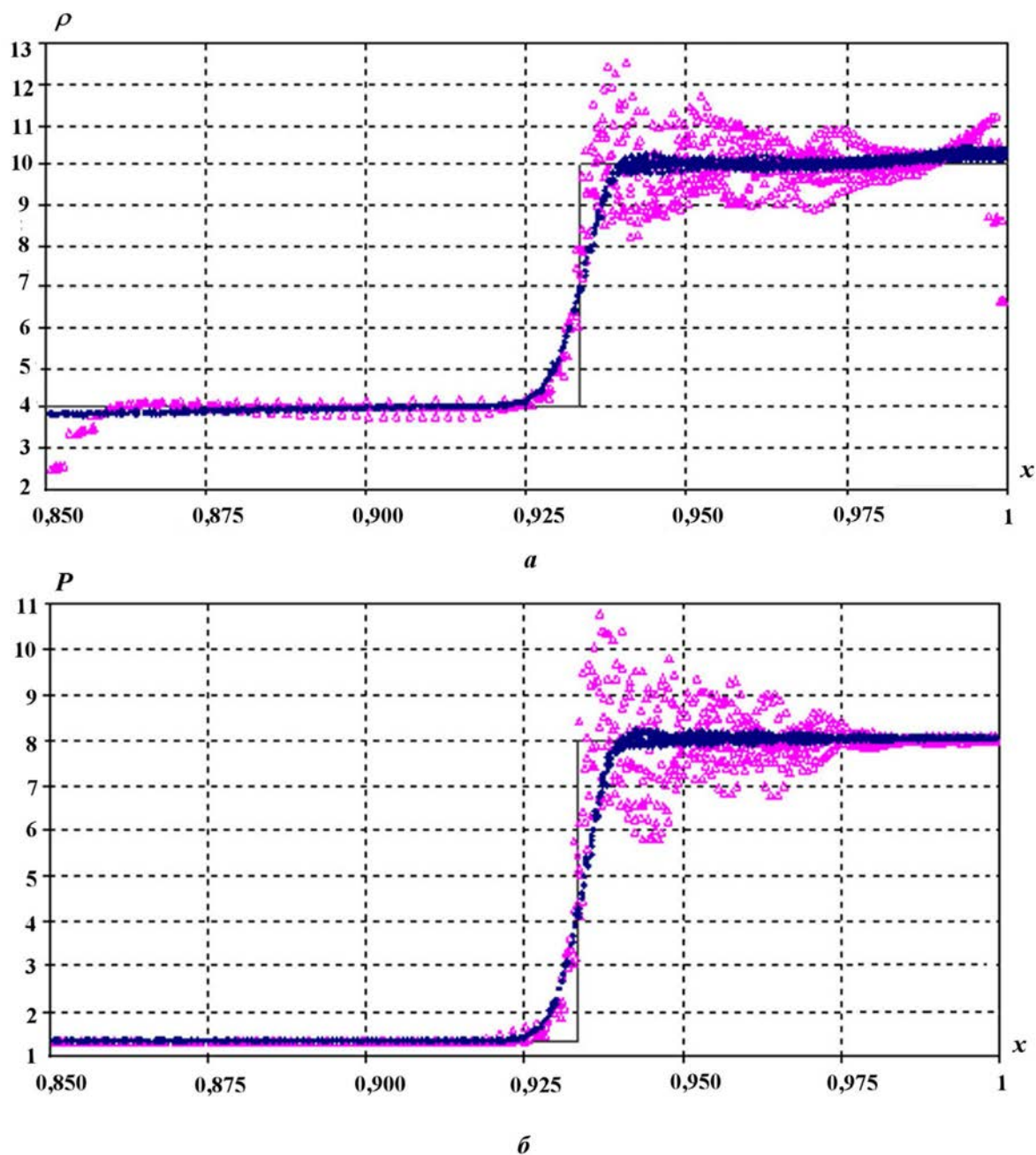


Рис. 6. Задача Зальцмана, $t = 0,85$. Распределение плотностей (а) и давлений (б): Δ — расчет с классической вязкостью; \bullet — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

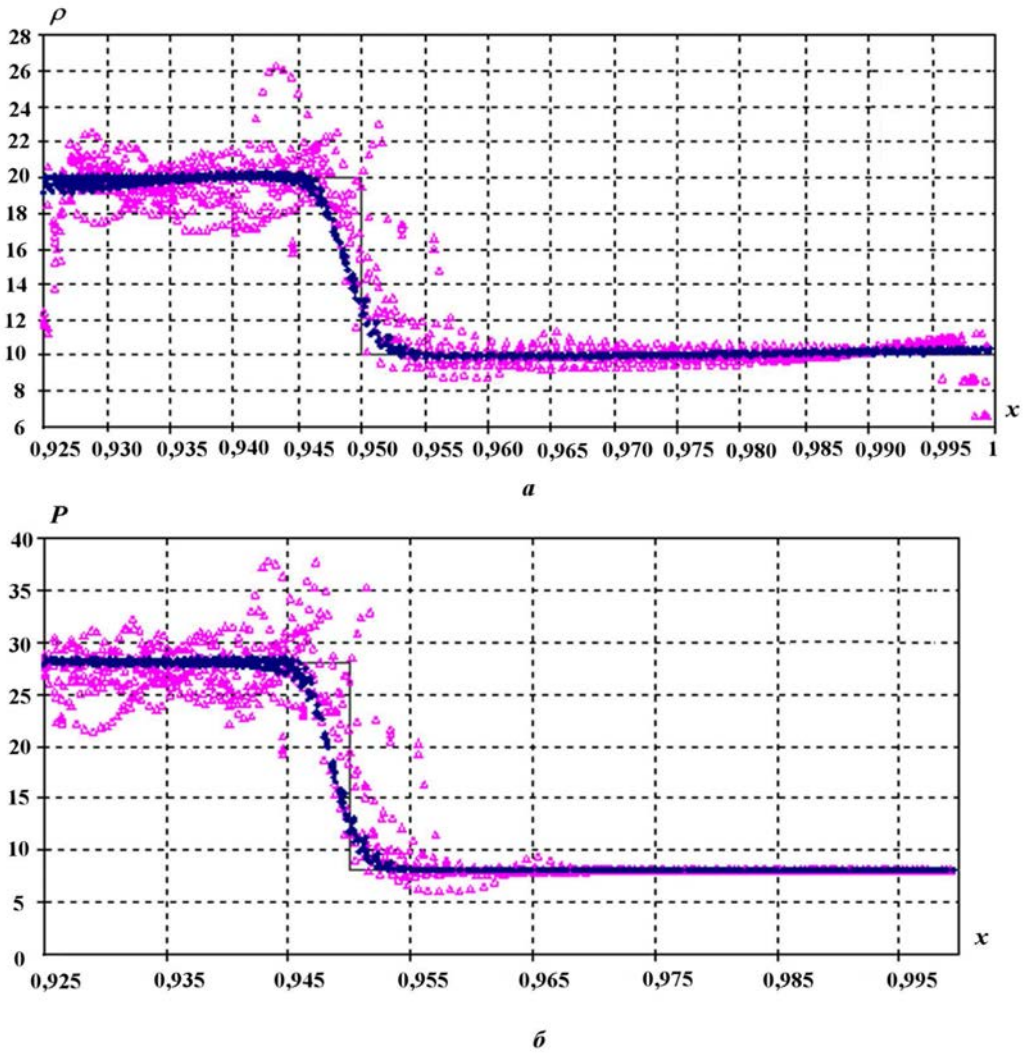


Рис. 7. Задача Зальцмана, $t = 0,925$. Распределение плотностей (а) и давлений (б): Δ — расчет с классической вязкостью; \bullet — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

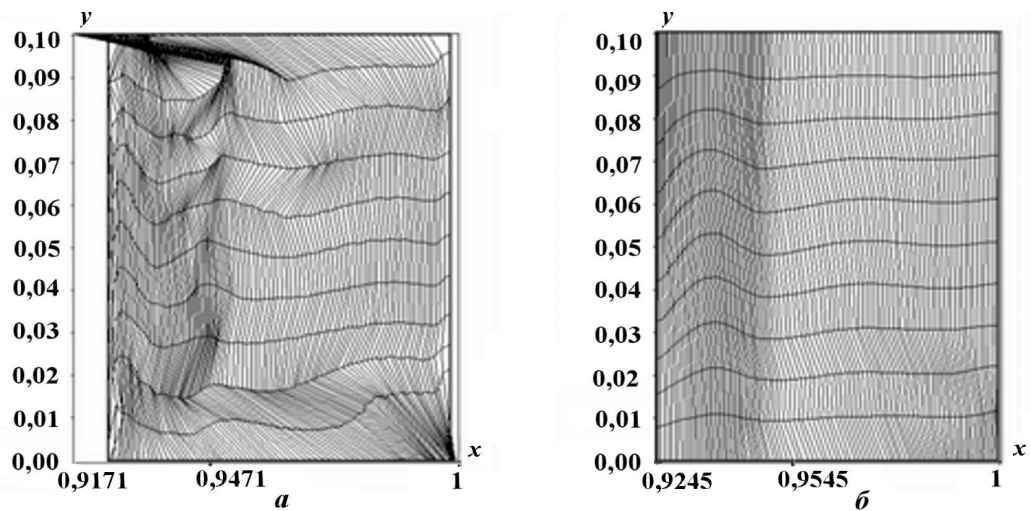


Рис. 8. Задача Зальцмана, $t = 0,925$. Растровая картина плотностей: а — расчет с классической вязкостью; б — расчет с полной матрицей вязкостей

представленных здесь расчетов задачи Зальцмана авторы все же считают то, что при использовании новой матрицы вязкостей практически исчезает энтропийный след на границах счетной области. Хотя, конечно, качество счетной сетки и качество решения — вещи взаимосвязанные.

Цилиндрическое безударное сжатие. Расчеты данной задачи были проведены с целью выяснить, как ведут себя новые искусственные вязкости в случае, когда сжатие безударное. То есть искусственная вязкость, предназначенная для сквозного счета УВ, не должна оказывать влияния на газодинамическое течение.

Здесь представлены результаты расчетов безударного сжатия в двух вариантах: на радиальной сетке и на квадратной сетке. В первом варианте счетная область — четверть круга $0 \leq R \leq 29$, расположенная в первом координатном квадранте. Во втором варианте счетная область — квадрат $0 \leq x \leq 29$; $0 \leq y \leq 29$. В обоих вариантах число ячеек сетки 58×58 .

Вещество — идеальный газ: $P = (\gamma - 1) \rho E$, $\gamma = 1,4$. Начальные данные: плотность $\rho^0 = 1$, энергия $E^0 = 0$, радиальная скорость $U_R^0 = -R^0$. Граничные условия: границы $x = 0$ и $y = 0$ — жесткие стенки; на внешних границах — *свободная поверхность*, $P = 0$. В этой задаче с течением времени под действием начального поля скоростей происходит равномерное безударное сжатие газа.

Задача имеет следующее решение, определенное в моменты времени $t < 1$.

Внутренняя энергия, давление и радиальные скорости с течением времени не меняются:

$$E = E^0 = 0; \quad P = P^0 = 0; \quad U_r = U_r^0 = -R^0.$$

Радиусы точек и плотность газа зависят от времени следующим образом:

$$R = R^0 (1 - t); \quad \rho = \frac{\rho^0}{(1 - t)^2}.$$

Результаты расчетов показали, что новые типы искусственных вязкостей в обоих вариантах постановки данной задачи принимают нулевые значения, т. е. "не работают". Численные решения с этими вязкостями в точности совпадают с аналитическим решением. Классическая вязкость в этой задаче не равна нулю, что ведет к неверному численному решению, причем неверное численное решение на радиальной сетке отличается от неверного численного решения на квадратной сетке (рис. 9, 10).

На рис. 9 представлены профили плотности и давления, полученные в расчете с полной матрицей искусственных вязкостей на радиальной сетке, в сравнении с расчетом, где использовалась классическая скалярная вязкость, и с аналитическим решением.

На рис. 10 представлено пространственное распределение плотностей в зависимости от радиуса, отсчитываемого от начала координат, полученное в расчете с полной новой матрицей вязкостей, в сравнении с полученным в расчете с классической вязкостью и с аналитическим решением.

Заключение

Метод получения матрицы искусственных вязкостей, предложенный в работе [1] для одномерного случая, обобщается на случай системы уравнений газовой динамики, описывающей двумерные течения, обладающие плоской симметрией. С помощью этого подхода получены формулы для скорости искусственной диффузии массы в уравнении неразрывности, тензорная искусственная вязкость в уравнении движения и формулы для потоков искусственной диффузии внутренней энергии для уравнений в лагранжевых координатах.

Результаты проведенных тестовых расчетов показали высокую эффективность новой системы вязкостей по уменьшению энтропийного следа в численных расчетах. В задачах безударного цилиндрического сжатия новая система вязкостей не искажает решения задачи.

Новая система вязкостей оказывает стабилизирующее действие на пространственную сетку в двумерных расчетах, хотя никаких специальных мер для этого не предпринималось. Коэффициенты вязкости и линейный размер в формулах для вязкостей вычислялись по простейшим формулам. В дальнейшем возможна оптимизация этих параметров.

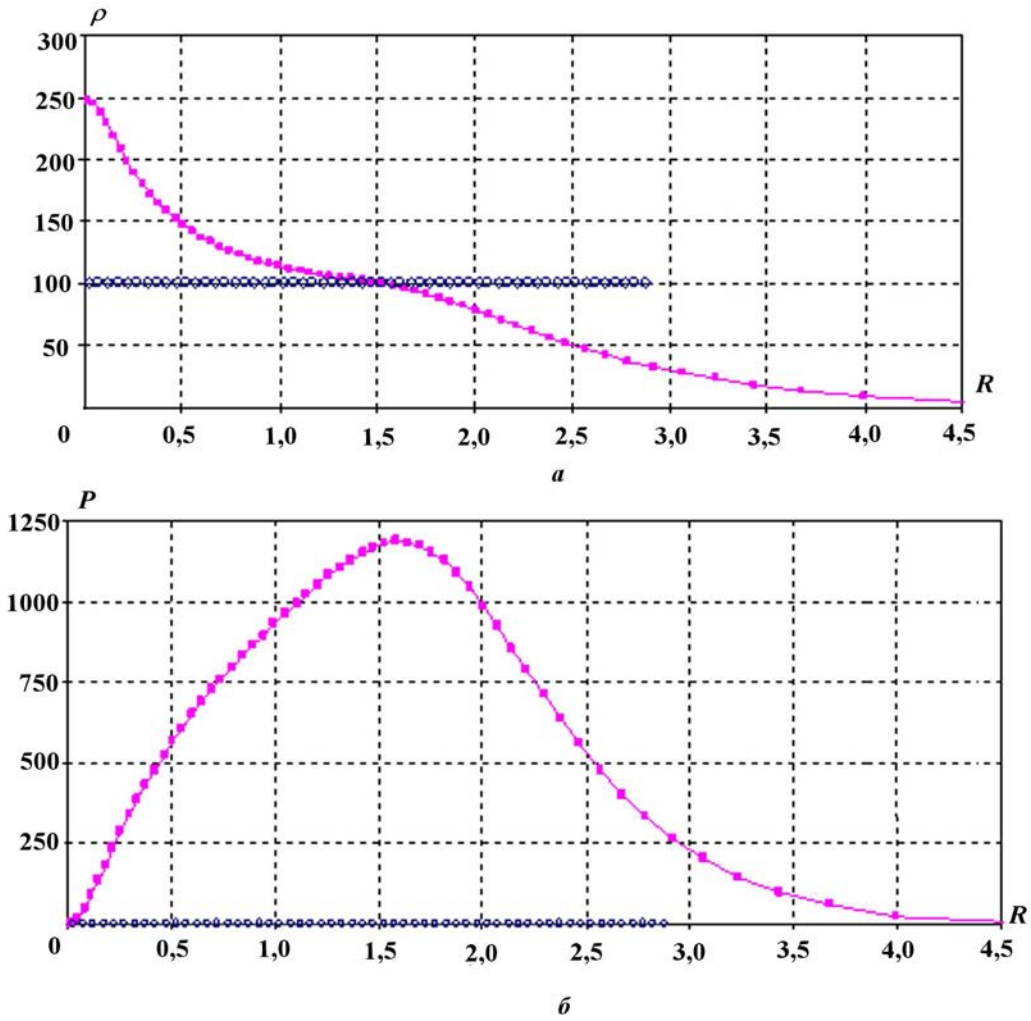


Рис. 9. Равномерное сжатие на радиальной сетке, $t = 0,9$. Профили плотности (а) и давления (б): ■ — расчет с классической вязкостью; ○ — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

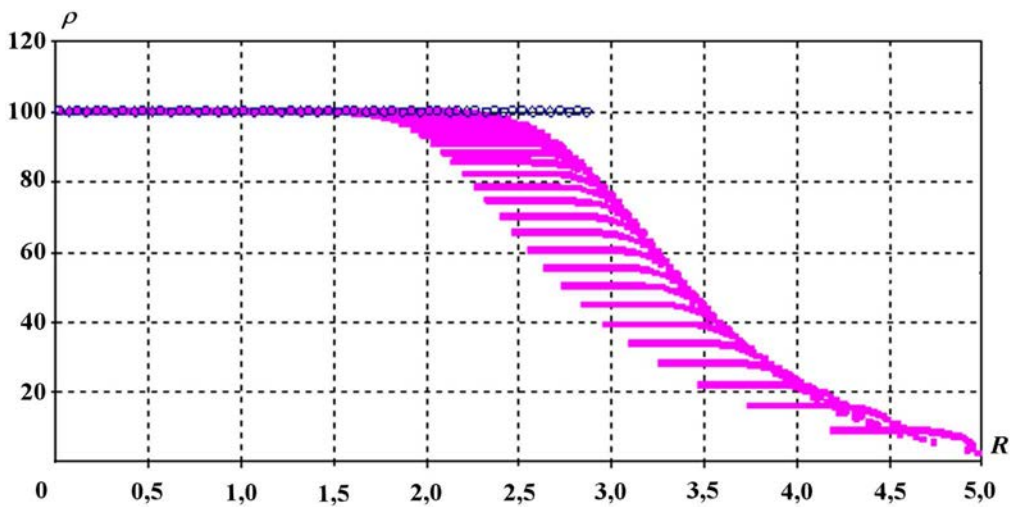


Рис. 10. Равномерное сжатие на квадратной сетке, $t = 0,9$. Распределение плотностей: ■ — расчет с классической вязкостью; ○ — расчет с полной матрицей вязкостей; — — аналитическое решение

Список литературы

1. Стенин А. М., Соловьева Е. А. Исследование влияния некоторых форм искусственной вязкости на характер "энтропийного следа" при численном решении уравнений газодинамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 1. С. 30—41.
2. Noh W. F. Errors for calculation of strong shocks using an artificial viscosity and artificial heat flux // J. Comp. Phys. 1987. Vol. 72, No. 1. P. 78—120.
3. Бондаренко Ю. А. Энтропийный след в расчетах на сходимость при взаимодействии ударных волн // Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики: Тез. докл. 11-й Всерос. конф. Пущино, 5—9 октября 1996 г. / Под ред. А. В. Забродина, А. М. Молчанова, В. М. Тихомирова. Пущино, 1996. С. 15—17.
4. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. Von Neumann J., Richtmyer R. D. A method for the numerical calculations of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. 1950. Vol. 21, No. 3. P. 232—237.
6. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
7. Бондаренко Ю. А. Применение вариационных принципов механики для построения дискретных по времени разностных моделей газодинамики. 1. Описание метода на простейших примерах // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып. 2. С. 68—75.
8. Campbell J. C., Shashkov M. J. A tensor artificial viscosity using a mimetic finite difference algorithm // J. Comp. Phys. 2001. Vol. 172, No. 2. P. 739—765.

Статья поступила в редакцию 27.10.09.

УДК 533.9

СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ

А. И. Голубев, Т. Г. Сысоева
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассмотрено обобщение на случай релятивистской плазмы предложенной ранее комбинированной схемы расщепления системы уравнений Власова—Максвелла.

При численном решении уравнений наиболее сложных этапов схемы расщепления, на которых учитывается влияние на распределение электронов компонентов электромагнитного поля, проведено исследование точности метода характеристик с интерполяцией функции распределения релятивистских электронов на основе кубических сплайнов. Результаты исследования показали, что при решении кинетических уравнений на этих этапах метод обеспечивает приемлемую для приложений точность выполнения имеющихся законов сохранения.

Ключевые слова: уравнения Власова—Максвелла, функция распределения электронов, метод характеристик, кубические интерполяционные сплайны.

Введение

В работе [1] была предложена новая схема расщепления для численного решения системы уравнений Власова—Максвелла. Известные авторам схемы расщепления многомерного кинетического уравнения на шаге по времени основаны на идее, изложенной в пионерской работе [2]. В этих схемах напряженности электрического и магнитного полей на всех этапах вычисления функции распределения остаются неизменными по времени. В схеме [1] наряду с расщеплением многомерного нерелятивистского уравнения Власова расщепляются и уравнения Максвелла, а именно в отдельный этап вынесен учет влияния токов на электрические поля. Кроме того, данный этап совмещен с этапом схемы расщепления для кинетического уравнения Власова, на котором учитывается влияние электрических полей на функцию распределения частиц. Такая комбинированная схема расщепления обладает преимуществом перед традиционными схемами. Она позволяет по заданным значениям электрических полей и токов на момент времени t_n на основе интегральных следствий кинетического уравнения вычислить токи на момент времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ (τ — шаг по времени для схемы расщепления) и согласовать эти токи с электрическими полями, вычисляемыми при $t = t_{n+1}$. Такое согласование существенно улучшает консервативные свойства схемы расщепления на этапе обмена энергией между плазмой и электрическим полем.

В данной работе комбинированная схема расщепления в отличие от работы [1] рассмотрена для случая релятивистской плазмы. Формально она имеет тот же вид, что и в случае нерелятивистской плазмы, но численная реализация отдельных этапов значительно сложнее.

Естественно, действенность любой схемы расщепления зависит от того, насколько удачно выбраны разностные схемы для решения уравнений отдельных этапов. В работе [1] для решения одномерных уравнений переноса на этапе учета влияния электрических полей на функцию распределения авторами была выбрана схема Алояна—Дымникова [3] вследствие ее монотонности, точности второго порядка на гладких решениях и простоты реализации. Однако впоследствии оказалось, что при расчетах физических задач для получения приемлемого уровня дисбаланса полной энергии

(обычно $\leq 1\%$) в системе *плазма—электромагнитное поле* вследствие излишней диссипативности схемы [3] требуется чрезмерно большое число узлов сетки в пространстве скоростей частиц.

В известных авторам работах по схемам расщепления для уравнения Власова при численном решении уравнений отдельных этапов в пространстве скоростей наибольшее распространение получил метод характеристик с применением для интерполяции функции распределения кубических сплайнов [2, 4—7]. В работе [8] для интерполяции в методе характеристик использованы лагранжевы кубические многочлены, в работе [9] — эрмитовы кубические многочлены. Из других методов решения уравнений переноса в пространстве скоростей отметим метод балансных потоков, подробно рассмотренный в работах [10—12]. Сравнение различных методов решения уравнения переноса [13—15] (с применением других видов интерполяции функции распределения в методе характеристик и с использованием различных способов реконструкции балансных потоков), по мнению авторов, не выявило метода, существенно превосходящего по точности метод характеристик с интерполяцией на основе кубических сплайнов. Поэтому в данной работе используется именно этот метод и проводится его тестирование при численном решении уравнений наиболее сложных этапов схемы расщепления.

Исходные уравнения и схема расщепления

Для определенности будем рассматривать уравнения Власова—Максвелла применительно к следующей задаче. Пусть требуется проследить временную эволюцию электронного распределения в предположении, что ионный фон неподвижен. В данной работе будем рассматривать только пространственно-одномерные задачи, предполагая, что функция распределения электронов f и напряженности \vec{E} , \vec{H} электрического и магнитного полей зависят от одной пространственной переменной, которую обозначим через x . Таким образом, размерность кинетического уравнения равна четырем, а вся задача в целом согласно общепринятой классификации в физике плазмы [16] имеет размерность, равную двум. При сделанном выше предположении уравнения модели примут вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} - \left(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} + j_x = 0; \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} + j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (3)$$

При этом компонента $H_x = H_{x0} = \text{const}$, а уравнение, используемое при задании начальных данных для E_x , приводится к виду

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \rho_i - n.$$

В приведенных выше уравнениях $f(t, x, \vec{p})$ — функция распределения электронов; \vec{p} , \vec{v} — их импульс и скорость; \vec{j} — плотность тока, n — концентрация электронов,

$$\vec{j} = - \int \vec{v} f d\vec{p}, \quad n = \int f d\vec{p}; \quad (4)$$

ρ_i — заданная плотность заряда ионов. Уравнения (1)—(4) записаны для безразмерных величин; использованы следующие единицы измерения: для скорости \vec{v} — скорость света в вакууме c ; для времени t — $\tau_* = \omega_{p_*}^{-1} = (4\pi n_* e^2 / m)^{-1/2}$, где e , m — заряд и масса электрона, n_* — единица измерения для концентрации электронов n ; для остальных величин в качестве единиц измерения полагаем

$$E_* = \frac{mc}{e\tau_*}; \quad p_* = mc; \quad f_* = n_* p_*^{-3}; \quad j_* = en_* c; \quad x_* = c\tau_*.$$

В релятивистском случае скорость \vec{v} и импульс \vec{p} связаны соотношением $\vec{v} = \vec{p} / \sqrt{1 + p^2}$ (в нерелятивистском случае полагается $\vec{v} = \vec{p}$). Уравнения (1)–(3) должны быть дополнены подходящими начальными и граничными условиями, соответствующими конкретной задаче.

При численном моделировании задач физики плазмы важное место занимает контроль за динамикой обмена энергией между плазмой и электромагнитным полем. В этой связи в рассмотрение вводятся плотности W_k и W_p кинетической энергии плазмы и энергии поля:

$$W_k = \int \varepsilon f d\vec{p}; \quad W_p = \frac{1}{2} \left(|\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2 \right), \quad (5)$$

где $\varepsilon = \sqrt{1 + p^2} - 1$ в релятивистском случае ($\varepsilon = 0,5p^2$ в нерелятивистском случае). Имеет место следующее уравнение баланса энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} (W_k + W_p) + \text{div} \left(\int \varepsilon \vec{v} f d\vec{p} + [\vec{E}, \vec{H}] \right) = 0.$$

При построении численного алгоритма для уравнений (1)–(5) используется схема расщепления, аналогичная приведенной в работе [1]. Она основана на замене многомерного уравнения переноса на последовательность одномерных переносов в каждом направлении и двумерных вращений функции распределения в магнитном поле; кроме того, производится расщепление уравнений Максвелла. Цепочка дифференциальных уравнений, решаемых на интервале $[t_n, t_{n+1} = t_n + \tau]$, имеет следующий вид:

– учет пространственных градиентов

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \quad t_n \leq t \leq t_n + \tau/2; \quad f_1(t = t_n) = f(t_n); \quad (6)$$

– учет влияния на f электрического поля E_α ($\alpha = x, y, z$)

$$\begin{cases} \frac{\partial f_s}{\partial t} - E_\alpha^{(1)} \frac{\partial f_s}{\partial p_\alpha} = 0, & t_n \leq t \leq t_{n+1}; \\ \frac{\partial E_\alpha^{(1)}}{\partial t} + j_\alpha = 0, & f_s(t = t_n) = f_{s-1}(t_n + \eta\tau); \\ j_\alpha = - \int v_\alpha f_s d\vec{p}, & E_\alpha^{(1)}(t = t_n) = E_\alpha(t_n), \end{cases} \quad (7)$$

где значениям $\alpha = x, y, z$ соответствуют значения $s = 2, 3, 4$; $\eta = 1/2$ для $s = 2$, $\eta = 1$ для $s = 3, 4$;

– решение уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial t} = - \frac{\partial H_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} = - \frac{\partial E_y}{\partial x}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} = - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \end{cases} \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (8)$$

$E_y(t_n) = E_y^{(1)}(t_{n+1})$; $E_z(t_n) = E_z^{(1)}(t_{n+1})$; для H_y, H_z в качестве начальных данных берем их значения при $t = t_n$;

– учет влияния на f магнитного поля H_α ($\alpha = x, y, z$)

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} - H_\alpha \left(v \frac{\partial f_s}{\partial p} - u \frac{\partial f_s}{\partial q} \right) = 0, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}; \quad f_s(t_n) = f_{s-1}(t_{n+1}), \quad (9)$$

где значениям $\alpha = x, y, z$ соответствуют значения $v = v_z, v_x, v_y$, $u = v_y, v_z, v_x$, $s = 5, 6, 7$; импульсы p, q соответствуют скоростям u, v ;

– учет пространственных градиентов

$$\frac{\partial f_8}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_8}{\partial x} = 0, \quad t_n + \tau/2 \leq t \leq t_{n+1}; \quad f_8(t_n + \tau/2) = f_7(t_{n+1}). \quad (10)$$

По завершении решения уравнений (6)–(10) полагаем

$$f(t_{n+1}) = f_8(t_{n+1}),$$

и на этом заканчиваются вычисления на интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$.

Приведенные выше уравнения переноса (6), (7), (9), (10) решаются методом характеристик с применением для интерполяции функции распределения сплайнов (кубических для уравнений (6), (7), (10) и бикубических для уравнений (9)). При вычислении f_s в (7) и (9) значения компонент $E_\alpha^{(1)}$, H_α полагаются равными полусуммам значений этих компонент при $t = t_n$ и $t = t_{n+1}$. Уравнения (8) решаются с использованием двухслойной акустической схемы [17].

Наиболее сложны для численного решения уравнения (7), (9), поэтому дальнейшее обсуждение будет связано именно с ними.

Учет влияния электрического поля на функцию распределения электронов

Отметим, что, как и в нерелятивистском случае, для уравнений (7) при каждом α имеют место следующие законы сохранения:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(W_k + \frac{E_\alpha^2}{2} \right) = 0. \quad (11)$$

К сожалению, из первого уравнения (7) уже нельзя получить в качестве следствия соотношение

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial t} - E_\alpha n = 0,$$

имеющее место в нерелятивистском случае, которое вместе со вторым уравнением из (7) позволяет вычислить значение E_α на следующий момент времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ [1]. В релятивистском случае получаем

$$\frac{\partial j_\alpha}{\partial t} - E_\alpha \int \frac{\partial v_\alpha}{\partial p_\alpha} f d\vec{p} = 0. \quad (12)$$

Это обстоятельство делает схему решения уравнений (7) для релятивистского случая существенно более сложной, чем для нерелятивистского.

В дальнейшем для определенности положим $\alpha = x$ и индекс α для сокращения записи у всех величин временно опустим. Кроме того, введем обозначение $p_*^2 = 1 + p_y^2 + p_z^2$, так что x -компонента скорости \vec{v} будет равна $v = p / \sqrt{p_*^2 + p^2}$.

Для численного решения второго уравнения из (7) на интервале $t_n \leq t \leq t_n + \tau = t_{n+1}$ будем, как и в нерелятивистском случае, использовать схему вида

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\tau} + \frac{j^{n+1} + j^n}{2} = 0, \quad (13)$$

которая при подходящем способе вычисления j^{n+1} обеспечивает аппроксимацию закона сохранения энергии (11) с порядком $O(\tau^2)$. При решении уравнения для f из (7) на интервале $[t_n, t_{n+1}]$ будем использовать метод характеристик с интерполяцией $f(t, p)$ по p в момент $t = t_n$ на основе кубических сплайнов, полагая при этом

$$E = \frac{E^{n+1} + E^n}{2}.$$

Построим схему вычисления j^{n+1} , согласованную по точности со схемой решения уравнения для f . Характеристики уравнения для f из (7) имеют вид

$$p(t) = p_0 - E(t - t_n),$$

где p_0 — значение p при $t = t_n$. Следовательно, при $t = t_{n+1}$ для f имеем

$$f(t = t_{n+1}, p) = f(t = t_n, p + E\tau). \quad (14)$$

Поэтому если $f(t = t_n, p_0)$ — кубический сплайн по переменной p_0 , то $f(t = t_{n+1}, p)$ будет кубическим сплайном относительно $p + E\tau$, а j^{n+1} — многочленом третьей степени от переменной τ . Можно, вообще говоря, определить явно коэффициенты этого многочлена, используя представление (14); однако, как показало применение такого подхода, этот способ трудно реализовать в случае, когда E меняет знак на интервале (t_n, t_{n+1}) .

Воспользуемся для вычисления j^{n+1} методом рядов Тейлора, полагая

$$j^{n+1} = j^n + \tau \frac{\partial j^n}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 j^n}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 j^n}{\partial t^3}.$$

Производные по t от плотности тока j можно найти, последовательно применяя соотношение (12), считая при этом E постоянной величиной:

$$\frac{\partial^s j^n}{\partial t^s} = (-1)^{s+1} E^s a_s,$$

где

$$a_s = \int \frac{\partial^s v}{\partial p^s} f^n d\vec{p} \quad (s = 1, 2, 3). \quad (15)$$

Тогда получим

$$j^{n+1} = j^n + (E\tau) a_1 - \frac{(E\tau)^2}{2} a_2 + \frac{(E\tau)^3}{6} a_3. \quad (16)$$

Теперь имеется возможность получить уравнение для вычисления E . Учитывая (13) и определение E , имеем

$$E = E^n - \frac{\tau}{4} (j^{n+1} + j^n).$$

Подставляя вместо j^{n+1} выражение (16), после несложных преобразований находим

$$E = E_0 + aE^2 - bE^3, \quad (17)$$

где

$$E_0 = \frac{E^n - \frac{1}{2}\tau j^n}{1 + \frac{1}{4}\tau^2 a_1}; \quad a = \frac{1}{8} \frac{\tau^3 a_2}{1 + \frac{1}{4}\tau^2 a_1}; \quad b = \frac{1}{24} \frac{\tau^4 a_3}{1 + \frac{1}{4}\tau^2 a_1}.$$

После определения E значение E^{n+1} получается по формуле

$$E^{n+1} = 2E - E^n.$$

Способ решения уравнения (17) обсуждается в Приложении. Здесь же ограничимся вычислением коэффициентов a_s . Учитывая зависимость $v(p)$, имеем

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{p_*^2}{(p_*^2 + p^2)^{3/2}}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = -\frac{3p_*^2}{(p_*^2 + p^2)^2} v; \quad \frac{\partial^3 v}{\partial p^3} = \frac{3p_*^2 (4p^2 - p_*^2)}{(p_*^2 + p^2)^{7/2}}. \quad (18)$$

Из формул (15), (18) следует, что $a_1 > 0$, т. е. знаменатель в формулах для E_0 , a , b всегда больше единицы; знаки a_2 , a_3 , вообще говоря, заранее определить нельзя.

Тестирование схемы вычисления напряженности электрического поля

Тестирование схемы (13), (16) проведем на следующей модельной задаче. Пусть требуется найти решение уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} - E \frac{\partial f}{\partial p} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial t} + j = 0 \quad (19)$$

в области $(-\infty < p < \infty, t > 0)$ при следующих начальных и граничных условиях:

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} f(t, p) = 0; \quad E(t=0) = E_0; \quad f(t=0, p) = \varphi(p).$$

В этих уравнениях

$$j = - \int v f dp, \quad v = \frac{p}{\sqrt{p_*^2 + p^2}}.$$

Нетрудно убедиться, что решение для f имеет вид

$$f(t, p) = \varphi(p + \Phi(t)), \quad \Phi(t) = \int_0^t E(t') dt'.$$

Учитывая вид $\Phi(t)$, из второго уравнения (19) получаем следующее нелинейное уравнение для этой функции:

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{\sqrt{p_*^2 + p^2}} \varphi(p + \Phi(t)) dp = 0, \quad (20)$$

которое требуется решить при начальных условиях вида

$$\Phi(t=0) = 0; \quad \frac{d\Phi(t=0)}{dt} = E_0.$$

Выберем для теста гладкое начальное распределение $\varphi(p)$ вида

$$\varphi(p) = \varphi_0 e^{-(p/p_m)^2}, \quad \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi} p_m},$$

и для него уравнение (20) будем решать численно. Численное решение получается при использовании метода Рунге—Кутты для эквивалентной (20) системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= E; \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} p_m} \int_0^{\infty} \frac{p}{\sqrt{p_*^2 + p^2}} \left(\exp\left(-\frac{(p + \Phi)^2}{p_m^2}\right) - \exp\left(-\frac{(p - \Phi)^2}{p_m^2}\right) \right) dp \end{aligned} \quad (21)$$

с начальными условиями $\Phi(t=0) = 0, E(t=0) = E_0$. Результаты численного решения этой системы, приводимые далее, получены с относительной точностью 10^{-5} .

Задавая различные значения p_m, p_*, E_0 , будем получать тестовые решения с различными свойствами. Ниже рассмотрим два наиболее интересных случая.

Сначала положим $p_* = 1, p_m = 1$ и будем менять значения E_0 . На рис. 1 представлены зависимости $\Phi(t)$, полученные при численном решении системы (21) для $E_0 = 0,5; 1; 2; 3$. Видно, что с ростом E_0 максимальные значения Φ нелинейно возрастают.

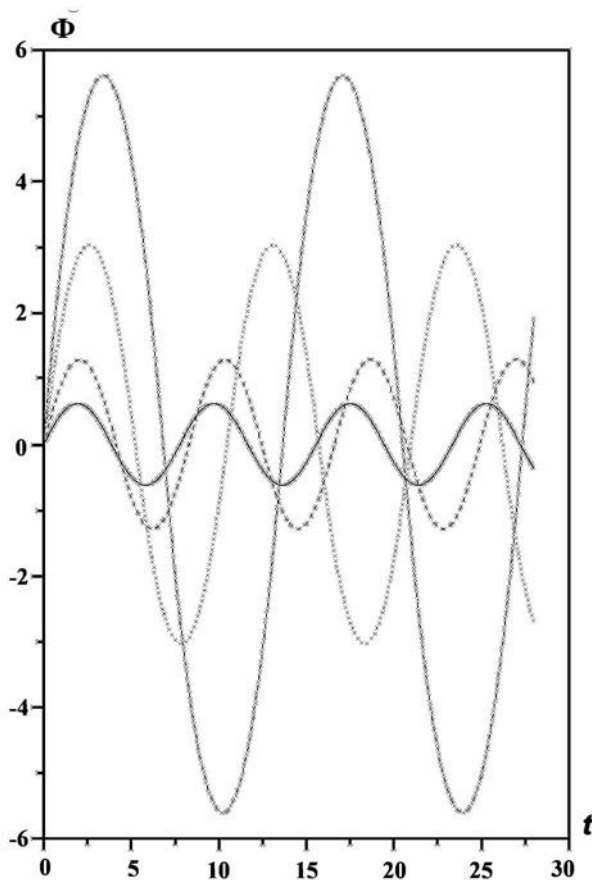


Рис. 1. Зависимости $\Phi(t)$ при $p_m = 1$ и различных E_0 ; — — $E_0 = 0,5$; - - - $E_0 = 1$; \dots — $E_0 = 2$; - · - · $E_0 = 3$

Выберем для теста значение $E_0 = 2$, при котором $\Phi_{\max} \cong 3$ (см. рис. 1), т. е. начальное распределение будет значительно смещаться с ростом времени t ; шаги по p и t — $dp = 0,25p_m = 0,25$, $dt = 0,1$; границы отрезка по p $[-p_g, p_g]$ выберем из условия $p_g = 5p_m + \Phi_{\max} = 8$.

Полученная при численном решении уравнений (19) зависимость $E(t)$ с хорошей точностью совпадает с аналогичной зависимостью, полученной из решения уравнений (21) (на графиках эти кривые не различимы и здесь не приводятся). Хорошо согласуются между собой численные и аналитические зависимости $f(p)$ на разные моменты времени. Концентрация n сохраняется с пятью значащими цифрами, а для суммарной энергии (11) отклонение составило 2 единицы в четвертом знаке; уменьшение шага dt до $dt = 0,02$ приводит к улучшению точности сохранения энергии на порядок (погрешность — 2 единицы в пятом знаке).

Замечание. Довольно распространенной схемой решения уравнений (19) является следующая: по значению j^n вычисляется $E = E^n - \frac{\tau}{2}j^n$; с этим значением E решается уравнение для f и находятся функция f^{n+1} и плотность тока j^{n+1} ; напряженность E^{n+1} вычисляется по формуле $E^{n+1} = E^n - \frac{\tau}{2}(j^{n+1} + j^n)$. Как показали расчеты задачи с $E_0 = 2$, $p_m = 1$, $d = 0,25$, $dt = 0,1$, эта схема дает вдвое больший дисбаланс энергии, чем рассмотренная выше (0,12% против 0,06%), и по точности она эквивалентна рассмотренной выше схеме с занулением a, b .

Рассмотрим теперь случай, когда $p_*^2 > 1$. Положим $p_* = 5$, $p_m = 1$, $E_0 = 2$. Шаги по p, t выбраны прежними: $dp = 0,25$, $dt = 0,1$; граница p_g отрезка по p выбрана равной $p_g = 5p_m + \Phi_{\max} = 10$.

Полученная в этом расчете зависимость $E(t)$ с графической точностью совпадает с зависимостью, полученной при решении уравнений (21). Хорошо согласуются между собой численные и аналити-

ческие зависимости $f(p)$ на разные моменты времени, несмотря на то, что с течением времени профиль $f(p)$ сильно смещается по оси p . Дисбаланс по энергии (11) составил 0,0037 %.

Тестирование схемы численного решения двумерного уравнения (9)

Рассмотрим для определенности уравнение, описывающее влияние компоненты H_z напряженности магнитного поля на релятивистское распределение электронов. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - v_y H_z \frac{\partial f}{\partial p_x} + v_x H_z \frac{\partial f}{\partial p_y} = 0. \quad (22)$$

Оно решается в бесконечной по p_x, p_y области $(-\infty < p_x < \infty, -\infty < p_y < \infty)$ с нулевыми граничными условиями при $|p_\alpha| \rightarrow \infty$. Будем предполагать, что при $t = 0$

$$f(t = 0, p_x, p_y) = f_0(p_x, p_y). \quad (23)$$

Используя метод характеристик, нетрудно найти решение уравнения (22) с условием (23). Оно имеет вид

$$f(t, p_x, p_y) = f_0(p_x \cos \omega t + p_y \sin \omega t, -p_x \sin \omega t + p_y \cos \omega t), \quad (24)$$

где

$$\omega = \frac{H_z}{\varepsilon + 1}, \quad \varepsilon(p_x, p_y) = \sqrt{p_*^2 + p_x^2 + p_y^2} - 1, \quad p_*^2 = 1 + p_z^2.$$

Таким образом, как и в нерелятивистском случае, магнитное поле H_z за время t "поворачивает" распределение $f_0(p_x, p_y)$ на угол ωt относительно оси p_z декартовой системы координат (p_x, p_y, p_z) .

Отметим принципиальное отличие решения (24) от аналогичного решения в нерелятивистском случае: в формуле (24) частота ω зависит от ε , в то время как в нерелятивистском случае ω постоянна. Если начальное распределение $f_0(p_x, p_y)$ изотропно (зависит от $p = (p_x^2 + p_y^2)^{1/2}$), то для него это обстоятельство не имеет значения — распределение останется изотропным в любой момент времени t и будет совпадать с начальным распределением. Если же распределение $f_0(p_x, p_y)$ анизотропно, то, вообще говоря, $f(t, p_x, p_y)$ ни при каком времени $t > 0$ не совпадает с начальным распределением.

В самом деле, пусть

$$f_0(p_x, p_y) = \varphi_0 \exp\left(-\frac{p_x^2}{p_{xc}^2} - \frac{p_y^2}{p_{yc}^2}\right). \quad (25)$$

На рис. 2 для $H_z t = 20$ приведена аналитическая зависимость

$$f(p_x) \equiv f(t, p_x, p_y = 0) = \varphi_0 \exp\left(-p_x^2 \left(\frac{\cos^2 \omega t}{p_{xc}^2} + \frac{\sin^2 \omega t}{p_{yc}^2}\right)\right)$$

и зависимости $f_{\min}(p_x) = \varphi_0 \exp\left(-\frac{p_x^2}{p_{yc}^2}\right)$, $f_{\max}(p_x) = \varphi_0 \exp\left(-\frac{p_x^2}{p_{xc}^2}\right)$. Результаты представлены для $p_*^2 = 1$, $p_{xc} = 1$, $p_{yc} = 2/3$. Видно, что кривая $f(p_x)$ существенно немонотонна, с локальными минимумами и максимумами, расположенными на кривых $f_{\min}(p_x)$ и $f_{\max}(p_x)$ соответственно. Для заданного значения $H_z t$ локальные максимумы достигаются в точках p_x , определяемых из условия

$$\frac{H_z t}{\sqrt{p_*^2 + p_x^2}} = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда находим (для $p_x > 0$)

$$p_x = \left(\frac{H_z^2 t^2}{n^2 \pi^2} - p_*^2 \right)^{1/2}.$$

Из этого соотношения следует, что с ростом p_* увеличиваются и значения $H_z t$, при которых немонотонная зависимость в профиле $f(p_x)$ начинает существенно проявляться. Для $p_* = 1$ появление немонотонности следует ожидать при $H_z t > \pi$, или, в размерных единицах, при $\frac{e H_z t}{m c} > \pi$.

Эту особенность решения (24) следует учитывать при тестировании численного алгоритма решения уравнения (22). Отметим, что описание "развала" анизотропных максвелловских релятивистских распределений электронов в постоянном магнитном поле в известной авторам литературе не встречалось.

Обычно численные схемы решения уравнения (22) тестируют на задаче об эволюции максвелловского распределения электронов (25) в постоянном магнитном поле. При этом распределение предполагается изотропным ($p_{xc} = p_{yc}$) и нерелятивистским ($p_{\alpha c} \ll 1, \alpha = x, y$) (см., например, [14]). Приемлемыми считаются схемы, обеспечивающие достаточную для приложений точность сохранения числа электронов и их кинетической энергии при небольшом (~ 40) числе интервалов равномерной сетки по каждой из координат p_x, p_y . Ниже на примерах будет показано, что в релятивистском случае требуется более подробная по сравнению с нерелятивистским случаем сетка в пространстве импульсов.

При тестировании использовано следующее соглашение: если для некоторого узла (p_{xi}, p_{yj}) сетки начальная точка (p_{x0}, p_{y0}) характеристики, приходящей при $t = t_{n+1}$ в этот узел, выходит за

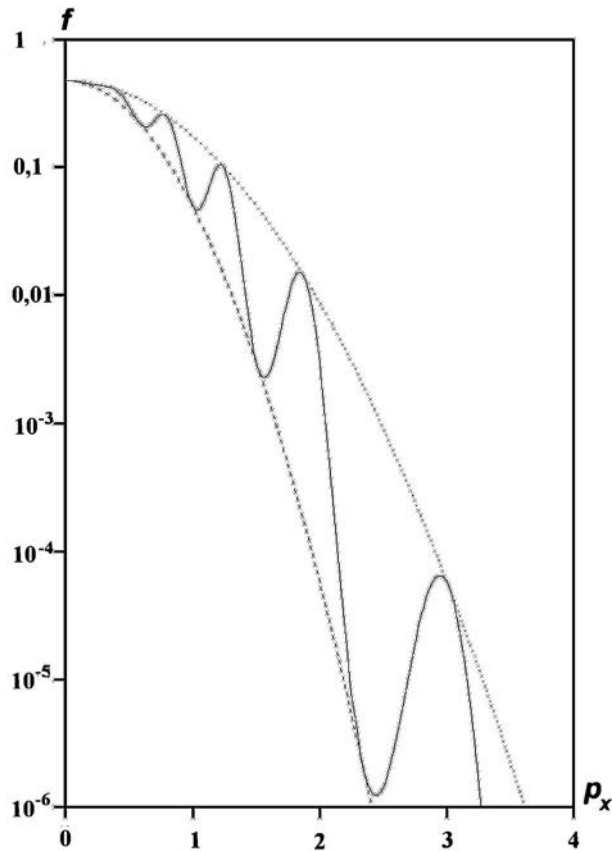


Рис. 2. Аналитическая зависимость $f(p_x)$ (—) при $p_y = 0, p_{xc} = 1, p_{yc} = 2/3, H_z t = 20$; - - - $f_{\min}(p_x)$; \cdots — $f_{\max}(p_x)$

пределы сетки, то значение функции f_{ij} в этом узле не меняется: $f_{ij}^{n+1} = f_{ij}^n$. Во всех расчетах функция $f_0(p_x, p_y)$ определялась согласно (25); при этом $\varphi_0 = \frac{1}{\pi p_{xc} p_{yc}}$, $H_z = 1$. Если не оговорено противное, $p_* = 1$; как следует из предыдущих оценок, это наиболее сложный случай.

Сначала рассмотрим нерелятивистский случай. Будем предполагать, что в начальном распределении электронов (25) $p_{xc} = p_{yc} = 0,1$. Шаги dp_x, dp_y выберем равными $dp_x = dp_y = 0,25p_{xc} = 0,025$; границы отрезков по p_x, p_y $[-p_{\alpha g}, p_{\alpha g}]$ ($\alpha = x, y$) выберем из условия $p_{\alpha g} = 5p_{xc} = 0,5$ (по каждой переменной сетка будет содержать 40 интервалов). Будем прежде всего обращать внимание на точность выполнения законов сохранения двух моментов функции распределения:

$$W_0 = \iint f(t, p_x, p_y) dp_x dp_y; \quad W_2 = \iint \varepsilon(p_x, p_y) f(t, p_x, p_y) dp_x dp_y,$$

т. е. на точность сохранения числа частиц и их кинетической энергии.

В табл. 1 для различных значений шага по времени dt приведена относительная погрешность $\delta(t)$ (в %) для момента W_2 :

$$\delta(t) = \frac{|W_2(t) - W_2(0)|}{W_2(0)} \cdot 100\%.$$

Значение W_0 во всех расчетах сохранялось с хорошей (не менее 6 знаков) точностью. Числа Куранта

$$r_\alpha = \frac{v_{\alpha g} H_z dt}{dp_\alpha}, \quad \text{где } v_{\alpha g} = \frac{p_{\alpha g}}{\sqrt{1 + p_{\alpha g}^2}} \quad (\alpha = x, y), \quad (26)$$

для dt из табл. 1 равны соответственно $r_\alpha \approx 2; 1; 0,5; 0,2; 0,1$.

Погрешность $\delta(t)$ при использовании для интерполяции бикубических сплайнов должна быть пропорциональна dp_α^3 . Для расчетов, проведенных с $dp_\alpha = 0,02$ и $dt = 0,02; 0,008; 0,004$, т. е. с числами Куранта (26) $r_\alpha = 0,5; 0,2; 0,1$, при $t = 20$ значения $\delta(t)$ составили соответственно $\delta = 0,123 \cdot 10^{-1}; 0,607 \cdot 10^{-2}; 0,324 \cdot 10^{-2}$. Сравнивая эти значения δ с отмеченными звездочкой в табл. 1, видим, что погрешность уменьшилась в $(0,025/0,02)^3 \cong 2$ раза, как это и должно быть при пропорциональности ее dp_α^3 .

Обратимся теперь к расчетам для релятивистского распределения электронов. Рассмотрим изотропное распределение с $p_{xc} = p_{yc} = 1$; шаги dp_x, dp_y выберем равными $dp_x = dp_y = 0,25; p_{xc} = 0,25$; границы отрезков $[-p_{\alpha g}, p_{\alpha g}]$ выберем из условия $p_{\alpha g} = 5p_{xc} = 5$.

В табл. 2 для различных шагов по времени dt приведена относительная погрешность $\delta(t)$ для момента W_2 . Отметим, что в рассматриваемой задаче компоненты скорости $v_{\alpha g} \approx 1$, так что шагам dt , приведенным в табл. 2, соответствуют значения чисел Куранта (26) $r_\alpha \cong 4dt$.

Из сравнения данных табл. 1, 2 следует, что при $dt \geq 0,05$ погрешность δ в релятивистском случае намного превышает эту погрешность для нерелятивистского случая; при $dt \leq 0,01$ погрешности различаются примерно в 2 раза. Отметим также, что в релятивистском случае точность сохранения момента W_0 значительно более низкая, чем в нерелятивистском случае. Так, при $t = 20$ для dt из

Таблица 1

Зависимость погрешности $\delta(t)$ от шага dt ; $p_{\alpha c} = 0,1$

dt	t				
	4	8	12	16	20
0,1	$0,356 \cdot 10^{-2}$	$0,713 \cdot 10^{-2}$	$0,107 \cdot 10^{-1}$	$0,143 \cdot 10^{-1}$	$0,179 \cdot 10^{-1}$
0,05	$0,597 \cdot 10^{-2}$	$0,120 \cdot 10^{-1}$	$0,179 \cdot 10^{-1}$	$0,239 \cdot 10^{-1}$	$0,300 \cdot 10^{-1}$
0,025	$0,467 \cdot 10^{-2}$	$0,933 \cdot 10^{-2}$	$0,140 \cdot 10^{-1}$	$0,187 \cdot 10^{-1}$	$0,233 \cdot 10^{-1} *$
0,01	$0,233 \cdot 10^{-2}$	$0,466 \cdot 10^{-2}$	$0,700 \cdot 10^{-2}$	$0,933 \cdot 10^{-2}$	$0,117 \cdot 10^{-1} *$
0,005	$0,125 \cdot 10^{-2}$	$0,250 \cdot 10^{-2}$	$0,374 \cdot 10^{-2}$	$0,499 \cdot 10^{-2}$	$0,623 \cdot 10^{-2} *$

Зависимость погрешности $\delta(t)$ от шага dt ; $p_{\alpha c} = 1$

dt	t				
	4	8	12	16	20
0,1	$0,411 \cdot 10^{-1}$	$0,822 \cdot 10^{-1}$	0,123	0,164	0,205
0,05	$0,227 \cdot 10^{-1}$	$0,454 \cdot 10^{-1}$	$0,681 \cdot 10^{-1}$	$0,907 \cdot 10^{-1}$	0,113
0,025	$0,118 \cdot 10^{-1}$	$0,236 \cdot 10^{-1}$	$0,353 \cdot 10^{-1}$	$0,472 \cdot 10^{-1}$	$0,589 \cdot 10^{-1}$ *
0,01	$0,481 \cdot 10^{-2}$	$0,981 \cdot 10^{-2}$	$0,141 \cdot 10^{-1}$	$0,198 \cdot 10^{-1}$	$0,248 \cdot 10^{-1}$
0,005	$0,242 \cdot 10^{-2}$	$0,510 \cdot 10^{-2}$	$0,683 \cdot 10^{-2}$	$0,108 \cdot 10^{-1}$	$0,137 \cdot 10^{-1}$

табл. 2 погрешность (в %) для W_0 составила $0,112$; $0,890 \cdot 10^{-1}$; $0,542 \cdot 10^{-1}$; $0,241 \cdot 10^{-1}$; $0,124 \cdot 10^{-1}$. Таким образом, релятивистские задачи предъявляют более жесткие требования к выбору счетных шагов даже для изотропного распределения частиц.

Уменьшим шаги dp_α до значения $dp_\alpha = 0,2$ (т. е. в 1,25 раза) и выберем шаг $dt = 0,002$. Расчет, проведенный с этими параметрами, дал при $t = 20$ погрешность в $W_2\delta = 0,300 \cdot 10^{-1}$, что, как и в нерелятивистском случае, в 2 раза меньше погрешности, отмеченной звездочкой в табл. 2 (сравниваются погрешности при одинаковом числе r). Погрешность для W_0 также уменьшилась в 2 раза (с $0,542 \cdot 10^{-1}$ до $0,277 \cdot 10^{-1}$). Таким образом, и в релятивистском случае погрешность $\delta(t)$ пропорциональна dp_α^3 .

Увеличение p_* приводит к значительному улучшению балансных свойств схемы. Так, при $p_* = \sqrt{2}$ (т. е. при увеличении p_*^2 в 2 раза) в расчете с $dp_\alpha = 0,25$, $dt = 0,025$ значение $\delta(t = 20) = 0,870 \cdot 10^{-2}$, что почти в 7 раз меньше погрешности, отмеченной звездочкой в табл. 2; погрешность (в %) для W_0 равна $0,224 \cdot 10^{-1}$ вместо $0,542 \cdot 10^{-1}$ при $p_* = 1$, т. е. уменьшается медленнее, чем δ .

Как следует из приведенных примеров, для получения результатов для W_0 , W_2 в релятивистском случае с точностью, сопоставимой с точностью для W_0 , W_2 в нерелятивистском случае, надо в принятой схеме существенно (более чем вдвое) уменьшить шаги dp_α (например, полагать $dp_\alpha = 0,125p_{\alpha c}$ для максвелловских распределений) и обеспечивать при этом числа Куранта $r_\alpha \leq 0,1$. При моделировании плазмы с анизотропным начальным распределением при выборе шагов dp_α следует учитывать возможность появления со временем в распределении мелкомасштабной структуры, о которой говорилось выше.

Заключение

В работе рассмотрено обобщение комбинированной схемы расщепления системы уравнений Власова—Максвелла на случай релятивистской плазмы. При численном решении уравнений наиболее сложных этапов схемы расщепления, на которых учитывается влияние на распределение электронов компонентов электромагнитного поля, проведено исследование точности метода характеристик с интерполяцией функции распределения релятивистских электронов на основе кубических сплайнов (*полулагранжев* метод по терминологии цитированных зарубежных публикаций). Результаты исследования показали, что при решении кинетических уравнений на этих этапах метод обеспечивает приемлемую для приложений точность выполнения имеющихся законов сохранения.

В дальнейшем предполагается опубликовать результаты тестирования комбинированной схемы расщепления на представительных модельных физических задачах, обычно используемых при проверке методов моделирования динамики разреженной плазмы, и сравнить эту схему с методом *частица в ячейке*.

Приложение. Численное решение уравнения (17)

При решении кубического уравнения (17) можно было бы попытаться использовать известные формулы для вычисления его корней. Однако при этом в случае существования трех действительных корней достаточно сложно выяснить, какой из них выбрать и при каких ограничениях на шаг τ получается подходящий корень. Воспользуемся для получения решения уравнения (17) следующими соображениями.

В нерелятивистском случае $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ и уравнение (17) имеет корень $E = E_0$, т. е. именно то решение, которое получалось в [1]. При $\tau \rightarrow 0$ к этому значению должен стремиться требуемый корень (17). Найдем решение уравнения $aE^2 - E + E_0 = 0$; оно имеет действительные корни при условии

$$aE_0 \leq \frac{1}{4}. \quad (\text{П.1})$$

Эти корни равны

$$E_1 = \frac{1}{2a} \left(1 + \sqrt{1 - 4aE_0} \right) \equiv \frac{e_1}{a}; \quad E_2 = \frac{E_0}{e_1}.$$

Очевидно, подходящим является корень E_2 , поскольку именно он стремится к E_0 при уменьшении шага τ . Используя выражения для E_1 , E_2 , уравнение (17) можно записать в виде

$$E = E_2 + b \frac{E^3}{aE - e_1}.$$

Это уравнение можно решить методом простых итераций:

$$E^{\nu+1} = E_2 + b \frac{(E^\nu)^3}{aE^\nu - e_1}, \quad \nu = 0, 1, \dots, E^0 = E_0. \quad (\text{П.2})$$

Ограничение (П.1) и требование сходимости итераций (П.2) приводят к следующим условиям на шаг τ :

$$\tau |E_n| \leq \frac{1}{2}; \quad \tau^2 n \leq \frac{2}{3}.$$

Чтобы понять, насколько сильно эти условия ограничивают шаг τ , перепишем их в размерной форме с учетом принятых единиц измерения, сохраняя за размерными величинами те же обозначения, что и за безразмерными:

$$\frac{e |E_n| \tau}{mc} \leq \frac{1}{2}; \quad \tau^2 \omega_p^2 \leq \frac{2}{3}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}. \quad (\text{П.3})$$

Второе ограничение в (П.3), как правило, является типичным: шаг τ должен быть заведомо меньше обратной плазменной частоты. Что же касается первого ограничения, то оно также не является обременительным, поскольку при решении кинетического уравнения (7) методом характеристик на шаг τ накладывается ограничение (в размерных единицах) $\frac{e |E_n| \tau}{h_\alpha} \leq 1$ ($\alpha = x, y, z$), где шаг h_α обычно существенно меньше mc .

Список литературы

1. Голубев А. И., Сысоева Т. Г. Схема расщепления для численного решения кинетического уравнения Власова // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып. 3. С. 68—71.
2. Cheng C. Z., Knorr G. The integration of the Vlasov equation in configuration space // J. Comp. Phys. 1976. Vol. 22. P. 330—351.

3. Дымников В. П., Алоян А. Е. Монотонные схемы решения уравнений переноса в задачах прогноза погоды, экологии и теории климата // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 12. С. 1237—1247.
4. Bertrand P., Ghizzo A., Johnston T. W., Shoucri M., Fijalkow E., Feix M. R. A Nonperiodic Euler—Vlasov code for the numerical simulation of laser-plasma beam wave acceleration and raman scattering // Phys. of Fluids. B. Plasma Physics. 1990. Vol. 2, No 5. P. 1028—1037.
5. Ghizzo A., Bertrand P., Shoucri M. M., Johnston T. W., Fijalkow E., Feix M. R. A Vlasov code for the numerical simulation of stimulated raman scattering // J. Comp. Phys. 1990. Vol. 90. P. 431—457.
6. Ghizzo A., Huot F., Bertrand P. A non-periodic 2D semi-Lagrangian Vlasov code for laser-plasma interaction on parallel computer // Ibid. 2003. Vol. 186. P. 47—69.
7. Bess N., Sonnendrucker E. Semi-Lagrangian schemes for the Vlasov equation on unstructured mesh of phase space // Ibid. Vol. 191. P. 341—376.
8. Johnson L. E. Numerical model of plasma double layers using the Vlasov equation // J. Plasma Phys. 1980. Vol. 23, part 3. P. 433—452.
9. Nakamura T., Yabe T. Cubic interpolated propagation scheme for solving the hyper-dimensional Vlasov—Poisson equation in phase space // Comp. Phys. Commun. 1999. Vol. 120. P. 122—154.
10. Fijalkow E. Numerical solution to the Vlasov equation // Ibid. Vol. 116. P. 319—328.
11. Fijalkow E. Numerical solution to the Vlasov equation: the 1D code // Ibid. P. 329—335.
12. Fijalkow E. Numerical solution to the Vlasov equation: the 2D code // Ibid. P. 336—344.
13. Filber F., Sonnendrucker E., Bertrand P. Conservative numerical schemes for the Vlasov equation // J. Comp. Phys. 2001. Vol. 172. P. 166—187.
14. Mangeney A., Califano F., Cavazzoni C., Travnicek P. A numerical scheme for the integration of the Vlasov—Maxwell system of equations // Ibid. 2002. Vol. 179. P. 495—538.
15. Arber T. D., Vann R. G. L. A critical comparison of Eulerian-grid-based Vlasov solvers // Ibid. Vol. 180. P. 339—357.
16. Рошаль А. С. Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.
17. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

Статья поступила в редакцию 18.08.09.

УДК 519.6:536.71

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КВАЗИДИФФУЗИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. Г. Карлыханов
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается применение метода квазидиффузии для расчета задач переноса излучения. Проведено исследование данного подхода на решении ряда методических задач.

Ключевые слова: перенос излучения, квазидиффузия.

Введение

Впервые квазидиффузионный подход был применен для решения проблемы ускорения сходимости итераций по интегралу рассеяния в задачах переноса нейтронов [1]. В иностранной литературе данный подход называется методом множителей Эдингтона (Eddington Factor) [2, 3]. В данной работе проводится исследование метода квазидиффузии применительно к решению задач о переносе излучения в спектральной кинетической постановке. При практическом использовании излагаемого метода возникает несколько вопросов: есть ли необходимость во внешних итерациях по коэффициенту квазидиффузии, какова скорость сходимости этого процесса; с какой точностью необходимо рассчитывать указанные коэффициенты, можно ли в этом случае для решения уравнения переноса излучения в кинетической постановке использовать простые разностные схемы первого порядка точности. Ответы на эти вопросы можно получить при анализе результатов численных расчетов специально подобранных задач.

Постановка задачи

Известно, что перенос теплового излучения в случаях, интересных для практического применения, приходится описывать в спектральной кинетической постановке. Соответствующая система уравнений при этом имеет сложный

нелинейный интегродифференциальный вид с двойным интегрированием по спектру и углу. Это вызывает серьезные трудности, связанные с организацией итерационных процессов при численном решении указанных уравнений. Различные типы используемых итерационных процессов при всех своих достоинствах обладают теми или иными недостатками: от медленной скорости сходимости для методов простой итерации до очень больших объемов вычислений и памяти для методов полной линеаризации.

В настоящей работе предлагается всю тяжесть итерационного процесса переложить на усредненное по углу уравнение переноса излучения, для которого с большой эффективностью можно применить метод, описанный в работе [4]. Для получения усредненных коэффициентов предлагается ввести дополнительный этап, где решается спектральное кинетическое уравнение переноса излучения при известной температуре, взятой, например, с предыдущего шага или предыдущей итерации по температуре. Такой расчет, как правило, не представляет труда, поскольку в этом случае имеет место линейная система уравнений. Далее, после получения на данном этапе спектрального и углового распределения излучения, проводится вычисление коэффициентов квазидиффузии.

Коротко изложим суть метода квазидиффузии. Для простоты рассмотрим кинетическое уравнение в плоском одномерном *сером* случае без учета рассеяния и движения среды:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial t} + \mu \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial x} + \kappa_\varepsilon I_\varepsilon &= \kappa_\varepsilon I_{r,\varepsilon}; \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \int_{-1}^1 \int_0^\infty \kappa_\varepsilon (I_\varepsilon - I_{r,\varepsilon}) d\mu d\varepsilon. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь введены стандартные обозначения: c — скорость света; t — время; I_ε — интенсивность излучения с энергией ε ; μ — косинус угла полета фотона относительно оси x ; κ_ε — коэффициент поглощения излучения; $I_{r,\varepsilon}$ — интенсивность равновесного излучения; $E = E(T)$ — плотность энергии вещества как функция температуры T . Система уравнений (1) дополняется начальными условиями, вид которых несущественный, и граничными условиями следующего вида:

$$I_\varepsilon(\mu > 0) = f_l(\mu, \varepsilon, t) \text{ на левой границе;}$$

$$I_\varepsilon(\mu < 0) = f_r(\mu, \varepsilon, t) \text{ на правой границе,}$$

где $f_l(\mu, \varepsilon, t)$, $f_r(\mu, \varepsilon, t)$ — заданные функции.

Если проинтегрировать первое уравнение системы (1) дважды, с весом 1 и μ , получится следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \nu_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial x} + c\kappa_\varepsilon \nu_{r,\varepsilon}; \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial D_\varepsilon \nu_\varepsilon}{\partial x} + \kappa_\varepsilon S_\varepsilon = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^\infty \kappa_\varepsilon (\nu_\varepsilon - \nu_{r,\varepsilon}) d\varepsilon. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения

$$\nu_\varepsilon = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I_\varepsilon d\mu; \quad \nu_{r,\varepsilon} = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I_{r,\varepsilon} d\mu;$$

$$S_\varepsilon = \int_{-1}^1 \mu I_\varepsilon d\mu; \quad (5)$$

$$D_\varepsilon = \frac{\int_{-1}^1 \mu^2 I_\varepsilon d\mu}{\int_{-1}^1 I_\varepsilon d\mu}. \quad (6)$$

Для согласованности граничных условий в кинетическом и квазидиффузионном уравнениях воспользуемся следующими тождественными преобразованиями.

Запишем поток на левой границе (см. формулу (5)) в виде двух слагаемых:

$$S_\varepsilon = \int_{-1}^0 \mu I_\varepsilon d\mu + \int_{-1}^0 \mu I_\varepsilon d\mu. \quad (7)$$

Первое слагаемое в формуле (7) полностью определяется заданной граничной интенсивностью $f_l(\mu, \varepsilon, t)$. Второе слагаемое запишем в виде дробно-линейного функционала. Тогда выражение (7) примет следующий вид:

$$S_\varepsilon = \int_0^1 \mu f_l(\mu, \varepsilon, t) d\mu + \frac{\int_{-1}^0 \mu I_\varepsilon d\mu}{\int_{-1}^0 I_\varepsilon d\mu} \nu_\varepsilon.$$

Если ввести обозначения

$$\alpha_\varepsilon = \frac{\int_{-1}^0 \mu I_\varepsilon d\mu}{\int_{-1}^0 I_\varepsilon d\mu}; \quad (8)$$

$$\beta_\varepsilon = \int_0^1 \mu f_l(\mu, \varepsilon, t) d\mu, \quad (9)$$

то для квазидиффузионных уравнений граничное условие на левой границе можно записать в следующем виде:

$$S_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \nu_\varepsilon + \beta_\varepsilon.$$

Отметим, что коэффициент α_ε вычисляется аналогично коэффициенту D_ε . Коэффициент β_ε — заданная функция времени и энергии фотона.

На правой границе согласование граничных условий происходит аналогично.

Система уравнений (2)–(4) называется системой уравнений квазидиффузии, а коэффициент D_ε — коэффициентом квазидиффузии. Если из каких-либо соображений точно известны коэффициенты D_ε и α_ε , то система дифференциальных уравнений квазидиффузии полностью эквивалентна кинетическому уравнению (1). Теоретически коэффициент D_ε меняется в пределах от 0 до 1, для большинства практически важных задач — от 1/3 до 1. Значение коэффициента α_ε находится в пределах от 0,5 до 1 на левой границе и от -1 до $-0,5$ на правой границе.

Рассмотрим вопрос о численном нахождении коэффициента квазидиффузии. Очень важно, чтобы при вычислении интегралов в формуле (6) в случае изотропного распределения излучения по угловой переменной значение коэффициента D_ε было равно $1/3$, а при сильно анизотропном распределении излучения, когда все фотоны летят в направлении с $\mu = 1$, D_ε было бы равно 1 при любой сетке по угловой переменной. Применение метода трапеций не удовлетворяет вышепредставленным требованиям в изотропном случае, но дает точное значение в случае сильной анизотропии. Применение методов интегрирования более высокого порядка точности, например метода Симпсона, позволяет в изотропном случае получить точное значение, но в сильно анизотропном пределе получается лишь приближенное значение.

Для выхода из данной ситуации предлагается соответствующие интегралы вычислять по методу трапеций, а затем перевычислять значение коэффициента квазидиффузии по следующей формуле:

$$D_\varepsilon = (aD_\varepsilon^* + b)D_\varepsilon^*.$$

Здесь D_ε^* — коэффициент квазидиффузии, рассчитанный по формуле трапеций, и введены обозначения

$$a = -\frac{\langle \mu^2 \rangle - 1/3}{\langle \mu^2 \rangle (\langle \mu^2 \rangle - 1)}; \quad (10)$$

$$b = \frac{\langle \mu^2 \rangle^2 - 1/3}{\langle \mu^2 \rangle (\langle \mu^2 \rangle - 1)}; \quad (11)$$

$$\langle \mu^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu. \quad (12)$$

Интеграл в формуле (12) также рассчитывается по методу трапеций на заданной сетке по угловой переменной. Если сетка по угловой переменной достаточно подробна, так что значение $\langle \mu^2 \rangle$ становится близко к $1/3$, то согласно формулам (10), (11) получаем значения $a = 0$, $b = 1$.

Таким образом, на подробной сетке по μ значение D_ε будет близко к значению D_ε^* . Если значение D_ε^* будет близко к $\langle \mu^2 \rangle$, то коэффициент квазидиффузии будет равен $1/3$. Если $D_\varepsilon^* = 1$, то и $D_\varepsilon = 1$.

Аналогичные требования накладываются и на вычисление интегралов в формуле (8), т. е.

в случае изотропного распределения излучения $\alpha_\varepsilon = 0,5$, а в случае сильной анизотропии $\alpha_\varepsilon = 1$. Для выполнения этих требований достаточно применения интегрирования по методу трапеций.

Исследование метода квазидиффузии на модельных задачах

Ответы на вопросы, поставленные в начале статьи, получим на основе анализа результатов численных расчетов модельных задач. Отметим, что при решении нижеприведенных задач значения интенсивности излучения, используемые для расчета коэффициентов квазидиффузии и коэффициента α_ε , рассчитывались по схеме первого порядка точности как по пространственной, так и по временной и угловой переменным. Для квазидиффузионной системы уравнений используется схема второго порядка точности по пространственной переменной.

Задача 1. Рассмотрим задачу о распространении излучения в сферической системе с нулевыми коэффициентами поглощения и рассеяния. Рассчитывается распределение излучения в системе с внутренним радиусом 0,4 см и наружным радиусом 4 см. На внутренней границе задан падающий поток равновесного излучения с температурой 1 кэВ, на внешней границе задано условие на свободной поверхности.

Сетка по энергии имеет следующий вид: $\varepsilon = 0,0001; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 1,0; 1,4; 1,8; 2,2; 2,6; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5; 5,0; 5,5; 6,0; 7,0; 8,0; 10,0; 12,0; 15,0$ (кэВ). Сетка по пространству берется неравномерная: вблизи внутренней и внешней границ интервал равен 10^{-4} , к середине системы размер ячейки увеличивается по геометрической прогрессии. Всего в расчете задается 134 пространственных интервала. Сетка по угловой переменной — равномерная с числом углов от 4 до 1024.

Для получения квазидиффузионных коэффициентов решается кинетическое уравнение с использованием схемы первого порядка точности. Стационарное распределение температуры излучения в этой задаче описывается формулой

$$T_f = T_{lg} \sqrt[4]{\sqrt{1 - \sqrt{1 - r_{lg}^2/r^2}}}.$$

Здесь T_{lg} — заданная температура на внутренней поверхности сферы радиусом r_{lg} ; r — текущий радиус.

Данная задача характеризуется тем, что вблизи внешней поверхности все излучение сосредоточено в узком угловом диапазоне в пределах $0,995 < \mu < 1$. Поэтому для решения задачи требуется очень подробная сетка по угловой переменной. В рассматриваемом случае по угловой переменной необходимо более 1000 направлений, чтобы в указанный диапазон попало хотя бы несколько точек.

На рис. 1 представлена температура излучения, рассчитанная из уравнений квазидиффузии при различном числе направлений по угловой переменной. Хорошо видно, что 8–16 углов вполне достаточно, чтобы получить хорошее приближение к точному решению. Хотя, как сказано выше, для корректного расчета кинетического уравнения требуется не менее 1000 направлений по углу. Это объясняется тем, что на грубой сетке по угловой переменной решение кинетического уравнения вблизи внешней границы будет отлично от нуля только для одного угла, соответствующего $\mu = 1$. Коэффициент квазидиффузии в этом случае равен 1 и слабо зависит от числа направлений по угловой переменной.

Решение кинетического уравнения в данной задаче, особенно по недивергентной схеме первого порядка, будет сильно зависеть от сетки по угловой переменной. Это хорошо видно из рис. 2, на котором представлены зависимость мощности потока излучения от числа направлений по угловой переменной, полученные из кинетического и квазидиффузионного уравнений на внешней границе. Для вычисления потока использовалось интегрирование по методу трапеций.

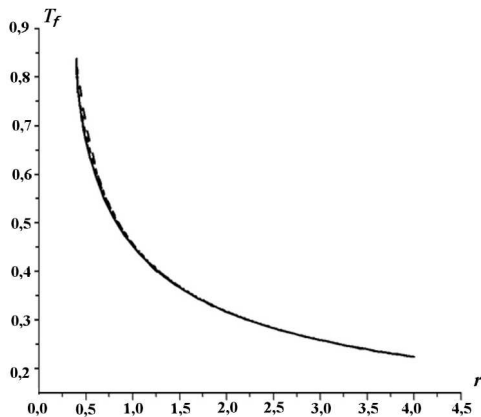


Рис. 1. Профиль температуры излучения: — — — точное решение; — — — — 4 направления по угловой переменной; - - - - 8 направлений по угловой переменной; · · · · 16 направлений по угловой переменной; · · · · 32 направления по угловой переменной

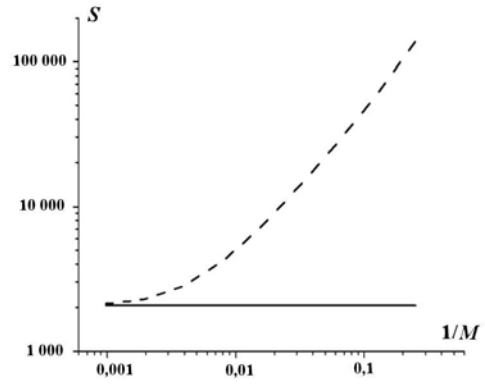


Рис. 2. Мощность потока излучения на внешней границе в зависимости от числа направлений M по угловой переменной: — — — расчет по квазидиффузионному уравнению; - - - - расчет по кинетическому уравнению

Отметим, что в данной задаче полный поток равен падающему потоку (см. формулу (9)). Поэтому использование консервативных разностных схем (а для квазидиффузионной постановки используется именно такая схема) позволяет правильно передать полный поток, независимо от угловой сетки. Отметим также, что использование консервативной схемы для уравнения переноса приводит к тому же эффекту. В расчетах кинетического уравнения использовалась более простая неконсервативная схема, поэтому решение, полученное из кинетического уравнения, сходится к решению, полученному из квазидиффузионного уравнения, только при 1024 направлениях по углу.

Задача 2. Рассмотрим задачу из работы [5], которая имеет аналитическое решение. Рассчитывается прохождение неравновесного излучения через плоский слой вещества толщиной 4 см. Начальная температура вещества $T = 0,001$ кэВ. Плотность вещества $\rho = 1$. Уравнение состояния задается в виде $E = 152,73T^4$. Спектральный коэффициент поглощения

$$\kappa_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4T^2(1 - \exp(-\varepsilon/T))}.$$

На правой границе задается условие на свободной поверхности, на левой границе — входящая интенсивность

$$I_\varepsilon(x_0 = 0, t > 4,66, \varepsilon, \mu > 0) = \frac{200\varepsilon^3}{(4 - 3,7\mu) \left(\exp\left(-\frac{\varepsilon}{5(t - 4,66)}\right) - 1 \right)}.$$

В расчетах использовалась равномерная сетка по пространственной и угловой переменным. В первом варианте задача считается с 40 интервалами по пространству и 12 направлениями по углу; во втором варианте — 160 интервалов по пространству и 28 направлений по углу. Сетка по спектру задавалась в том же виде, что и в задаче 1.

Решение данной задачи имеет вид

$$T = \begin{cases} 5(t - 4,66x), & \text{если } t > 4,66x; \\ 0, & \text{если } t < 4,66x. \end{cases}$$

Результаты расчетов задачи представлены на рис. 3, 4. На них приведено сравнение полученного решения не только с точным решением, но и с решениями, из *кинетического расчета* по схемам первого и второго порядка точности, которые любезно представлены В. В. Завьяловым [5].

Как видно из рис. 3, решение, полученное на грубой сетке (40 пространственных интервалов и 12 направлений по угловой переменной) на основе квазидиффузионного подхода с использованием схемы первого порядка для решения кинетического уравнения, существенно точнее, чем прямой расчет переноса излучения по кинетическому уравнению с использованием схемы первого порядка. Схема второго порядка на этой сетке дает более точный результат, хотя размазывание фронта тепловой волны примерно одинаково.

На рис. 4 приведены результаты расчета данной задачи на более подробной сетке (160 про-

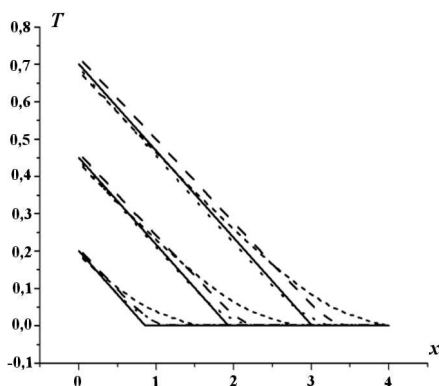


Рис. 3. Профили температуры на различные моменты времени на сетке из 40 интервалов по пространству и 12 направлений по угловой переменной: — — точное решение; — — — квазидиффузионное решение; - - - кинетический расчет по схеме первого порядка точности; - - - кинетический расчет по схеме второго порядка точности

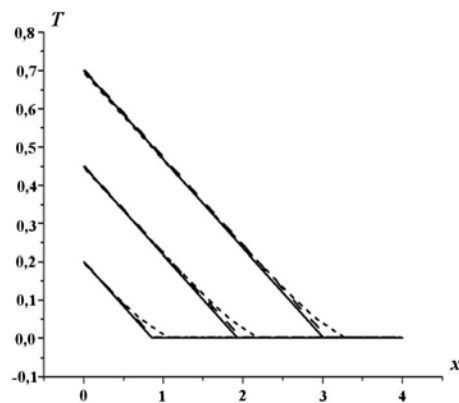


Рис. 4. Профили температуры на различные моменты времени на сетке из 160 интервалов по пространству и 28 направлений по угловой переменной: — — точное решение; — — — квазидиффузионное решение; - - - кинетический расчет по схеме первого порядка точности

странственных интервалов и 28 направлений по угловой переменной). Как хорошо видно, квазидиффузионный подход на этой сетке дает существенно более точное решение, чем прямой расчет по кинетическому уравнению с использованием схемы первого порядка точности.

Задача 3. В качестве следующей задачи рассмотрим вторую задачу Флека из работы [6]. Наиболее подробно данная задача рассмотрена в работе [5]. На поверхности плоского слоя толщиной 4 см задается источник изотропного планковского излучения с температурой 1 кэВ. Слой состоит из трех физических областей: область 1 — $0 < x < 2$; область 2 — $2 < x < 2,4$; область 3 — $2,4 < x < 4$. Коэффициент поглощения вычисляется по формуле

$$\kappa_\varepsilon = \frac{\kappa_0(1 - \exp(-\varepsilon/T))}{\varepsilon^3};$$

$\kappa_0 = 27$ в областях 1 и 3, $\kappa_0 = 10000$ в области 2. Уравнение состояния вещества взято в виде: $E = 0,81T$.

Пространственная сетка — неравномерная и имеет следующий вид: $x_0 = 0; 0,004; 0,04; x_3 = 0,1; \dots; x_{21} = 1,9$ (8 интервалов, $h = 0,1$); $x_{22} = 1,987; 1,999; 2; 2,001; 2,004; 2,013; x_{28} = 2,04; \dots; x_{36} = 2,36$ (8 интервалов, $h = 0,04$); $x_{37} = 2,396; 2,4; 2,404; 2,44; x_{41} = 2,5; \dots; x_{56} = 4$ (15 интервалов, $h = 0,1$). При этом число интервалов в областях 1, 2, 3 — 24, 14, 18 соответственно, итого 56 интервалов по простран-

ству. Был также проведен расчет с утроенным числом интервалов по пространству. Сетка по μ во всех расчетах выбиралась равномерной, задавалось 16 направлений по угловой переменной.

Результаты расчетов данной задачи представлены на рис. 5, 6. Из рисунков видно, что квазидиффузионный подход дает практически точное решение на сетке со 168 пространственными интервалами (за точное решение взято решение из работы [5]), в то время как в прямом расчете кинетического уравнения по схеме первого порядка получен результат, весьма далекий от точного решения.

Во всех вышеприведенных расчетах коэффициент квазидиффузии рассчитывался один раз на шаге. Представляет интерес вопрос, как повлияет на динамику расчета организация внешних итераций, когда на каждой итерации по температуре после получения нового значения температуры вещества будет пересчитываться коэффициент квазидиффузии.

С целью исследования скорости сходимости внешних итераций решалась вторая задача Флека. Следует отметить, что в этом случае количество итераций по температуре возросло на одну, максимум две итерации. Результаты расчетов с внешними итерациями по коэффициенту квазидиффузии и без них совпали с точностью до

константы сходимости. Итерации проводились до получения пяти верных знаков.

Характер сходимости итераций сохраняется и на других задачах. Это вполне естественно, поскольку в оптически плотных средах коэффициент квазидиффузии стремится к $1/3$ и практически не зависит от получаемого решения. В оптически прозрачных средах в силу слабого взаимодействия излучения с веществом значение коэффициента квазидиффузии по существу мало меняется на квазидиффузионном этапе расчета, т. е. на этапе расчета взаимодействия излучения с веществом. Для промежуточных оптических толщин количество итераций также увеличивается незначительно.

Для понимания описываемого итерационного процесса, особенно для умеренных оптических толщин, приведем следующую его интерпретацию. Известно, что, за исключением экзотических случаев, коэффициенты квазидиффузии могут меняться в узком диапазоне: от $1/3$ до 1. Коэффициент α_ε в граничном условии находится в пределах $0,5 < |\alpha_\varepsilon| < 1$. Трудно представить, что при решении нестационарных задач радиационной газовой динамики с временным шагом, обеспечивающим приемлемую точность, значение коэффициента квазидиффузии и α_ε на шаге менялось бы в указанных крайних пределах.



Рис. 5. Профиль температуры вещества на момент времени $ct = 9$: — — точное решение; — — — квазидиффузионное решение на сетке с 56 интервалами по пространству; - - - квазидиффузионное решение на сетке со 168 интервалами по пространству; ··· — кинетический расчет на сетке с 56 интервалами по пространству по схеме первого порядка точности; ··· — кинетический расчет на сетке со 168 интервалами по пространству по схеме первого порядка точности

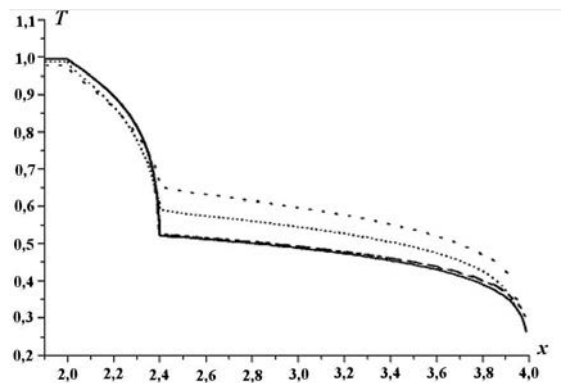


Рис. 6. Профиль температуры вещества на момент времени $ct = 360$: — — точное решение; — — — квазидиффузионное решение на сетке с 56 интервалами по пространству; - - - квазидиффузионное решение на сетке со 168 интервалами по пространству; ··· — кинетический расчет на сетке с 56 интервалами по пространству по схеме первого порядка точности; ··· — кинетический расчет на сетке со 168 интервалами по пространству по схеме первого порядка точности

Приведенные здесь рассуждения и численные эксперименты дают основание сделать вывод, что расчеты большинства нестационарных задач в режиме, когда тепловая волна распространяется на несколько (один-два) пространственных интервалов за один временной шаг, можно вести без внешних итераций по коэффициенту квазидиффузии, не опасаясь за точность результатов.

Из приведенных выше результатов видно (особенно из рис. 5, 6), что использование для расчетов в спектральной кинетической постановке схемы первого порядка точности приводит к существенному отклонению полученного решения от точного, в то время как при квазидиффузионном подходе использование этой схемы для вычисления коэффициентов квазидиффузии оправданно.

Возможность использования в квазидиффузионном подходе для решения кинетического уравнения простых абсолютно устойчивых и монотонных схем первого порядка точности по всем переменным приводит к существенному упрощению общего алгоритма вычислений. Применение схем повышенного порядка точности для вычисления коэффициентов квазидиффузии, как показали численные эксперименты, не повышает точности расчета, а приводит лишь к усложнению общего алгоритма счета и, как следствие, увеличению времени расчета задачи в целом.

Выводы

Квазидиффузионный подход имеет следующие преимущества перед кинетической постановкой:

1. Для вычисления коэффициентов квазидиффузии и коэффициентов α_ϵ в граничном условии используются простые монотонные схемы первого порядка точности по всем переменным.
2. Построение быстросходящихся итерационных процессов по температуре гораздо проще осуществить для уравнений квазидиффузионного типа, нежели для кинетического уравнения, особенно если для решения

последнего использовать схемы повышенного порядка точности.

3. Итерации по коэффициенту квазидиффузии и коэффициентам α_ϵ в граничном условии быстро сходятся, так что для большинства практически важных задач счет можно вести без внешних итераций по коэффициенту квазидиффузии.

Список литературы

1. *Гольдин В. Я.* Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078—1087.
2. *Freeman B. E., Hauser L. E., Pahner J. T., Pickard S. O., Simmons G. M., Williston D. G., Zerkle J. E.* DASA Report No. 2135. Vol. I. La Jolla: Systems, Science and Software Inc. 1968.
3. *Spillman G. R.* Formulation of the Eddington factor for use in one-dimensional nonequilibrium diffusion calculations // Scientific Laboratory Office Memorandum. Los Alamos, 1968.
4. *Карлыханов Н. Г.* Построение оптимальных многодиагональных методов решения задач переноса излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 4. С. 494—498.
5. *Завьялов В. В., Козманов М. Ю., Селезнёв В. Н., Черняков В. Е., Шестаков А. А.* Результаты численных расчетов одномерных тестовых задач переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 26—36.
6. *Fleck J. A., Cummings Jr. J. D.* An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency depend nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys., 1971. Vol. 8. P. 313—342.

Статья поступила в редакцию 20.10.08.

УДК 519.6

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА РАЙБИКИ К ПРОЦЕССУ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ИТЕРАЦИЯМИ ПО ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ

Е. В. Грошев
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Предлагается один алгоритм использования метода Райбики в итерациях по граничным условиям, совмещенных с простой итерацией кинетического уравнения, при решении нестационарных спектральных сферически-симметричных задач переноса излучения. Вся система разбивается на математические подобласти, и после проведения простой итерации для кинетического уравнения со значениями спектральной интенсивности, которые служат входящими потоками для соответствующих математических подобластей, решается (методом Райбики) задача переноса излучения.

Ключевые слова: система уравнений переноса излучения, метод Райбики, итерации по граничным условиям, алгоритм использования метода Райбики в итерациях по граничным условиям.

Введение

Система уравнений переноса излучения в многогрупповом приближении нелинейна. Если линеаризовать функцию Планка и внутреннюю энергию по температуре и исключить температуру, то получим уравнение переноса излучения с полной матрицей взаимодействия между группами [1].

В работе Фотрие [2] для решения линеаризованной системы предложено применять *прямой* метод матричной прогонки, который становится экономически неэффективным при возрастании числа точек по пространству и особенно числа групп фотонов.

В работе [3] для решения линеаризованной системы в двумерном случае предложен успешно применяемый на практике КМ-метод.

Если для решения линеаризованной системы для схем *треточечного* типа применить метод типа Якоби, то получим метод из работы [4]. К использующим так или иначе для ускорения сходимости простых итераций метод Якоби следует отнести работы [5, 6]. Надо отметить, что успешное применение метода Якоби напрямую связано с монотонностью схемы, применяемой для решения уравнения переноса излучения.

Для немонотонных схем (под этим понимаются S_n -, DS_n -схемы второго порядка точности с разными алгоритмами монотонизации) можно использовать метод выделения диагонального элемента (ВДЭ), изложенный в работе [7].

К прямым методам решения системы уравнений переноса излучения следует отнести метод Райбики [8]. В статьях [9, 10] рассмотрены методы ускорения, основанные на замене в итерационном процессе матрицы Райбики на *многодиагональную* матрицу, что может приводить к сокращению объема вычислений и времени счета по сравнению с методом Райбики.

В данной работе предлагается один алгоритм использования метода Райбики в итерациях по граничным условиям, совмещенных с простой итерацией кинетического уравнения, при решении нестационарных спектральных сферически-симметричных задач переноса излучения [11]. Вся система разбивается на математические подобласти, и после проведения простой итерации кинетического уравнения для всей системы с теми значениями спектральной интенсивности, которые служат входящими потоками для соответствующих математических подобластей, решается (методом Райбики) задача переноса излучения. Полученные в результате значения тем-

ператур служат "отправными" для следующей простой итерации уравнения переноса.

На примере решения вариантов задачи Флека [12] с разными шагами по времени показывается, что при оптимальных разбиениях системы время решения сокращается по сравнению с методом Райбки от 1,8 до 20 раз. Отношения оптимальных времен счета соответствующих вариантов задачи ко временам, затраченным при расчете по ST_n -схеме [13], использующей быстро сходящиеся спектральные P_1 -поправки [6], колеблются в пределах от 1,66 до 0,67.

1. Метод Райбки

Метод Райбки [8] для решения задач переноса излучения заключается в следующем.

Рассмотрим систему нестационарных спектральных уравнений, описывающую процесс переноса излучения в веществе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\omega}{c\partial t} + \frac{\partial r^2 \mu N_\omega}{r^2 \partial r} + \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{(1 - \mu^2) N_\omega}{r} + \\ + \chi_\omega N_\omega = \frac{\chi_\omega}{2} B_\omega; \quad (1) \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} = \int_\omega \chi_\omega \left(n_\omega^{(0)} - B_\omega \right) d\omega, \end{aligned}$$

где для уравнения переноса фотонов возьмем многогрупповое сферически-симметричное приближение. Здесь c — скорость света; r — радиус; t — время; ω — частота; μ — косинус угла между направлением полета фотонов и радиусом; $N_\omega(r, \mu, \omega, t)$ — спектральная интенсивность излучения; $\chi_\omega(r, \omega, T)$ — коэффициент поглощения, $T(r, t)$ — температура среды; $E(r, t)$ — внутренняя энергия вещества; $B_\omega(\omega, T)$ — функция Планка; $n_\omega^{(0)} = \int_{-1}^{+1} N_\omega d\mu$.

Для аппроксимации системы (1) по времени применим неявную схему первого порядка; по переменным r и μ используем DS_n^7 -схему [14], причем для простоты сетку по угловой переменной возьмем из двух интервалов: $-1 \leq \mu \leq 0$; $0 < \mu \leq +1$.

На рис. 1 изображена сетка по r и μ в задаче, а также показано центрирование значений функции N (см. [14]), индекс группы опущен. В соответствии с рисунком имеем формулу $n_{p+1/2}^{(0)} = N_{p+1/2, 2} + N_{p+1/2, 4}$.

Систему разностных уравнений, возникшую при аппроксимации задачи (1), будем решать

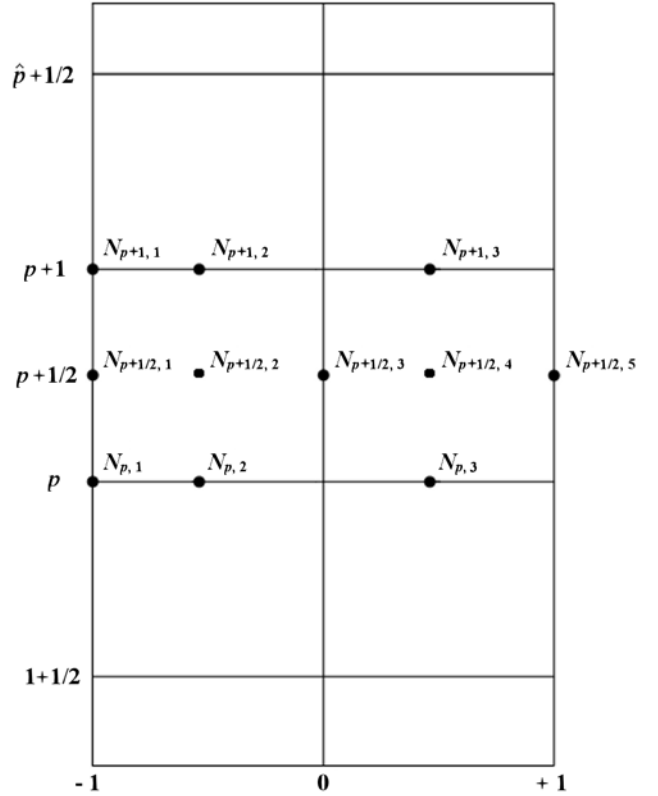


Рис. 1. Сетка по r и μ , центрирование функции N

простыми итерациями. Запишем ν -ю итерацию, оставляя для краткости в записи дифференциальные операторы только по r и μ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^2 \mu N_k^{\nu+1/2}}{r^2 \partial r} + \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{(1 - \mu^2) N_k^{\nu+1/2}}{r} + \\ + \left(\chi_k^n + \frac{1}{c\Delta t} \right) N_k^{\nu+1/2} = \frac{\chi_k^n}{2} B_k^\nu + \frac{N_k^n}{c\Delta t}; \quad (2) \\ \rho \frac{E^{\nu+1/2} - E^n}{\Delta t} = \\ = \sum_k \chi_k^n \left(\Delta n_k^{(0)\nu+1/2} - B_k^{\nu+1/2} \right) \Delta \omega_k, \end{aligned}$$

где n — номер временного шага; k — номер группы фотонов.

В результате решения системы (2) по температуре T^ν находим температуру $T^{\nu+1/2}$.

Во время проведения простой итерации, пользуясь тем, что сетка по μ содержит два интервала, нетрудно получить в каждой группе фотонов с номером k связь между векторами $\left(\overrightarrow{n_k^{(0)}} \right)^{\nu+1/2} = \left(n_{k,1+1/2}^{(0)\nu+1/2}, \dots, n_{k,p+1/2}^{(0)\nu+1/2}, \dots, n_{k,\hat{p}+1/2}^{(0)\nu+1/2} \right)$ и $\left(\overrightarrow{B_k^\nu} \right)^\nu = \left(B_{k,1+1/2}^\nu, \dots, B_{k,p+1/2}^\nu, \dots, B_{k,\hat{p}+1/2}^\nu \right)$, где \hat{p} — число интервалов сетки по r .

Для $(p + 1/2)$ -й компоненты вектора $\left(\overrightarrow{n_k^{(0)}}\right)^{\nu+1/2}$ имеем

$$\left(n_{k,p+1/2}^{(0)}\right)^{\nu+1/2} = \left(\sum_{q=1}^{\hat{p}} A_{k,p+1/2,q+1/2}^{\nu+1/2} B_{k,q+1/2}^{\nu}\right) + C_{k,p+1/2}^{\nu+1/2}. \quad (3)$$

Считая, что решение разностного аналога системы (1) — вектор $\overrightarrow{n_k^{(0)}}$ — связано с вектором $\overrightarrow{B_k}$ через матрицу $A_{k,p+1/2,q+1/2}^{\nu+1/2}$, подставляем эту связь в уравнение энергии. Получаем

$$\rho_{p+1/2} \frac{E_{p+1/2}^{\nu+1} - E_{p+1/2}^{\nu}}{\Delta t} = \sum_k \left\{ \Delta\omega_k \chi_{k,p+1/2}^n \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\sum_q^{\hat{p}} A_{k,p+1/2,q+1/2}^{\nu+1/2} B_{k,q+1/2}^{\nu+1}\right) + C_{k,p+1/2}^{\nu+1/2} - B_{k,p+1/2}^{\nu+1} \right] \right\}. \quad (4)$$

Решая уравнение (4) методом Ньютона, находим значение температуры $T^{\nu+1}$. С этой температурой начинаем простую итерацию с номером $\nu + 1$.

Описанный итерационный процесс называется методом Райбики для задач переноса излучения. Скажем несколько слов о его особенностях.

Если бы схема, используемая при решении уравнения переноса в системе (1), была линейной (точнее, весовые параметры γ_r , γ_μ не менялись на простых итерациях), то связь (3) являла бы собой разностный аналог уравнения Пайерлса, эквивалентного уравнению переноса. Для решения системы (1) требовалась бы одна итерация метода Райбики. Метод Райбики в этом случае был бы прямым методом решения системы (1). Однако поскольку на практике схемы второго порядка (в частности DS_n^γ -схема) немонотонны, то из-за различных алгоритмов монотонизации схемы становятся нелинейными, и вследствие этого метод Райбики получается итерационным. На практике (см. разд. 3) число этих итераций по всем расчетам невелико (в среднем не превышает 7), и это является основным достоинством метода Райбики.

К сожалению, метод Райбики является дорогостоящим. Время тратится как на простой итерации кинетического уравнения при получении матриц $A_{k,p+1/2,q+1/2}^{\nu+1/2}$, так и при подстановке

матричной связи (3) в уравнение энергии и его решении методом Ньютона.

Число операций при получении матриц равно

$$LI_1\hat{p}^2. \quad (5)$$

Здесь I_1 — число энергетических групп в задаче; L — число операций на один элемент матрицы размером $\hat{p} \times \hat{p}$ (если сетка по μ будет состоять из \hat{f} интервалов, то $L \approx 5\hat{f}$; в частности, для двух интервалов сетки по μ $L \approx 5 \cdot 2 = 10$).

Число операций при решении уравнения энергии —

$$M\alpha I_1\hat{p}^2, \quad (6)$$

где M — число операций на один элемент матрицы размером $\hat{p} \times \hat{p}$, $M \approx 10^2$; α — число итераций метода Ньютона. Время, затрачиваемое на решение матричного уравнения размером $\hat{p} \times \hat{p}$, например, методом Гаусса, вообще говоря, имеет порядок \hat{p}^3 . Однако в приведенных ниже примерах оно составляет не более 5% от времени, которое тратится на получение этой матрицы, и поэтому не рассматривается. В задачах, где это время является определяющим, выигрыш от предлагаемого алгоритма еще больше.

Суммарное время (время блока Райбики) составляет "львиную долю" общего времени, затрачиваемого на решение системы (1). Заметим, что число операций в блоке Райбики квадратично зависит от числа пространственных интервалов, т. е. резко сокращается при уменьшении их количества в системе. Поэтому представляется перспективным использовать метод Райбики в рамках алгоритма итераций по областям [11], применяя его для решения задач переноса излучения (1) в областях с малым числом пространственных интервалов.

2. Использование метода Райбики в итерациях по граничным условиям

Рассмотрим следующий алгоритмический процесс, важным элементом которого сделаем метод Райбики. Метод Райбики будем использовать для решения задачи переноса излучения в математических подобластях, которые будем вводить в физических областях, образующих систему.

Более конкретно: возьмем для примера трехобластную задачу. Сетку по r в каждой области выберем равномерной.

В каждой из физических областей введем математические подобласти. Для этого будем объединять интервалы первоначального разбиения физической области. Для определенности пусть в пределах каждой физической области математические подобласти будут по размерам одинаковыми. Описанная конструкция изображена на рис. 2: первая физическая область состоит из четырех ячеек — двух математических подобластей; вторая физическая область совпадает с математической подобластью; третья физическая область состоит из четырех ячеек — двух математических подобластей.

Сформулируем теперь основные положения предлагаемого алгоритма.

Сначала проводим простую итерацию для всей системы с номером ν (см. (2)).

Далее в каждой группе фотонов из значений $N^{\nu+1/2}$, полученных на простой итерации, выбираем те, которые служат граничными условиями для введенных математических подобластей (на рис. 2 значения $N^{\nu+1/2}$ — граничные условия для математической подобласти 1 физи-

ческой области 3), после чего в каждой из этих математических подобластей решаем задачу (1) методом Райбки. При этом весовые параметры в каждой из ячеек сохраняем с простой итерации с номером ν .

Таким образом, получаем итерационный процесс, который доводим до сходимости. На практике итерации по температуре метода Райбки в математических подобластях (их назовем *внутренними* итерациями) сводятся с большей точностью (раз в 10), нежели итерации с индексом ν (последние назовем *внешними*). Внешние итерации называются итерациями по подобластям, совмещенными с простыми итерациями кинетического уравнения [11]. Такие итерации широко применяются для решения многомерных задач переноса нейтронов и фотонов. Они хорошо сходятся в оптически плотных системах. При увеличении шага по времени, а также при возрастании числа подобластей их сходимость замедляется.

Представляется интересным оценить количество операций в блоке метода Райбки при переходе от его использования для всей системы (классический метод Райбки) к применению в итерациях *по областям* (предлагаемый метод).

Для этого рассмотрим систему G из \hat{d} физических областей с равным числом интервалов по пространству и общим числом интервалов \hat{p} . Таким образом, в каждой физической области \hat{p}/\hat{d} интервалов. Рассмотрим такое разбиение системы G , при котором каждая физическая область считается математической.

Прежде всего заметим, что на простой итерации для всей системы число операций в блоке метода Райбки пропорционально \hat{p}^2 (см. (5), (6)). Если провести простую итерацию одновременно во всех областях, то суммарное число операций в блоке Райбки будет пропорционально числу $\frac{\hat{p}^2}{\hat{d}} = \hat{d} \frac{\hat{p}^2}{\hat{d}^2}$, т. е. в \hat{d} раз меньше.

Этот факт является основной предпосылкой для успешного применения предлагаемого алгоритма. Оценим точнее соотношение числа операций в методе Райбки и предлагаемом алгоритме на шаге по времени.

При применении метода Райбки для решения задачи (1) во всей области G в блоке алгоритма Райбки на шаге по времени будет сделано следующее число операций:

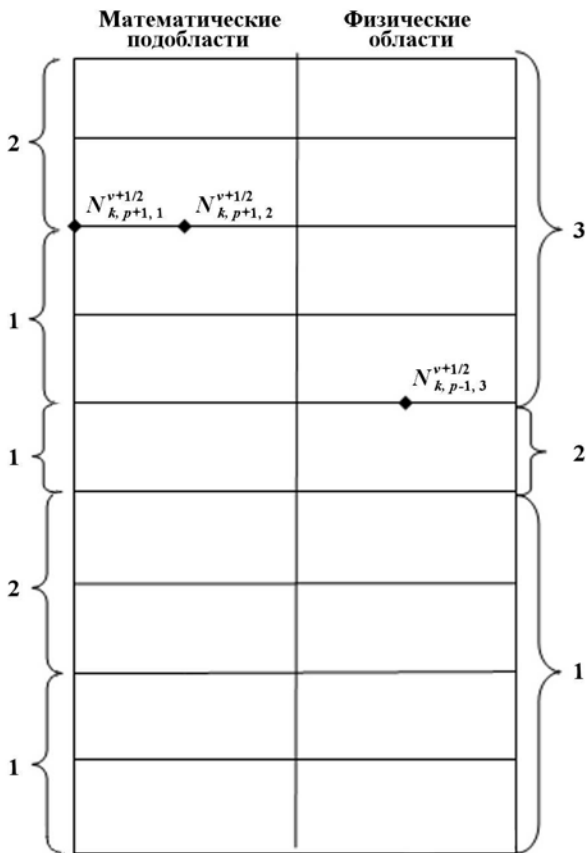


Рис. 2. Система из трех физических областей с выделенными математическими подобластями

$$\sum_{S=1}^K (I_1 L \hat{p}^2 + I_1 \alpha_S M \hat{p}^2). \quad (7)$$

Здесь K — число итераций метода Якоби в области G ; $I_1 L \hat{p}^2$ (5) — число операций при получении групповых матриц Райбики на итерации метода Якоби; $I_1 \alpha_S M \hat{p}^2$ (6) — число операций при решении уравнения энергии с помощью групповых матриц Райбики.

Если теперь использовать вышеуказанный алгоритм счета по областям, то на шаге по времени на него будет затрачено операций

$$\sum_{\nu=1}^{K_1} \left[\sum_{d=1}^{\hat{d}} \left(\sum_{S=1}^{K_{\nu,d}} I_1 L \frac{\hat{p}^2}{d^2} + \sum_{S=1}^{K_{\nu,d}} I_1 \alpha_{\nu,d,S} M \frac{\hat{p}^2}{d^2} \right) \right], \quad (8)$$

где K_1 — число итераций по областям (внешних итераций); $K_{\nu,d}$ — число итераций метода Якоби в математической области с индексом d на ν -й внешней итерации; $\alpha_{\nu,d,S}$ — число итераций в методе Ньютона при решении уравнения энергии на S -й итерации метода Якоби в d -й области системы на ν -й внешней итерации.

На основании следующих рассуждений:

- оптическая толщина любой математической подобласти меньше оптической толщины системы;
- математические подобласти рассчитываются в каждой группе с фиксированными значениями весовых параметров;
- любая подобласть может иметь фоновую температуру, поскольку тепловая волна до нее еще, скажем, не дошла, и т. д.

с большой долей достоверности можно утверждать, что все $K_{\nu,d} \leq K$. Также можно утверждать следующее: поскольку любая математическая подобласть содержит меньше интервалов по пространству, чем вся система, метод Ньютона сходится в ней быстрее, а следовательно, $\alpha_{\nu,d,S} \leq \alpha_S$. В принципе эти соотношения в данной ситуации можно просто навязать. Поэтому значение величины (8) только увеличится при замене $K_{\nu,d}$ на K и $\alpha_{\nu,d,S}$ на α_S .

С учетом сказанного число операций при счете по областям становится равным

$$K_1 \left(\sum_{S=1}^K I_1 L \frac{\hat{p}^2}{\hat{d}} + \sum_{S=1}^K I_1 \alpha_S M \frac{\hat{p}^2}{\hat{d}} \right). \quad (9)$$

Разность между (7) и (9) имеет вид

$$I_1 \hat{p}^2 \left[L \left(1 - \frac{K_1}{\hat{d}} \right) + M \left(1 - \frac{K_1}{\hat{d}} \right) \sum_S \alpha_S \right]. \quad (10)$$

Если число (10) положительно, то происходит уменьшение числа операций. Отрадно, что это число увеличивается с возрастанием I_1 и \hat{p} .

Итак, если число $1 - K_1/\hat{d}$ положительно, то происходит уменьшение числа операций (времени) при переходе от классического метода Райбики к предлагаемому алгоритму. Заведомо можно указать ситуацию, когда это выполняется: при малых шагах по времени, когда число K_1 невелико, за счет увеличения числа областей \hat{d} выражение (10) нетрудно сделать положительным.

На практике (см. разд. 3) уменьшение времени счета происходит в большинстве случаев и при крупных шагах Δt , а также при значениях $K_1/\hat{d} > 1$. Это свидетельствует о том, что при предположении $K_{\nu,d} = K$ и $\alpha_{\nu,d,S} = \alpha_S$ сильно завышается (8).

3. Численные результаты

Рассматривались два варианта задачи Флека [12].

На внутреннюю поверхность сферического слоя толщиной 4 см падает планковский поток излучения, соответствующий температуре вещества $T = 1$ кэВ. Слой состоит из трех физических областей: область 1 — $100 < r < 102$; область 2 — $102 < r < 102,4$; область 3 — $102,4 < r < 104$. Коэффициент поглощения вычислялся по формуле $\chi_\omega = \frac{A(1 - e^{-\omega/T})}{\omega^3}$, параметр A варьировался (табл. 1).

Начальная температура $T_{\text{фон}} = 0,00001$ кэВ, уравнение состояния — $E = 0,81T$. По энергетической переменной расчеты производились на сетке $\omega = 0; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 1; 1,4; 1,8; 2,2; 2,6; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5; 6; 7; 8; 10; 12; 15$ (всего 28 групп). Сетка

Таблица 1

Значения параметра A в трех областях для двух вариантов задачи Флека

Номер варианта	Область 1	Область 2	Область 3
1	27	10^4	27
2	10^4	10^4	10^4

по угловой переменной состояла из двух равных интервалов.

Для варианта 1 задачи Флека сетка по пространству состояла из 360 интервалов: 144 интервала в области 1; 96 интервалов в области 2; 120 интервалов в области 3. В каждой области сетка выбиралась равномерной.

Для варианта 2 (все области плотные) сетка по пространству состояла из 360 равных интервалов.

Каждый вариант просчитывался с шагами $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$ (10 000 шагов), $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ (1 000 шагов), $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ (100 шагов), $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ (в варианте 2 — 30 шагов, в варианте 1 — до стационарного решения). Внешние итерации сводились с относительной точностью $\varepsilon = 10^{-8}$.

В табл. 2 приведены результаты решения варианта 2 задачи Флека: для определенных значений временного шага указывается время расчета на ПЭВМ, а также среднее число итераций на шаге для метода Райбики и ST_n -схемы или среднее число внешних итераций в расчетах с предложенным алгоритмом (d — количество математических областей в разбиении).

Прокомментируем результаты, приведенные в табл. 2.

По табл. 2 можно наблюдать действие предложенного алгоритма: при равенстве среднего числа внешних итераций время расчета падает при увеличении числа математических подобластей.

Оптимальные по времени расчеты: при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$ — для 60 математических подобластей; при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ — для 60 математических подобластей; при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ — для 6 математических подобластей; при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ — для 60 математических подобластей. Таким образом максимальный выигрыш предлагаемого алгоритма по сравнению с методом Райбики (см. времена в первой строке табл. 2 и оптимальное время) колеблется в пределах от 8,5 до 22,8 раза. Эффективность алгоритма также возрастает при уменьшении шага по времени. Оптимальное время расчета варианта 2 задачи Флека существенно сблизилось (по сравнению с методом Райбики) со временем расчета этой же задачи с помощью ST_n -схемы. Отношения оптимального времени расчета второго варианта задачи Флека для каждого выбранного Δt ко времени расчета этой же задачи с помощью ST_n -схемы равны соответственно 1,66; 1,47; 0,75; 0,67.

Главный вывод: экономия времени происходит при любом разбиении системы.

В табл. 3 приведены результаты решения варианта 1 задачи Флека: для определенных шагов указывается время расчета на ПЭВМ, а также среднее число итераций на шаге для метода Райбики и ST_n -схемы или среднее число внешних итераций в расчетах с предложенным алгоритмом (три числа в первом столбце — число математических подобластей в каждой физической области).

Прокомментируем результаты, приведенные в табл. 3.

Оптимальные по времени расчеты: при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$ в каждой из трех областей — 24 математические подобласти; при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ в каждой области — 24 математические подобласти; при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ в каждой области — 12 математических подобластей; при $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ в каждой области — 6 математических подобластей. Таким образом, максимальный выигрыш при использовании предлагаемого алгоритма в данном случае колеблется от 1,8 до 19,5 раза. Эффективность алгоритма также возрастает при уменьшении шага по времени. Отношения оптимального времени расчета первого варианта задачи Флека для каждого выбранного Δt ко времени расчета этой же задачи с помощью ST_n -схемы равны соответственно 1,58; 0,89; 0,75; 0,97.

По результатам табл. 3 отметим, что с возрастанием шага Δt в оптимальном разбиении число математических подобластей сокращается.

Скажем также, что расчеты с разбиением, где каждая ячейка системы объявляется математической подобластью (см. предпоследние строки табл. 2 и 3), можно считать расчетами по методу ВДЭ из [7], правда, там этот метод рассматривается для P_1 -приближения уравнения переноса фотонов. В связи с этим заметим, что ни в одном из столбцов табл. 2 и 3 такой расчет не является оптимальным по времени.

Теперь коснемся вопроса о затратах оперативной памяти. Если нужно решить задачу, скажем, с $\hat{p} = 1500$ и числом групп $i1 = 50$, то число элементов матрицы $A_{k,p+1/2,q+1/2}$ в методе Райбики равно $1500 \cdot 1500 \cdot 50 = 112\,500\,000$ ($\sim 10^8$). Если систему разбить хотя бы на 10 областей со 150 точками, то число элементов матрицы $A_{k,p+1/2,q+1/2}$, которая будет использоваться в математических подобластях, равно $50 \cdot 150 \times 150 = 1\,125\,000$ ($\sim 10^6$), т. е. в 100 раз меньше. Таким образом, предлагаемый метод заметно сокращает объем оперативной памяти, требуемый при его реализации.

Таблица 2

Результаты решения варианта 2 задачи Флека для различных разбиений физических областей системы на математические области

Метод расчета	$\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$		$\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$		$\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$		$\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$	
	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге
Метод Райбики	21:10:20	1,12	3:23:16	1,54	0:46:02	2,86	0:45:36	6,43
$d = 2$	5:30:38	1,13	0:57:08	1,59	0:20:45	2,94	0:36:45	6,37
$d = 3$	2:30:30	1,13	0:25:20	1,59	0:09:18	2,94	0:14:45	6,5
$d = 4$	1:33:52	1,13	0:15:21	1,59	0:05:24	2,94	0:17:31	26,1
$d = 6$	1:05:12	1,13	0:09:18	1,59	0:02:50	2,94	0:13:18	42,9
$d = 12$	1:04:00	2,73	0:12:46	6,08	0:05:22	16,7	0:08:37	64,0
$d = 24$	0:58:42	3,84	0:11:32	8,45	0:04:35	23,6	0:06:36	87,6
$d = 40$	0:57:50	4,53	0:11:21	9,99	0:04:13	27,5	0:06:41	115
$d = 60$	0:55:40	4,70	0:11:00	10,5	0:03:32	27,8	0:05:20	110
$d = 90$	0:57:51	5,25	0:11:12	11,4	0:03:24	29,1	0:06:11	142
$d = 120$	1:00:07	5,68	0:12:24	13,1	0:05:15	45,3	0:11:00	296
$d = 180$	1:04:11	6,31	0:11:46	12,7	0:03:35	32,1	0:08:11	216
$d = 360$	1:07:30	6,67	0:15:00	16,7	0:10:52	105	0:27:30	785
ST_n -схема	0:33:25	1,07	0:07:27	2,06	0:03:48	3,31	0:08:00	6,73

Таблица 3

Результаты решения варианта 1 задачи Флека для различных разбиений физических областей системы на математические области

Метод расчета	$\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$		$\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$		$\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$		$\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$	
	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге	Время (ч:мин:с)	Число итераций на шаге
Метод Райбики	18:29:00	1,34	2:57:25	2,13	0:16:30	4,00	0:15:30	5,67
1, 1, 1	4:31:45	2,09	1:02:30	3,94	0:18:02	7,67	0:12:08	9,50
2, 2, 2	2:34:23	2,98	0:42:27	7,10	0:14:35	18,4	0:11:40	20,5
3, 3, 3	1:55:47	3,39	0:30:36	8,14	0:11:01	21,9	0:10:00	26,2
4, 4, 4	1:36:00	3,63	0:24:24	8,64	0:09:08	23,7	0:09:02	30,5
6, 6, 6	1:17:33	3,87	0:18:50	9,25	0:07:27	26,6	0:08:33	40,0
12, 12, 12	0:59:48	4,34	0:13:42	10,0	0:06:05	32,8	0:08:38	64,8
24, 24, 24	0:56:43	5,06	0:11:52	11,1	0:06:34	47,6	0:11:43	108
48, 32, 40	0:57:20	5,73	0:13:06	14,0	0:08:42	73,7	0:12:50	157
72, 48, 60	1:02:30	6,57	0:11:22	12,3	0:07:52	71,3	0:14:38	188
144, 96, 120	1:06:11	7,36	0:19:21	23,3	0:18:10	181	0:27:03	387
ST_n -схема	0:35:50	1,7	0:13:30	3,23	0:07:56	4,85	0:08:46	5,20

Об одном способе оптимального разбиения

Разумеется, при решении задач на практике, особенно когда шаг по времени заранее не известен, определить оптимальное разбиение, не проводя численных экспериментов, очень сложно. Автор пока не знает, как это сделать. Однако получить заметный выигрыш по времени по

сравнению с методом Райбики с помощью предлагаемого алгоритма решения задачи переноса излучения можно.

Пусть предстоит выполнить расчет задачи Флека до установления со следующим режимом выбора шагов (k — номер шага):

$$\begin{aligned}
 1 \leq k \leq 500, & \quad \Delta t = 2 \cdot 10^{-6}; \\
 501 \leq k \leq 1000, & \quad \Delta t = 4 \cdot 10^{-6}; \\
 1001 \leq k \leq 1500, & \quad \Delta t = 6 \cdot 10^{-6}; \\
 1501 \leq k \leq 2000, & \quad \Delta t = 8 \cdot 10^{-6}; \\
 2001 \leq k \leq 2500, & \quad \Delta t = 10^{-5}; \\
 2501 \leq k \leq 3000, & \quad \Delta t = 2 \cdot 10^{-5}; \\
 3001 \leq k \leq 3500, & \quad \Delta t = 4 \cdot 10^{-5}; \\
 3501 \leq k \leq 4000, & \quad \Delta t = 6 \cdot 10^{-5}; \\
 4001 \leq k \leq 4500, & \quad \Delta t = 8 \cdot 10^{-5}; \\
 4501 \leq k \leq 5000, & \quad \Delta t = 10^{-4}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Результаты решения варианта 1 задачи Флека для различных разбиений физических областей системы на математические области

Метод расчета	Время, ч:мин:с	Среднее число итераций на шаге
Метод Райбики	6:57:36	1,32
Алгоритм 1	0:49:04	4,70
Алгоритм 2	0:33:07	5,96
ST_n -схема	0:32:10	2,17

Автор выражает благодарность В. А. Пастушенко за помощь в оформлении статьи.

Список литературы

Интуиция подсказывает, что в случае большого разнообразия шагов нужное разбиение можно получить следующим образом. Предварительно необходимо рассчитать задачу с постоянным, средним шагом для данной системы и найти оптимальное разбиение для него, а затем с таким разбиением уже считать задачу по режиму (11).

В качестве такого шага можно взять время, при котором свет проходит через систему, от одного ее конца до другого. Для этого шага $c\Delta t = 4$ ($c = 3000$ — скорость света), следовательно $\Delta t = 0,00133\dots 3$. Заметим, что это значение Δt , как минимум, в 10 раз больше любого шага в (11).

Оптимальное разбиение для такого среднего шага — (6, 6, 6), т. е. каждая физическая область разбивается на шесть равных математических подобластей, причем этот факт определяется за 5-10 шагов счета (не обязательно считать задачу до установления). Расчет с таким разбиением назовем алгоритмом 1.

Если же провести все расчеты по режиму (11) с разбиениями, указанными в табл. 3, оптимальным будет разбиение (24, 24, 24). Расчет с таким разбиением назовем алгоритмом 2.

В табл. 4 приводятся результаты расчета задачи Флека с режимом счета (11) при помощи метода Райбики, с алгоритмами 1 и 2, а также с использованием ST_n -схемы.

Алгоритм 1 сокращает время счета задачи по сравнению с методом Райбики в 8,5 раза и уступает ST_n -схеме в 1,5 раза. Алгоритм 2 сокращает время счета задачи по сравнению с методом Райбики в 12,7 раза, и уступает ST_n -схеме в 1,03 раза.

1. Михалас Д. Звездные атмосферы. М: Мир, 1982.
2. Feautrier P. C. R. // Acad. Sci. Paris. 1964. Vol. 258. P. 3198.
3. Федотова Л. П., Шагалев Р. М. Конечно-разностный КМ-метод для двумерных нестационарных процессов переноса в многогрупповом кинетическом приближении // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 6.
4. Зуев А. И., Карлыханов Н. Г. Метод решения уравнений радиационно-кондуктивного теплопереноса // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 4.
5. Гусев В. Ю., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б. Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения // Там же. 1984. Т. 24, № 12.
6. Грошев Е. В. Об одном методе ускорения сходимости итераций для численного решения одномерного нестационарного уравнения переноса излучения в многогрупповом кинетическом приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1992. Вып. 1.
7. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод выделения диагональной матрицы для численного решения уравнений переноса излучения в P1-приближении по схеме "Ромб" // Там же. 2006. Вып. 1.

8. *Rybicki G.* // J. of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 1971. Vol. 11. P. 589.
9. *Карлыханов Н. Г.* Построение оптимальных многодиагональных методов решения задач переноса излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 4.
10. *Гусев В. Ю., Завьялов В. В., Козманов М. Ю.* Об ускорении сходимости итераций для системы переноса теплового излучения в кинетическом приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 2.
11. *Бутнева О. В., Шумилин В. А.* Численное исследование сходимости итераций по подобластям при решении нестационарного уравнения переноса нейтронов // Там же. 1994. Вып. 1.
12. *Fleck J. A., Cummings J. D.* // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313–342.
13. *Грошев Е. В., Пастушенко А. М., Юдинцев В. Ф.* Об одной трехточечной разностной схеме с весовым множителем для уравнения переноса // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып. 2.
14. *Грошев Е. В., Мясчиц С. В., Юдинцев В. Ф.* О некоторых свойствах DS_n^2 -схем для сферически-симметричного уравнения переноса // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 2.

Статья поступила в редакцию 10.06.09.

УДК 539.122:518.5

ВЕСОВОЙ МНОЖИТЕЛЬ И МЕТОДЫ ОТБОРА. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОГЕРЕНТНОГО РАССЕЯНИЯ ФОТОНОВ

Д. Г. Модестов
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

При использовании весовых методов, которые позволяют увеличить эффективность расчетов, возникает необходимость оценки плотности распределения. В то же время в широко применяемых методах отбора нередко возникает ситуация, когда известна только ненормированная плотность. Предлагается использовать в этом случае некоторую условную случайную величину, математическое ожидание которой равняется плотности распределения для произвольного значения параметра. Приводятся реализация метода для моделирования когерентного рассеяния фотонов и сравнение с другими методами.

Ключевые слова: уравнение переноса, рассеяние фотонов, статистическое моделирование, методы повышения эффективности.

Введение

Важной составляющей методов статистического моделирования являются весовые методы. Эти методы применяются либо для повышения эффективности расчетов, либо для построения оценок, которые невозможно реализовать другим способом. Например, при решении задач переноса широко используются методы выборки по важности и оценки потока в точке, описание которых дается в книге [1]. Общим для всех этих методов является оценка весового множителя, математическое ожидание которого пропорционально плотности распределения рассматриваемой случайной величины при заданном значении последней. Коэффициент пропорциональности зависит только от применяемой методики оценки и здесь рассматриваться не будет. Что же касается самого распределения, то для оценки его плотности обычно используется значение этой плотности. Однако вычислить данное значение не всегда представляется возможным. В частности, такая ситуация возникает при использовании методов отбора [2] (частный случай под названием метода исключения приводится также в [1]) с ненормированной плотностью распределения.

Характерным примером может служить моделирование когерентного рассеяния фотонов на

атомах вещества, построенное на основе данных, сохраненных в библиотеках формата ENDF [3]. При этом подходе задается дифференциальное сечение рассеяния в виде функции, зависящей от энергии фотона (в этой реакции энергия частицы не меняется) и косинуса угла рассеяния. Дополнительно задается интегральное сечение этой реакции в виде табличной функции от энергии. В идеале между сечениями должно быть соответствие: при одном и том же значении энергии интеграл от дифференциального по косинусу угла рассеяния должен равняться интегральному. В этом случае в качестве плотности распределения можно использовать отношение сечений. Однако в реальности точного соответствия не получается по двум причинам. Во-первых, табличное представление интегрального сечения приводит к погрешностям в вычислении функции в междоузлиях. Во-вторых, вследствие сложности самой функции интегрирование ее может быть проведено только численно, что приводит к появлению погрешностей и в самих узлах сетки. Хотя указанные неточности намного меньше неточностей самих данных и практически не сказываются на моделировании реакции, при использовании весовых методов небольшая ошибка в нормировке может привести к заметной ошибке в оцениваемых функционалах.

Таким образом, в ряде задач появляется необходимость вычисления весового множителя без использования нормировочных постоянных.

Оценка значения плотности распределения в методах отбора

Так как все методы отбора можно рассматривать как выборку из усеченного распределения, реализация которой описана в [2], оценку плотности можно также описывать в терминах этого распределения. Для этого удобно ввести следующие обозначения: X_0 — множество значений случайной величины x ; $f_0(x)$ — плотность распределения последней. Если $X \subset X_0$ — измеримое подмножество, то усеченное распределение (см., например, [2]) определяется своей плотностью

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\int_{y \in X} f_0(y) dy}, \quad (1)$$

которая определена на X . Выборка значения случайной величины из этого распределения производится моделированием конечной последовательности независимых испытаний для случайных величин, распределенных с плотностью $f_0(x)$. Условием обрыва последовательности является попадание текущего значения в множество X . Это последнее значение и используется как реализация искомой случайной величины x . В [2] указывается, что эта величина распределена с плотностью (1).

Однако при всей простоте процедуры выборки оценка значения плотности часто представляется достаточно сложной задачей вследствие трудности вычисления интеграла, стоящего в знаменателе (1). Здесь следует отметить, что в общем случае при вычислении весового множителя может использоваться случайная величина, математическое ожидание которой равняется значению плотности распределения в указанной точке.

Для построения этой величины можно воспользоваться тем, что в алгоритме выборки в качестве побочного продукта получается еще одна, независимая с x случайная величина n — длина последовательности независимых испытаний, определенная на множестве натуральных чисел. Вероятность реализации конкретной длины имеет вид

$$P(n) = p(1-p)^{n-1}, \quad (2)$$

где $p = \int_X f_0(x) dx$ — вероятность того, что $x \in X$. С использованием n можно построить случайную величину, применяемую при расчете весового множителя:

$$w(x) = f_0(x)n. \quad (3)$$

Учитывая (1) и (2), несложно вычислить ее математическое ожидание:

$$Mw(x) = f_0(x) \frac{1}{p} = f(x). \quad (4)$$

Это соотношение и позволяет применять (3) при оценке весового множителя. Следует заметить, что при использовании весовых методов обычно производится и выборка из распределения (1), что, в свою очередь, позволяет получать реализацию n без дополнительных временных затрат.

Хотя (3) дает выражение для весового множителя в общем случае, представляется полезным привести его для частного, но, наверное, наиболее широко используемого на практике метода, который в [1] называется методом исключения, а в [2] — методом Неймана. Выборка с его использованием строится следующим образом.

Пусть имеется ненормированная плотность распределения $g(y)$ для случайной величины, принимающей значения на множестве Y . Пусть, кроме того, на этом же множестве известна ненормированная *мажорирующая* плотность распределения $g_0(y)$ такая, что

$$g(y) \leq g_0(y). \quad (5)$$

При этом для $g_0(y)$ известна процедура выборки случайной величины и значение нормировочного интеграла

$$C_0 = \int_Y g_0(y) dy. \quad (6)$$

Для построения процедуры выборки из распределения $g(y)$ вводится вспомогательное пространство $X_0 = Y \times [0,1]$. На этом пространстве определяется вспомогательная плотность

$$f_0(y, z) = \frac{g_0(y)}{C_0}. \quad (7)$$

В качестве множества X для построения усеченного распределения используется следующее:

$$(y, z) \in X \Leftrightarrow ((y, z) \in X_0) \wedge (g_0(y)z < g(y)). \quad (8)$$

Можно показать (см., например, [1] и [2]), что плотность усеченного распределения, проинтегрированная по всем значениям z , пропорциональна $g(y)$.

Таким образом, выражение для вычисления весового множителя получается подстановкой (6) и (7) в (3) и интегрированием по второй переменной с учетом (8):

$$w(y) = \int_0^{g(y)/g_0(y)} f_0(y, z) n dz = \frac{g(y)}{C_0} n. \quad (9)$$

Из этого выражения, в частности, можно видеть, что использование различных мажорирующих плотностей в алгоритме отбора приводит при оценке весового множителя только к различию сомножителя n/C_0 , математическое ожидание которого в соответствии с (4) равняется нормировочному множителю:

$$M \frac{n}{C_0} = \frac{1}{\int_Y g(y) dy}.$$

Таким образом, если процедура статистического моделирования построена так, что сначала производится выборка *аналоговой* величины из распределения $g(y)$, а после применяется весовая методика, то реализация последней выполняется аналогично случаю, когда известен нормировочный множитель, с использованием вместо него отношения n/C_0 , которое было получено во время выборки.

Когерентное рассеяние фотонов

Как уже было отмечено, ситуация с невозможностью вычисления нормировочного множителя возникает, в частности, при моделировании когерентного рассеяния фотонов. Однако, прежде чем дать описание самой реакции, необходимо сказать несколько слов о весовой методике.

Здесь будет описан подход, используемый в программе ПРИЗМА [4]. В этой программе весовая методика при моделировании реакций используется для повышения эффективности оценки интегралов от потоков частиц в удаленном детекторе. Для этого вспомогательные *неаналоговые* частицы направляются в сторону детектора, и для сохранения математического ожидания требуется вычислять весовой множитель в зависимости от выбранного направления. При этом

в качестве координат используются проекция направления движения вторичной частицы на выделенную ось и соответствующий азимутальный угол (несложно показать, что значение весового множителя не зависит от выбора оси). В частности, для реакций, распределение вторичных частиц которых имеет азимутальную симметрию, в качестве оси удобно выбрать направление движения первичной частицы. При таком выборе единственным параметром остается косинус угла рассеяния, для которого и вычисляется весовой множитель.

К реакциям указанного типа относится и реакция когерентного рассеяния фотонов, параметры которой представлены в формате ENDF [3]. Дифференциальное сечение в этом формализме задается следующим образом:

$$\frac{d\sigma(E, \mu)}{d\mu} = \pi r_0^2 (1 + \mu^2) \times \left[\left(F(q) + F_R(E) \right)^2 + F_I(E)^2 \right], \quad (10)$$

где E — энергия фотона (в результате рассеяния не меняется); μ — косинус угла рассеяния; $q = \alpha \sqrt{2(1 - \mu)}$ — величина, пропорциональная переданному импульсу; πr_0 и $\alpha \sim E$ — некоторые величины, не зависящие от μ , значения которых здесь несущественны. Функция $F(q)$ называется форм-фактором, а $F_R(E)$ и $F_I(E)$ — действительной и мнимой частями аномального фактора рассеяния. При этом $F(q)$ всюду удовлетворяет соотношениям

$$F(q) \geq 0, \quad \frac{dF(q)}{dq} \leq 0, \quad (11)$$

$$F_R(E), F_I(E) \xrightarrow{E \rightarrow \infty} 0.$$

Все эти функции являются табличными. В результате рассматриваемого взаимодействия обрывается один фотон с энергией, равной энергии налетающего фотона, и косинусом угла рассеяния, распределенным с плотностью, пропорциональной (10).

Приведенное дифференциальное сечение позволяет построить процедуру выборки косинуса угла рассеяния, но не позволяет вычислить его плотность распределения, так как неизвестен нормировочный множитель. Теоретически этот множитель может быть найден с использованием интегрального сечения, зависимость которого от энергии представлена в той же самой библиотеке данных в табличном виде. Однако практика показывает, что такой подход приводит к

большим погрешностям. Эти погрешности являются следствием небольших погрешностей самого сечения, появляющихся как из-за табличного представления, так и из-за использования приближенных численных алгоритмов при расчете узловых значений. Поэтому для вычисления весового множителя наиболее оптимальным представляется использование оценки (9).

Однако прежде чем дать выражение случайной величины, соответствующей весовому множителю, необходимо описать саму выборку. Как можно видеть, приведенный переданный импульс при заданной энергии фотона не может превышать некоторого значения:

$$q \in [0, q_{\max}], \quad q_{\max} = 2\alpha.$$

Можно предложить несколько алгоритмов выборки значения косинуса угла рассеяния, каждый из которых наиболее эффективен в своем интервале энергий. Здесь будет описано два алгоритма.

Первый дает наибольшую эффективность при малых значениях энергии, а следовательно, и q_{\max} , т. е. когда $F(q_{\max})$ близко к $F(0)$. Для его построения удобно определить

$$F_{\max}^2(E) \equiv F_I(E)^2 + \max_{q \in (0, q_{\max})} (F(q) + F_R(E))^2.$$

С учетом свойства (10) это значение легко находится:

$$F_{\max}^2(E) = F_I(E)^2 + \max \left\{ (F(0) + F_R(E))^2, (F(q_{\max}) + F_R(E))^2 \right\}.$$

Таким образом, получаются действительная ненормированная плотность

$$g^1(\mu) = (1 + \mu^2) \left[(F(q) + F_R(E))^2 + F_I(E)^2 \right]$$

и соответствующая ей мажорирующая

$$g_0^1(\mu) = (1 + \mu^2) F_{\max}^2, \quad (12)$$

которые удовлетворяют соотношению (5).

Построение процедуры выборки в соответствии с ненормированной плотностью (12) не вызывает затруднений. Несложно вычислить и нормировочный интеграл (6):

$$C_0^{(1)} = F_{\max}^2 \int_{-1}^1 (1 + \mu^2) d\mu = \frac{8}{3} F_{\max}^2. \quad (13)$$

Таким образом, подставляя вычисленные значения величин в (9) и учитывая (13), можно получить следующее выражение для весового множителя в первом алгоритме при заданном значении косинуса угла рассеяния:

$$w^{(1)}(\mu) = (1 + \mu^2) \times \left[(F(q) + F_R(E))^2 + F_I(E)^2 \right] \frac{3n}{8F_{\max}^2}. \quad (14)$$

Если сначала разыгрывается угол рассеяния, то удобно сохранить значение $n \frac{3}{8F_{\max}^2}$, которое в дальнейшем будет использоваться при вычислении весового множителя.

Далее будет рассмотрен второй алгоритм. Для организации выборки при высоких энергиях, учитывая (11), удобно в качестве независимой переменной использовать переданный импульс. Как будет видно ниже, эффективность алгоритма при высоких энергиях будет приближаться к 1. В то же время при низких энергиях, когда $F_R(E) < 0$, эффективность мала (впрочем, если аномальный фактор не учитывается, его выгодно применять во всем диапазоне энергий).

Принимая во внимание, что

$$\mu(q, E) = 1 - 2 \left(\frac{q}{q_{\max}} \right)^2; \quad \frac{d\mu}{dq} = -\frac{4q}{q_{\max}^2}, \quad (15)$$

ненормированную плотность распределения удобно представить в виде

$$g^2(q) = \left(1 + \mu(q, E)^2 \right) q \left(F(q)^2 + 2F_R(E)F(q) + F_R(E)^2 + F_I(E)^2 \right). \quad (16)$$

Мажорирующая плотность в соответствии с (16) может быть представлена выражением

$$g_0^2(q) = 2q \left(h_2(q) + R(E)h_1(q) + F_R(E)^2 + F_I(E)^2 \right), \quad (17)$$

где

$$R(E) = \max \left\{ 2F_R(E), 0 \right\} \geq 0,$$

а функции h_k должны удовлетворять соотношениям

$$h_2(q) \geq F(q)^2; \quad h_1(q) \geq F(q).$$

Дополнительным условием для этих функций является то, что выражения

$$H_k(q) = \int_0^q q' h_k(q') dq'$$

должны вычисляться аналитически и, кроме того, аналитически должны вычисляться значения обратных функций. Учитывая, что $F(q)$ является табличной функцией, выбрать h_k вполне возможно. В частности, можно использовать $h_k(q) = F(q)^k$ ($k = 1, 2$), хотя для практики удобно аппроксимировать их ступенчатыми функциями.

С учетом указанных свойств выборка из распределения (17) делается методом суперпозиции в сочетании с методом обратных функций [2]. Несложно вычислить нормировочный интеграл для (17):

$$C_0^{(2)} = 2 \left(H_2(q_{\max}) + R(E) H_1(q_{\max}) \right) + \left(F_R(E)^2 + F_I(E)^2 \right) q_{\max}^2.$$

Подставляя вычисленные значения величин в (9), можно получить явное выражение для весового множителя при заданном значении приведенного переданного импульса:

$$\tilde{w}^{(2)}(q) = (1 + \mu^2) \left[\left(F(q) + F_R(E) \right)^2 + F_I(E)^2 \right] \frac{q}{C_0^{(2)}} n.$$

Однако для весовых методов требуется оценка весового множителя при определенном значении косинуса угла рассеяния. С учетом (15) связь между этими множителями дается выражением

$$w^{(2)}(\mu) = \tilde{w}^{(2)}(q) \left| \frac{dq}{d\mu} \right| = \tilde{w}^{(2)}(q) \frac{q_{\max}^2}{4q}.$$

Или, подставляя явный вид $\tilde{w}^{(2)}(q)$, можно получить следующее выражение:

$$w^{(2)}(\mu) = (1 + \mu^2) \left[\left(F(q) + F_R(E) \right)^2 + F_I(E)^2 \right] \frac{q_{\max}^2 n}{4C_0^{(2)}}. \quad (18)$$

Как уже было отмечено в замечании к выражению (9), весовые множители (14) и (18)

различаются только последним сомножителем $\left(\frac{3n}{8F_{\max}^2} \text{ и } \frac{q_{\max}^2 n}{4C_0^2} \text{ соответственно} \right)$, который определяется во время выборки значения косинуса угла рассеяния из распределения (10). То обстоятельство, что математические ожидания обоих этих сомножителей одинаковы, позволяет использовать их для выбора алгоритма (первого или второго) при моделировании реакции. Действительно, этот выбор оптимален тогда, когда среднее значение n минимально, т. е. если $\frac{3}{8F_{\max}^2} > \frac{q_{\max}^2}{4C_0^2}$, то выбирается первый алгоритм, иначе второй.

Расчет модельной задачи

В качестве примера использования приведенной выше методики можно рассмотреть расчет следующей модельной задачи. В центре уранового шарика радиусом 5 см и плотностью 18,7 г/см³ находится изотропный точечный источник фотонов с энергией 5 МэВ. На расстоянии 100 см от источника, в вакууме, находится детектор, в котором оценивается плотность числа фотонов. Размер детектора должен быть пренебрежимо малым.

При расчете по программе ПРИЗМА в качестве детекторов использовались шар радиусом 0,1 см (оценка по пробегу) и круговая площадка с тем же радиусом (оценка по пересечениям). Следует отметить, что различие в результатах, полученных с использованием этих оценок, не превышает статистической погрешности последних и тем более значительно меньше эффекта неточной нормировки весового множителя. Следовательно, можно считать, что результаты расчета с меньшими размерами детектора или с использованием оценки потока в точке [1] будут близки к представленным ниже.

Для моделирования взаимодействий фотонов использовались данные библиотеки EPDL-97, которые можно получить на сайте Ливерморской национальной лаборатории [5].

Всего было посчитано четыре варианта, различающихся моделированием когерентного рассеяния:

вариант 1 – при вычислении весового множителя использовалась нормировка на интегральное сечение, представленное в библиотеке;

вариант 2 – при моделировании когерентного

рассеяния применялись только методы расщепления и рулетки [1];

вариант 3 – для оценки весового множителя использовалась методика, предлагаемая в настоящей работе;

вариант 4 – когерентное рассеяние не учитывалось.

Последний вариант рассчитывался для того, чтобы оценить влияние когерентного рассеяния на результаты данной задачи. Априори можно предположить, что это влияние должно быть невелико, так как во всей области изменения энергий рассматриваемая реакция нигде не является ведущей. Однако полезно оценить ее вклад численно.

В таблице представлены результаты расчета, нормированные на один фотон источника. Все варианты считались одно и то же время. Относительные статистические погрешности в одно стандартное отклонение во втором варианте приблизительно равняются 10^{-3} , а во всех остальных случаях 10^{-4} .

Большая погрешность второго варианта обусловлена использованием менее эффективного метода расщепления и рулетки. Видно, что относительное различие между первым и вторым (или между первым и третьим) вариантами составляет более 11%, что значительно само по себе и существенно выходит за рамки статистической погрешности. В то же время различие между вторым и третьим вариантами находится в рамках этой погрешности. Что касается четвертого варианта, то его относительное различие со вторым или третьим составляет примерно 1%.

Таким образом, погрешность, вносимая несогласованностью интегрального и дифференци-

ального сечений, на порядок превышает погрешность, вносимую учетом самой реакции, что, конечно, недопустимо при расчете прикладных задач.

Следует также отметить, что статистические погрешности первого и второго вариантов практически совпадают. И, следовательно, рост дисперсии, вызванный использованием в качестве весового множителя случайной величины вместо среднего значения, несущественен, по крайней мере, в задачах подобного типа.

Заключение

Таким образом, представлены явные выражения для вычисления весового множителя в случае использования ненормированных распределений в методах отбора. В общем случае значение дается выражением (3). При использовании алгоритмов типа метода Неймана можно воспользоваться формулой (9), где проведено интегрирование по дополнительному параметру. Данный подход является точным (в отличие, например, от использования приближенного значения нормировочного множителя), в то же время он не требует дополнительных вычислительных затрат и легко реализуется для произвольного алгоритма отбора.

Также показано применение представленного метода для моделирования когерентного рассеяния фотонов. На модельной задаче продемонстрировано, что использование этого метода позволяет получать точный результат, в то время как приближенная нормировка, с использованием интегрального сечения, приводит к погрешности, намного превышающей даже вклад учета самой реакции в оцениваемые функционалы. При этом использование предлагаемого метода не приводит к заметному росту дисперсии и, таким образом, эффективность моделирования практически не уменьшается.

Таблица

Оценка плотности числа фотонов для разных вариантов (в 10^7 см^{-3})

Вариант	Оценка по пробегу	Оценка по пересечениям
1	3,8027	3,8027
2	3,4130	3,4170
3	3,4135	3,4136
4	3,4660	3,4650

Список литературы

1. *Спанье Дж., Гелбард З.* Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1972.
2. *Соболев И. М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
3. ENDF-102. Data Formats and Procedures for

- the Evaluated Nuclear Data File ENDF-6 / Ed. by V. McLane. National Nuclear Data Center. Brookhaven National Laboratory. Upton, N.Y. <http://www.nndc.bnl.gov/nndcscr/documents/endl/endl102/endl102.pdf>.
4. *Arnautova M. A., Kandiev Ya. Z., Lukhminsky B. E., Malyshkin G. N.* Monte-Carlo simulation in nuclear geophysics. In comparison of the PRIZMA Monte-Carlo program and benchmark experiments // Nucl. Geophys. 1993. Vol. 7 (3). P. 407–418.
5. Lawrence Livermore National Laboratory. <http://www.llnl.gov/cullen1/atomic.htm>.
- Статья поступила в редакцию 16.06.09.
-

УДК 539.122:518.5

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ ПРИ УПРУГОМ РАССЕЯНИИ

Д. Г. Модестов
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Плотность распределения косинуса угла рассеяния в реакции упругого рассеяния нейтрона обычно задается в системе центра масс. Хотя такое представление не усложняет моделирования реакции, для использования некоторых методов повышения эффективности расчетов удобно иметь возможность вычислять плотность распределения нейтронов в произвольной системе отсчета. В работе приводится алгоритм вычисления данной плотности и пример ее использования.

Ключевые слова: уравнение переноса, рассеяние нейтронов, статистическое моделирование, методы повышения эффективности.

При решении некоторых задач переноса методами статистического моделирования существует необходимость оценки плотности распределения вторичных частиц при взаимодействии. В частности, такая необходимость возникает при использовании методов выборки по важности и оценке потока в точке, описание которых дается в книге [1]. Данные методы направлены на повышение эффективности расчета отклика в детекторе. При этом требуется оценка плотности распределения в системе покоя детектора. Следует отметить, что существует ряд практических задач, в которых необходимо учитывать движение структурных элементов среды (например атомов) относительно детектора. Соответственно возникает необходимость расчета плотности распределения в произвольной системе отсчета. Наверное, не будет преувеличением сказать, что для решения большинства практических задач учет движения при выборке параметров вторичных частиц оказывает заметное влияние только при моделировании упругого рассеяния нейтронов. Таким образом, в первую очередь представляется необходимым рассмотреть именно это взаимодействие.

Прежде чем дать описание вычисления плотности распределения, необходимо отметить, что кинематика процесса упругого рассеяния наиболее просто описывается в системе центра инерции, или, следуя терминологии [2], *ц-системе*.

Эта простота связана с тем, что в *ц-системе* энергии нейтрона и атома не меняются (см., например, [2]). С учетом вышеприведенного обстоятельства распределение параметров рассеянного нейтрона практически всегда задается в указанной системе. Это распределение, используя понятие обобщенных функций, в частности δ -функции, можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi} f_{\text{ц}}(\chi) \delta(E - E_{\text{ц}}) d\psi d\chi dE,$$

где χ — косинус угла рассеяния; ψ — азимутальный угол; E — энергия рассеянного нейтрона; $E_{\text{ц}}$ — энергия первичного нейтрона; $f_{\text{ц}}(\chi)$ — плотность распределения косинуса угла рассеяния, которая является здесь единственным свободным параметром. При этом, исходя из физических соображений, необходимо отметить, что $f_{\text{ц}}(\chi)$ является ограниченной функцией на интервале $[-1, 1]$ и, следовательно, плотностью меры, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега на этом же интервале. Все параметры заданы в *ц-системе*. Построение процедуры выборки этих параметров не вызывает затруднений, равно как и преобразование их в любую систему отсчета.

Однако для применения методов повышения эффективности в задачах определения отклика в детекторе удобно иметь явное выражение плотности распределения в его системе покоя.

Эта система в дальнейшем будет называться *л-системой*. Такое название в некотором смысле согласуется с терминологией [2], хотя в этой работе оно используется только для частного случая покоящегося атома.

Для описания процедуры вычисления плотности распределения в л-системе удобно ввести следующие обозначения: m_n — масса нейтрона; m_a — масса атома; \vec{P}_0 — импульс нейтрона в ц-системе до рассеяния; \vec{P} — импульс нейтрона в ц-системе после рассеяния; \vec{Q} — импульс нейтрона в л-системе после рассеяния; \vec{V} — скорость движения центра инерции в л-системе. Здесь и всюду далее стрелками обозначаются векторы (например \vec{V}), два рядом стоящих в выражении вектора (например $\vec{V}\vec{Q}$) обозначают скалярное произведение, а обозначение векторной величины без стрелки указывает на абсолютное значение этой величины ($V = \sqrt{\vec{V}\vec{V}}$).

Согласно [2] \vec{P}_0 и \vec{V} вычисляются по скоростям в л-системе нейтрона \vec{v}_n и атома \vec{v}_a по формулам

$$\vec{V} = \frac{1}{m_n + m_a} (m_n \vec{v}_n + m_a \vec{v}_a);$$

$$\vec{P}_0 = \frac{m_n m_a}{m_n + m_a} (\vec{v}_n - \vec{v}_a).$$

Кроме того, существует связь между импульсами нейтрона в разных системах, которая дается выражением (см., например, [2])

$$\vec{Q} = \vec{P} + m_n \vec{V}. \quad (1)$$

При этом параметры в ц-системе в силу закона сохранения импульса связаны соотношением $P^2 = P_0^2$.

Косинус угла рассеяния в ц-системе, который имеет смысл косинуса полярного угла в сферической системе координат на множестве состояний рассеяния, определяется соотношением (рисунок)

$$\chi = \frac{\vec{P}_0 \vec{P}}{P^2}. \quad (2)$$

В л-системе проекция направления движения частицы после рассеяния на направление движения центра масс (см. рисунок)

$$\mu = \frac{\vec{V} \vec{Q}}{VQ}. \quad (3)$$

Кроме того, удобно определить в ц-системе параметр χ' (см. рисунок):

$$\chi' = \frac{\vec{V} \vec{P}}{VP}, \quad (4)$$

который аналогично χ имеет смысл косинуса полярного угла в другой сферической системе координат.

Определенные таким образом параметры всегда можно однозначно, с точностью до поворота вокруг выделенной оси (\vec{P}_0 для χ и \vec{V} для χ' и μ), дополнить ортогональными им параметрами ψ , ψ' и φ так, чтобы координаты (χ, ψ) , (χ', ψ') и (μ, φ) образовали сферическую систему координат в соответствующих пространствах состояний рассеяния [3]. Эти системы координат схематично показаны на рисунке. Существенным в таком выборе координат является то, что меры $d\chi d\psi$, $d\chi' d\psi'$ и $d\mu d\varphi$ представляют равномерную меру Лебега на единичной сфере и являются инвариантными относительно группы вращений трехмерного пространства [3].

Сразу следует отметить, что, так как координаты (χ, ψ) и (χ', ψ') определены в одной системе отсчета, то они получаются друг из друга трехмерным вращением, которое является взаимно однозначным преобразованием. Также μ является однозначной функцией χ' (и, следовательно, χ) и согласно (1), (3) имеет вид

$$\mu = \frac{P\chi' + m_n V}{\sqrt{P^2 + m_n^2 V^2 + 2m_n V P\chi'}}. \quad (5)$$

Обратное, вообще говоря, неверно.

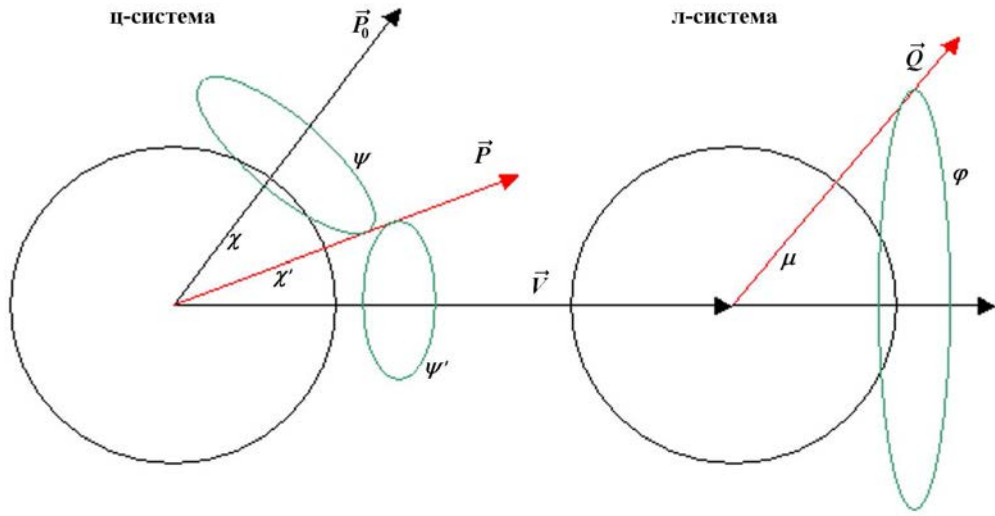
Таким образом, при вычислении плотности распределения в л-системе возникает необходимость определения зависимости $\chi(\mu)$. Для этого удобно найти зависимость модуля импульса рассеянного нейтрона в л-системе от параметра μ . Используя (1), можно показать, что модуль импульса рассеянного нейтрона в л-системе при заданных значениях P , V и μ является неотрицательным корнем уравнения

$$Q^2 - 2m_n V \mu Q + m_n^2 V^2 - P^2 = 0. \quad (6)$$

Следует отметить, что вследствие взаимной однозначности соответствия параметров рассеяния в разных системах отсчета каждому неотрицательному корню этого уравнения однозначно соответствует некоторый угол рассеяния в ц-системе. Как известно, уравнение (6) в общем случае имеет два комплексных корня, значения которых могут быть вычислены по формуле

$$Q = m_n V \mu \pm \sqrt{P^2 - m_n^2 V^2 (1 - \mu^2)}. \quad (7)$$

Прежде чем анализировать выражение (7), следует напомнить, что оно необходимо для построения меры, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега на сфере. Как известно (см.,



Обозначение параметров в различных системах отсчета

например, [4]), ее плотность определена с точностью до функции, носитель которой имеет нулевую лебеговскую меру. В частности, на множестве нулевой лебеговской меры, не ограничивая общности, значение плотности всегда можно положить равным нулю. Таким образом, зависимость числа неотрицательных корней уравнения (6) от параметров взаимодействия, учитывая их явный вид (7), можно определить выражением

$$n = \begin{cases} 1, & P \geq m_n V; \\ 0, & m_n V \mu \leq \sqrt{(m_n V)^2 - P^2}; \\ 2, & m_n V \mu > \sqrt{(m_n V)^2 - P^2}. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь, в частности, считается, что $n = 0$ при $m_n V \mu = \sqrt{(m_n V)^2 - P^2}$, однако, как можно видеть из (7), в этом случае имеется один корень. Но такое значение параметра μ является особым для уравнения (6): при прохождении через эту точку два различных комплексно-сопряженных корня превращаются в два действительных. Забегая немного вперед, можно сказать, что кривая $m_n V \mu = \sqrt{(m_n V)^2 - P^2}$ является границей носителя угловой плотности распределения в л-системе в том случае, когда параметры рассеяния удовлетворяют соотношению $P < m_n V$. При этом область, в которой $n = 0$, соответствует нулевой плотности.

Учитывая вышеприведенные замечания, а также то, что граница носителя является множеством нулевой лебеговской меры, можно формально положить на этой границе $n = 0$. Это

приведет к занулению плотности распределения (см. ниже) и позволит избежать вычисления этой плотности в особых точках.

С учетом того, что связь между импульсами в разных системах отсчета дается выражением (1), значение косинуса угла рассеяния в ц-системе легко определяется по значению модуля импульса в л-системе согласно определению (2):

$$\chi = \frac{1}{P^2} (\vec{Q} \vec{P}_0 - m_n \vec{P}_0 \vec{V}).$$

Учитывая связь энергии с импульсом, которая приводится, например, в [2], а также неоднозначность зависимости $\chi(\mu)$, выражение для плотности распределения в ц-системе с использованием определений (2)–(4) в соответствии с числом корней уравнения (6) можно представить в виде

$$f_{\text{л}}(\mu, \varphi, E) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n f_{\text{ц}}(\chi_i) \delta\left(E - \frac{Q_i^2}{2m_n}\right) \frac{\partial(\chi_i, \psi)}{\partial(\mu, \varphi)}. \quad (9)$$

Здесь Q_i — i -е значение модуля импульса нейтрона, полученное решением (6); χ_i и χ'_i — соответствующие ему косинусы полярных углов в ц-системе, определяемые выражениями (2) и (4).

В случае $n = 0$ выражение (9) считается тождественным нулю. Дальнейшие выкладки приводятся только для случая $n \neq 0$.

Чтобы вычислить якобиан в (9), удобно построить следующую цепочку преобразований (см. рисунок):

$$(\chi_i, \psi) \rightarrow (\chi'_i, \psi') \rightarrow (\mu, \varphi).$$

Тогда

$$\frac{\partial(\chi_i, \psi)}{\partial(\mu, \varphi)} = \frac{\partial(\chi_i, \psi)}{\partial(\chi'_i, \psi')} \frac{\partial(\chi'_i, \psi')}{\partial(\mu, \varphi)}.$$

При этом преобразование $(\chi_i, \psi) \rightarrow (\chi'_i, \psi')$, как было указано выше, является поворотом единичной сферы. Поскольку используемая здесь мера $d\chi d\psi$ инвариантна относительно группы вращений трехмерного пространства, а сфера является орбитой этой группы, очевидно выполнение равенства $\frac{\partial(\chi_i, \psi)}{\partial(\chi'_i, \psi')} = 1$. Второе же преобразование для полярных углов, как можно видеть из рисунка, имеет вид $\varphi = \psi' + \varphi_0$, и потому $\frac{\partial(\chi'_i, \psi')}{\partial(\mu, \varphi)} = \frac{d\chi'_i}{d\mu}$. Используя явную зависимость, представленную в выражении (5), получаем

$$\frac{\partial(\chi_i, \psi)}{\partial(\mu, \varphi)} = \frac{d\chi'_i}{d\mu} = \frac{Q_i^2}{P |Q_i - m_n V \mu|}.$$

Таким образом, выражение для плотности распределения в л-системе имеет вид

$$f_{\text{л}}(\mu, \varphi, E) = \sum_{i=1}^n \omega_i(\mu, \varphi) \delta\left(E - \frac{Q_i^2}{2m_n}\right), \quad (10)$$

где

$$\omega_i(\mu, \varphi) = \frac{1}{2\pi} f_{\text{ц}}(\chi_i) \frac{Q_i^2}{P |Q_i - m_n V \mu|}. \quad (11)$$

Учитывая конечность функции $f_{\text{ц}}$, а также замечания, сделанные при определении числа корней (8), можно утверждать, что значение $\omega_i(\mu, \varphi)$ всегда конечно, хотя сама функция неограниченна. При реализации предлагаемого метода существовало опасение, что эта неограниченность, имеющая коренной характер, может способствовать сильному росту дисперсии оцениваемых функционалов. Однако сравнительные расчеты ряда задач в приближениях максвелловского одноатомного идеального газа и покоящихся атомов показали, что различие в дисперсиях не существенно.

В заключение представляется полезным привести пример использования плотности распределения нейтронов в л-системе.

Вклад в оценку потока в пространственной точке \vec{r}_0 при упругом взаимодействии в точке \vec{r} можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \int W(E, \vec{r}, \vec{r}_0) f_{\text{л}}(\mu, \varphi, E) dE,$$

где $W(E, \vec{r}, \vec{r}_0)$ — вероятность того, что частица с энергией E пройдет по прямой без столкновений из \vec{r}_0 в \vec{r} ; μ и φ — косинус полярного угла и азимутальный угол соответственно, которые определяют направление этой прямой. Данное выражение в несколько других обозначениях, с явным видом $W(E, \vec{r}, \vec{r}_0)$, приводится в [1, с. 134, формула 3.70]. Подставляя в него (10), можно получить выражение для вклада в оценку потока в точке:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \sum_{i=1}^n W\left(\frac{Q_i^2}{2m_n}, \vec{r}, \vec{r}_0\right) \omega_i(\mu, \varphi).$$

Для других методов повышения эффективности использование плотности (10), (11) аналогично.

Список литературы

1. *Спанье Дж., Гелбард З.* Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1972.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Наука, 1988.
3. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматгиз, 1958.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

Статья поступила в редакцию 16.06.09.

УДК 519.6

ПОДГОТОВКА НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ПО ПРОГРАММАМ SolidEditor И 2D-РНД

П. В. Черенков, О. Н. Борисенко, М. В. Черенкова, В. И. Тарасов,
К. К. Олесницкая, Т. Ю. Баканова, М. Г. Кузнецов,
Д. А. Шутов, А. С. Сергеева
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Статья посвящена разработанной в математическом отделении РФЯЦ-ВНИИЭФ технологии подготовки начальных данных двумерных задач математической физики по программам SolidEditor и 2D-РНД. Технология максимально унифицирована для всех методик математического отделения РФЯЦ-ВНИИЭФ, что позволяет организовать эффективный обмен информацией между программными кодами методик. Редактор SolidEditor предоставляет развитые возможности по заданию, анализу и редактированию физической и математической постановок задач. Эти возможности значительно облегчают подготовку начальных данных для задач, которые считаются сериями. Для расчета начальных данных (расчет сетки и распределение сеточных величин) используется программа 2D-РНД.

Ключевые слова: редактор SolidEditor, библиотека Open CASCADE, пользовательский интерфейс, построение геометрической модели задачи, этапы задания начальных данных, задание физической и математической постановок задачи, программа 2D-РНД, расчет начальных данных.

Введение

В математическом отделении РФЯЦ-ВНИИЭФ ведутся работы по решению задач численного моделирования физических процессов. Для проведения численного моделирования необходима подготовка начальных данных задачи.

В 70–80-е годы двадцатого века подготовка начальных данных для каждой счетной методики ВНИИЭФ проводилась независимо от других, обычно в пакетном режиме, а именно вводился текст на специальном буквенно-цифровом языке и запускалась программа-транслятор, переводящая текстовые данные в числовые массивы. Графические средства представления информации практически не использовались. Многие программные средства разрабатывались независимо друг от друга и поэтому не являлись универсальными. Подготовка геометрической модели и начальных данных по такой технологии требовала значительных трудовых затрат и календарного

времени. При этом начальные данные, задаваемые для одной и той же задачи в программах различных методик, могли отличаться.

Требование минимизации количества ошибок, возникающих в процессе подготовки и расчета начальных данных, привело к необходимости разработки единой технологии, которая позволила бы задавать физические и математические постановки задач, максимально унифицированные для всех методик.

Исходя из указанных предпосылок в лаборатории общего сервиса математического отделения ВНИИЭФ разработана технология подготовки начальных данных двумерных задач математической физики по программам SolidEditor и 2D-РНД. Технология максимально унифицирована для всех счетных методик математического отделения, что позволяет организовать эффективный обмен информацией между программными кодами этих методик и значительно сократить время, требуемое на подготовку начальных данных.

Задание начальных данных в редакторе SolidEditor

Разработка редактора SolidEditor ведется с начала 2003 года. Редактор разрабатывается с использованием некоммерческой библиотеки с открытыми исходными кодами Open CASCADE [1, 2].

Пользовательский интерфейс максимально подобен интерфейсу программы 3D-РЧД [3] (рис. 1). При его разработке учитываются два основных требования к процессу задания начальных данных:

- интерфейс задания начальных данных должен быть максимально унифицированным для всех счетных методик;
- процесс задания начальных данных должен быть строго формализован. Результатом этой формализации является разделение процесса задания начальных данных на несколько смысловых этапов. Такой подход позволяет снизить трудозатраты пользователя, а также избежать ошибок, связанных

с неправильной последовательностью задания начальных данных.

При задании данных обеспечивается их интерактивный анализ с незамедлительной выдачей сообщений об ошибках без аварийного завершения и с возможностью продолжения работы после введения корректных данных.

Далее описаны этапы задания начальных данных, реализованные в редакторе SolidEditor.

Построение геометрической модели задачи

На первом этапе задания начальных данных происходит построение геометрической модели задачи. К настоящему моменту в редакторе имеется много возможностей для построения, анализа и редактирования двумерной геометрии¹. Математические алгоритмы в значительной мере оптимизированы, что позволяет работать с задачами, включающими большое число двумерных кривых (100 000 и более).

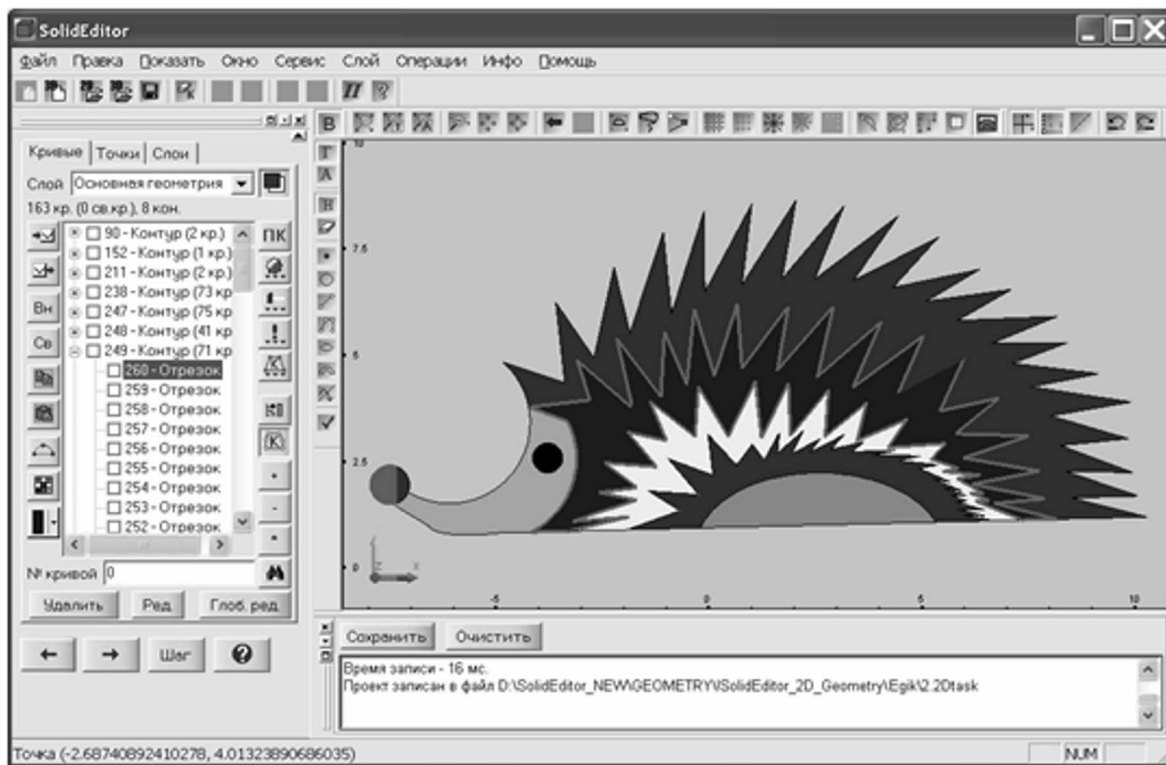


Рис. 1. Главное окно редактора SolidEditor

¹ Двумерная геометрия — геометрическая модель двумерной задачи, включающая в себя двумерные геометрические объекты (точки, кривые, контуры), а также информацию о топологии объектов и связях между ними.

Двумерная геометрия в редакторе SolidEditor состоит из замкнутых односвязных контуров. Кривые, не вошедшие ни в один контур, называются свободными. Для построения геометрии используются отрезки, дуги окружностей и эллипсов. Также имеется возможность задания точек.

При задании каждой кривой автоматически происходит разбиение кривых на элементарные (не имеющие пересечений). После этого автоматически проводится поиск односвязных контуров и свободных кривых.

Геометрию можно задавать при помощи мыши или в аналитическом режиме (ввод данных в процессе диалога).

Для построения кривой с помощью мыши необходимо отметить на экране несколько ключевых точек. Точки могут привязываться к граничным точкам уже построенных кривых.

В аналитическом режиме реализовано девять способов задания отрезков, восемь способов задания дуг окружности и по одному способу задания дуги эллипса, ломаной линии, точки и оси симметрии.

Часто при задании кривой определенным способом по параметрам, введенным пользователем, можно построить несколько вариантов кривой. Возможные варианты построения кривой выводятся в списке (рис. 2). Пользователь может построить одну или несколько кривых из этого списка.

Одной из основных возможностей, необходимых при работе с геометрией, является редактирование созданных кривых. В редакторе реализовано редактирование как одной кривой, так и их группы. При редактировании кривых можно

сохранить их связи с другими кривыми (рис. 3). Также можно создавать копии группы кривых путем применения к ней некоторого преобразования (рис. 4).

Помимо перечисленных, реализованы другие возможности для задания двумерной геометрии, например: соединение и разбиение кривых; отражение группы кривых относительно оси симметрии; изменение размера геометрии; копирование и вставка точек и кривых из буфера обмена; выделение кривых, контуров и точек при помощи мыши, в том числе множественное выделение; отмена сделанных изменений и т. д.

По построенным двумерным объектам можно получить различную справочную информацию, например: параметры кривых; длины кривых; точки пересечения кривых; площадь контуров и объем тел вращения; угол между двумя линиями; расстояние от точки до объекта; расстояние от точки до точки и т. д.

В редакторе реализована работа со слоями геометрии по аналогии с тем, как это сделано в программе Photoshop. Есть несколько служебных слоев, используемых для задания начальных данных. Также может быть создано произвольное число пользовательских слоев.

На всех этапах работы с редактором SolidEditor параллельно с пользовательским интерфейсом функционирует система визуализации, интерактивно отображающая изменения вводимых данных. Система визуализации обеспечивает приемлемую скорость отображе-

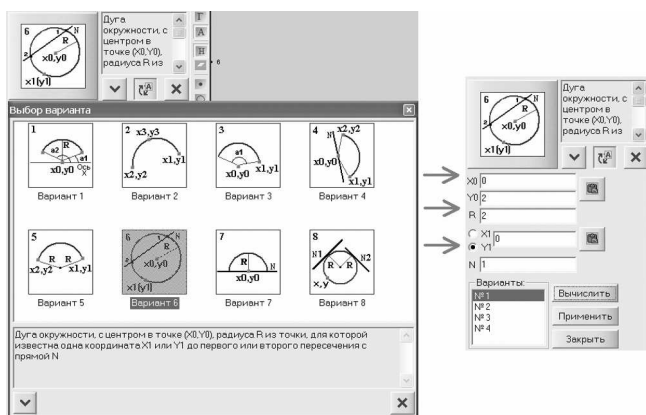


Рис. 2. Способы построения кривой (дуги окружности)

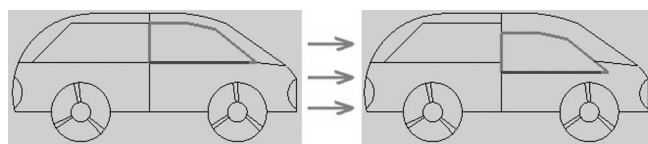


Рис. 3. Редактирование кривых с сохранением связей

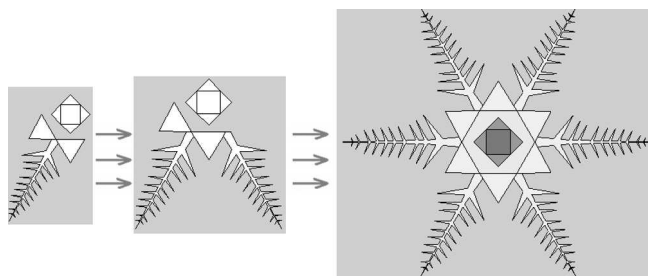


Рис. 4. Создание копий группы кривых

ния для задач, включающих большое число двумерных кривых (100 000 и более).

Отображение геометрических объектов основано на возможностях графического ядра программы ScientificView [4]. Реализованы отображение двумерных геометрических объектов и маркеров объектов, заливка областей цветом, различные операции по масштабированию геометрии, отображение нескольких слоев геометрии и т. д. (рис. 5).

В редакторе реализованы запись и чтение геометрической модели задачи и начальных данных в собственном текстовом формате. Также реализована работа с обменными файлами формата DXF системы AutoCAD и файлами программы 2D-РНД.

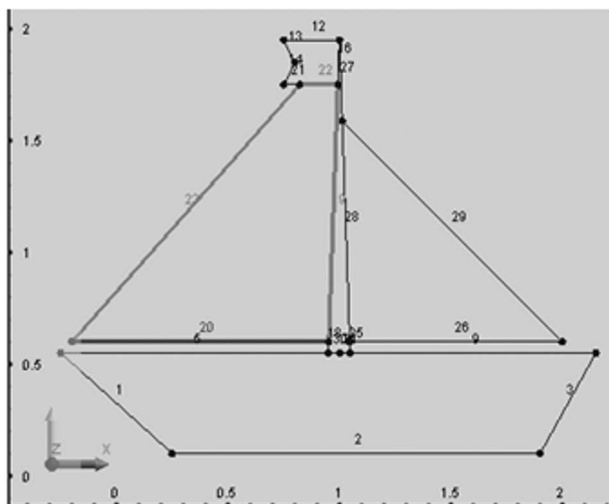


Рис. 5. Отображение графических объектов

Этапы задания начальных данных

После того, как построена геометрическая модель задачи, пользователь последовательно проходит следующие этапы задания начальных данных:

- выбор счетной методики;
- задание физических областей²;
- задание параметров веществ с использованием уравнений состояний (УРСов), тепловых пробегов и моделей упругопластики из базы данных УРС-ОФ [5] (рис. 6); задание параметров инициирования детонации;

² Физическая область — область, содержащая одно вещество.

- задание математических областей³;
- задание границ математических областей и выделенных линий сетки;
- задание опорных линий и фронтов горения;
- задание параметров сетки;
- задание граничных условий;
- задание общей информации по задаче;
- выбор параметров расчета начальных данных и запуск программы 2D-РНД.

Редактирование физической и математической постановок задачи с сохранением связей объектов

На любом этапе задания начальных данных может возникнуть необходимость скорректировать физическую и математическую постановки задачи с сохранением связей введенных объектов и их целостности.

Изменение одних данных может никак не сказываться на остальных. Например, изменение вещества в одной из физических областей проявится только на этапе расчета начальных данных в 2D-РНД. В то же время изменение других данных существенно отражается на остальной информации. Например, удаление физических областей приводит к изменениям связанных с ними объектов (математических областей, параметров сетки для этих математических областей и т. д.).

Для того, чтобы при любых изменениях начальных данных максимально полно сохранить уже введенные данные и их целостность, в редакторе разработана система глобального редактирования начальных данных. Система глобального редактирования использует информацию о топологии начальных данных и внутренние (определенные на этапе программирования) критерии корректности задаваемых объектов. На основе этой информации при модификации начальных данных запускаются функции проверки и восстановления целостности.

В некоторых случаях, когда полностью автоматический пересчет невозможен, для максимально полного сохранения введенных данных пользователю требуется указать дополнительную, уточняющую информацию. Например, при изменении входящего в физическую область

³ Математическая область — область, состоящая из набора физических областей, которой однозначно соответствует расчетная сетка некоторого вида.

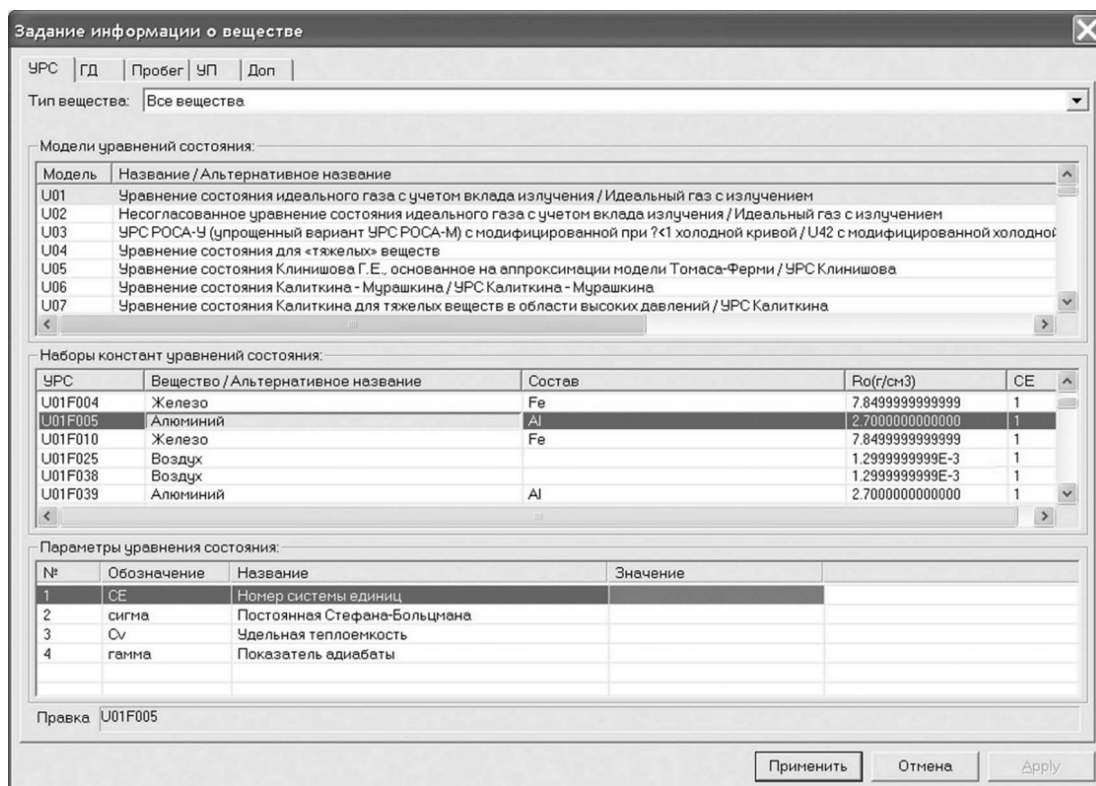


Рис. 6. Задание информации о физических областях

контура пользователю требуется включить в эту область измененный контур. При отсутствии уточняющей информации производится автоматическое удаление объектов, не соответствующих критериям корректности.

Система глобального редактирования значительно облегчает подготовку начальных данных для задач, которые считаются сериями.

Расчет начальных данных в программе 2D-РНД

На последнем этапе задания начальных данных в редакторе SolidEditor задаются параметры расчета, а затем для расчета начальных данных вызывается программа 2D-РНД.

Расчет начальных данных двумерных задач ведется на ПЭВМ. В случае, когда задача не помещается в оперативную память, производится фрагментный расчет начальных данных. Количество фрагментов, на которые необходимо разбить задачу, либо вычисляется автоматически, исходя из объема доступной физической памяти, либо задается пользователем с помощью ключа-параметра к исполняемому модулю программы.

Организация и структура программы 2D-РНД позволяет разрабатывать модули расчета начальных данных как представителям лаборатории общего сервиса, так и лицам, отвечающим за разработку программных кодов той или иной методики (*представителям методик*). Представители методик разрабатывают собственные модули, используя общее функциональное ядро программы 2D-РНД. Общее функциональное ядро включает в себя различные функции для работы с объектами начальных данных и геометрическими объектами. Программные коды для каждой методики разрабатываются автономно, без возможности изменения программных модулей общего ядра и других методик.

В общем случае расчет начальных данных по программе 2D-РНД состоит из следующих этапов:

- анализ корректности и корректировка входных данных;
- разбиение границ областей и специальных линий;
- расчет регулярных сеток (лучевых, сеток с выделенными линиями, криволинейных);
- перестройка сеток;
- распределение веществ по ячейкам сетки;

- расчет сеток с адаптивным дроблением ячеек;
- проектирование границ областей;
- формирование граничных условий и дополнительных данных, необходимых методике;
- запись двоичного файла-разреза в общем формате ЕФР [6]. Следует отметить, что в программе 2D-РНД данные по сеткам хранятся в унифицированном виде, а запись данных в файл-разрез производится с учетом их представления в программных кодах методики.

В процессе расчета производится анализ корректности построенной сетки и распределения веществ. Для управления расчетом начальных данных и настройки на различные методики программа использует задаваемые пользователем входные ключи-параметры. Например, с помощью соответствующих ключей-параметров можно сконвертировать начальные данные из файлов в формате редактора VisRed [7] в файл в формате 2D-РНД, который может быть открыт в редакторе SolidEditor, задать сценарий расчета (полный расчет, расчет сетки), установить различные способы записи файла-разреза и т. д.

Построение расчетных сеток

На первом этапе расчета производится построение сеток. В программе реализовано построение различных видов регулярных (структурированных) и нерегулярных (неструктурированных) сеток. Модули построения нерегулярных сеток разрабатываются представителями методик. В данной статье описываются методы построения регулярных сеток, реализованные в лаборатории общего сервиса.

Для построения регулярной сетки необходимо разбить границы области. При разбиении границ математических областей и специальных линий используются безытерационные методы (разбиение по углу, разбиение по расстоянию на участке, состоящем из одной кривой) и итерационные методы (разбиение по расстоянию на участке, состоящем из нескольких кривых).

При построении регулярных сеток в программе используются следующие методы:

- вертикальная, горизонтальная и трансферитная интерполяция;
- построение лучевых сеток на основе опорных линий;

- итерационная перестройка сетки (криволинейная сетка).

В программе может быть построена как простая, так и составная регулярная сетка.

Построение криволинейных сеток в областях с невыпуклыми или сильно искривленными границами осуществляется в два этапа (рис. 7):

- 1) построение нулевого приближения сетки (см. рис. 7,а);
- 2) итерационная перестройка сетки, основанная на минимизации дискретного функционала, формализующего критерии близости сетки к равномерной и ортогональной (см. рис. 7,б).

Для программы перестройки сетки "оптимальным" является начальное приближение, которое не содержит вырожденных ячеек. Для нахождения такого приближения выполняется построение начальной сетки несколькими способами, после чего для перестройки и дальнейшего расчета из полученных сеток выбирается та, которая содержит наименьшее число вырожденных ячеек (рис. 8).

Для описания особенностей геометрии с помощью сеточных линий реализованы алгоритмы построения сеток с учетом выделенных линий (рис. 9). Выделенные линии могут проходить по границам раздела веществ или просто задавать *характер* некоторых линий сетки. Также они могут полностью или частично проходить по линиям сетки.

Распределение веществ по ячейкам сетки

На следующем этапе расчета производится распределение веществ по ячейкам сетки. Методы распределения веществ можно разделить на две группы.

Методы первой группы характеризуются тем, что границы раздела сред совпадают с линиями счетной сетки (границами математических областей, выделенными линиями), через которые не допускается перетекание веществ.

Ко второй группе принадлежат методы, в которых границы раздела сред не совпадают с линиями счетной сетки. При таком подходе возникает проблема выделения контактных границ, появляются счетные ячейки, содержащие несколько различных веществ (смешанные ячейки) (рис. 10). Расчет в этом случае состоит из

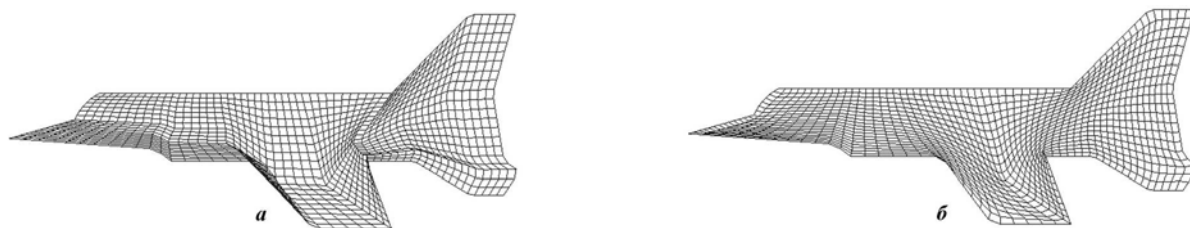


Рис. 7. Построение криволинейной сетки: *a* — нулевое приближение; *б* — перестроенная сетка

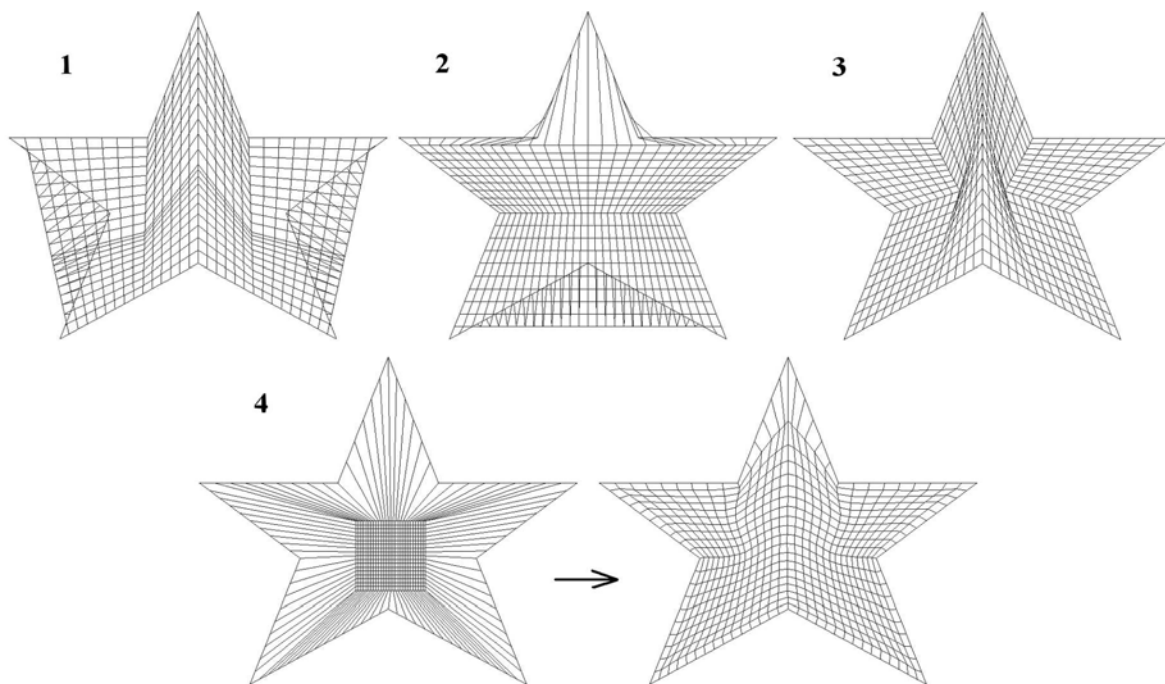


Рис. 8. Выбор "оптимального" нулевого приближения сетки

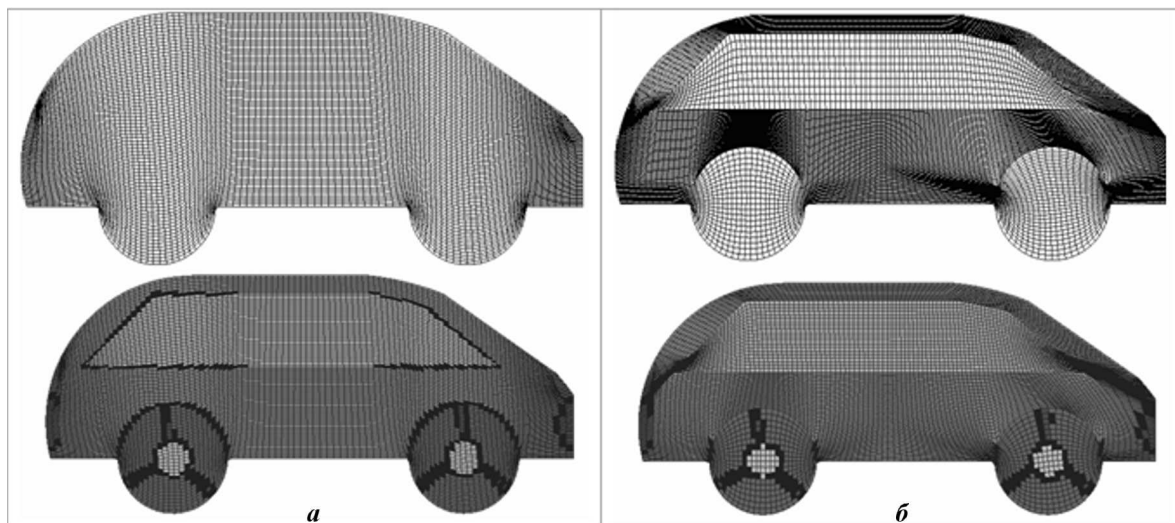


Рис. 9. Сетки: *a* — без выделенных линий; *б* — с выделенными линиями

двух этапов:

- 1) поиск чистых ячеек;
- 2) расчет ячеек, в которых находятся смеси веществ.

В программе реализовано построение адаптивных дробных сеток (рис. 11), т. е. сеток со сгущениями вдоль границы раздела веществ. Данные алгоритмы используются для более точного

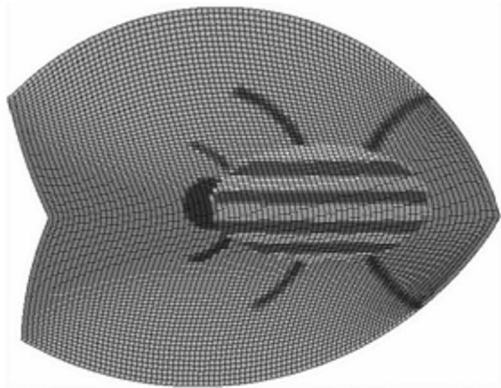


Рис. 10. Распределение веществ с использованием смешанных ячеек

расчета контактной границы между веществами без изменения параметров основной сетки.

Практическое применение

В настоящее время технология подготовки начальных данных по программам SolidEditor и 2D-РНД применяется во многих счетных методиках математического отделения РФЯЦ-ВНИИЭФ, использующих существенно различные подходы к моделированию физических процессов.

Развитый графический пользовательский интерфейс, а также широкие возможности по построению, анализу и изменению физической и математической постановки задачи позволяют значительно сократить время, требуемое на подготовку начальных данных, и количество возникающих при подготовке ошибок. При этом расчет сеток и сеточных величин для различных методик может осуществляться на основе одной и той же геометрической модели и начальных данных. Задание и расчет начальных данных производятся с высокой относительной точностью. Основные алгоритмы программ работают с относительной точностью 10^{-12} .

Список литературы

1. Бычков И., Прусенко В., Мазурин А. Инструмент для разработки корпоративной САПР // САПР и графика. 2001. № 8. С. 108–112.
2. Ващук Ю., Тараканов М., Мазурин А. Использование Open CASCADE для создания приложений // Там же. № 9. С. 101–106.
3. Тарасов В. И., Ребров С. В., Волгин А. В. и др. Расчет начальных данных трехмерных задач по программе 3D-РНД // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 3. С. 66–71.
4. Потехин А. Л., Тарасов В. И., Фирсов С. А. и др. ScientificView — параллельная система постобработки результатов, полученных при численном моделировании физических процессов // Там же. 2008. Вып. 4. С. 37–45.
5. Воронов Г. И., Горев И. В., Леонова Н. И. и др. Программное обеспечение функциони-

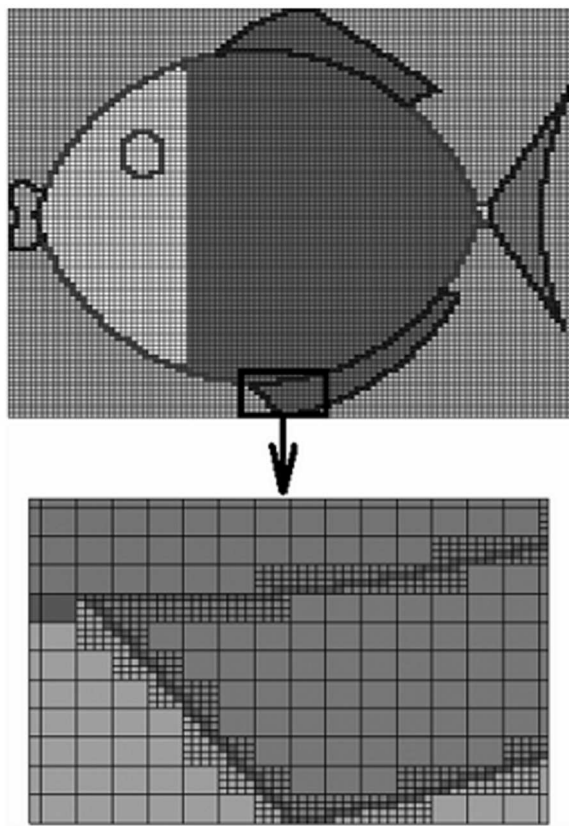


Рис. 11. Применение дробных сеток: распределение веществ на сетке с дроблением

- рования пакета УРС-ОФ // Там же. 1999. Вып. 3. С. 56—58.
6. Волгин А. В., Красов А. В., Кузнецов М. Ю., Тарасов В. И. Библиотека ЕФР для универсального представления расчетных данных // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2007. Вып. 11. С. 130—135.
7. Тарасов В. И., Борисенко О. Н., Шабуров В. М., Калмыкова К. К. Единая технология расчета начальных данных двумерных газодинамических задач для численных методик РФЯЦ-ВНИИЭФ // Тр. всерос. конф. "Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления". Т. 2. М.: ВЦ РАН, 2004. С. 103—110.

Статья поступила в редакцию 14.07.09.

УДК 519.6

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ ПО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТЕЛЕВИЗИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАЗИОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. М. Понятский
(ГУП "КБП", г. Тула)

Рассматривается подход, основанный на методе квазиоптимальной фильтрации для оценки параметров движения источника излучения на фоне помех по последовательности видеок кадров. Проведен синтез непрерывного и дискретного алгоритмов оценки координат центра, частоты и радиуса вращения источника излучения, а также уровня яркости и радиуса его изображения. Осуществлено моделирование разработанных алгоритмов в среде Matlab.

Ключевые слова: видеок кадр, изображение, сигнал, параметры, помеха, модель, оценка, метод квазиоптимальной фильтрации.

Введение

Важной задачей анализа поведения исследуемого объекта является оценка его характеристик по результатам измерений. При испытаниях получают информацию об объекте, функционирующем в условиях пассивного или активного эксперимента. Часто бывает необходимо осуществить оценку параметров движения объекта по последовательности видеок кадров.

Идентификация параметров движения может использоваться также в задачах управления динамическими объектами. Например, если на борту вращающегося по крену беспилотного летательного аппарата установлен источник излучения, то по измеряемым координатам этого источника возможно формирование команд управления. При этом движение источника излучения представляет собой сумму поступательной и вращательной составляющих, отображаемых в картинной плоскости спирали, причем поступательное движение определяется траекторией перемещения центра вращения и может иметь сложную форму. Измерение координат источника осуществляется с погрешностью, обусловленной следующими факторами: дрожание оптической системы; атмосферные флуктуации, искажающие форму и положение изображения; наличие дискретности элементарных ячеек фотоприемника; смаз изображения во время его накопления; погрешность вычисления центра изображения и др.

В работах [1, 2] рассмотрено выделение параметров траектории источника излучения при расчете параметров и их сглаживании и прогнозировании с использованием фильтрации Калмана. Также в работах [3–6] рассмотрено использование квазиоптимальной фильтрации для оценки параметров выделенной траектории движения источника излучения по последовательности видеоизображений.

В развитие указанных направлений рассматривается подход, основанный на выделении как параметров движения источника излучения, так и параметров его изображения непосредственно при обработке последовательности видеок кадров [7–11].

Методы идентификации параметров движения источника излучения

При наблюдении телевизионного изображения источника излучения на фоне помех, $\xi(t) = s(t, \boldsymbol{\lambda}) + \nu(t)$ ($s(t, \boldsymbol{\lambda})$ — сигнал от источника излучения; $\nu(t)$ — гауссовский белый шум наблюдения), оценку параметров $\boldsymbol{\lambda}$ можно осуществить с помощью алгоритма квазиоптимальной фильтрации [12]:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}_o}{dt} = \mathbf{a}(t, \boldsymbol{\lambda}_o) + R(t) \mathbf{F}_1(t, \boldsymbol{\lambda}_o); \quad (1)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = N_0(t) + a_1(t, \boldsymbol{\lambda}_o) R(t) + R(t) a_1^T(t, \boldsymbol{\lambda}_o) + R(t) F_2(t, \boldsymbol{\lambda}_o) R(t). \quad (2)$$

Здесь

$\boldsymbol{\lambda}_o$ — вектор-столбец оценок параметров, $\frac{d\boldsymbol{\lambda}_o}{dt} = \mathbf{a}(t, \boldsymbol{\lambda}_o) + \boldsymbol{\nu}_o(t)$;

$\mathbf{a}(t, \boldsymbol{\lambda}_o)$ — вектор-столбец коэффициентов с компонентами $a_i(t, \boldsymbol{\lambda}_o)$;

$\boldsymbol{\nu}_o(t)$ — вектор-столбец гауссовских белых формирующих шумов;

$R(t)$ — корреляционная матрица ошибок фильтрации;

$\mathbf{F}_1(t, \boldsymbol{\lambda}_o) = \left(\frac{\partial F(t, \boldsymbol{\lambda}_o)}{\partial \lambda_{o1}}, \dots, \frac{\partial F(t, \boldsymbol{\lambda}_o)}{\partial \lambda_{oi}} \right)^T$ — вектор-столбец;

$F(t, \boldsymbol{\lambda}_o) = -\frac{1}{2} (\xi(t) - s(t, \boldsymbol{\lambda}_o)) N^{-1}(t) (\xi(t) - s(t, \boldsymbol{\lambda}_o))$ — функция правдоподобия;

$s(t, \boldsymbol{\lambda}_o)$ — оценка сигнала от источника излучения;

$N(t)$ — спектральная плотность шума наблюдений;

$N_0(t)$ — матрица спектральных плотностей формирующих шумов параметров;

$a_1(t, \boldsymbol{\lambda}_o)$ — матрица с элементами $a_{ij} = \frac{\partial a_i(t, \boldsymbol{\lambda}_o)}{\partial \lambda_{oj}}$;

$F_2(t, \boldsymbol{\lambda}_o)$ — матрица с элементами $F_{ij} = \frac{\partial^2 F(t, \boldsymbol{\lambda}_o)}{\partial \lambda_{oi} \partial \lambda_{oj}}$.

При необходимости упрощения вычислений решим модифицированное уравнение нелинейной квазиоптимальной фильтрации для случая гауссовской аппроксимации апостериорной плотности вероятности параметров движения источника излучения и линейного разложения его по $\boldsymbol{\lambda}_o$ [12]:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}_o}{dt} = \mathbf{a}(t, \boldsymbol{\lambda}_o) + R(t) \mathbf{S}_1(t, \boldsymbol{\lambda}_o) N^{-1}(t) (\xi(t) - s(t, \boldsymbol{\lambda}_o)); \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = N_0(t) + a_1(t, \boldsymbol{\lambda}_o) R + R a_1^T(t, \boldsymbol{\lambda}_o) - R \mathbf{S}_1(t, \boldsymbol{\lambda}_o) N^{-1} \mathbf{S}_1^T(t, \boldsymbol{\lambda}_o) R, \quad (4)$$

где $\mathbf{S}_1(t, \boldsymbol{\lambda}_o)$ — вектор-столбец с компонентами $\frac{\partial s(t, \boldsymbol{\lambda}_o)}{\partial \lambda_{oi}}$.

Дискретный алгоритм квазиоптимальной фильтрации имеет вид [13]

$$\boldsymbol{\lambda}_o[n+1, n] = \mathbf{a}[n, \boldsymbol{\lambda}_o]; \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_o[n] = \boldsymbol{\lambda}_o[n, n-1] + P[n] \mathbf{S}_1[n] N^{-1} (\xi[n] - s[n, \boldsymbol{\lambda}_o]);$$

$$P[n+1, n] = \frac{\partial \mathbf{a}[n, \boldsymbol{\lambda}_o]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_o} P[n] \frac{\partial \mathbf{a}^T[n, \boldsymbol{\lambda}_o]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_o} + N_0[n];$$

$$P[n] = P[n, n-1] - P[n, n-1] \mathbf{S}_1[n] (\mathbf{S}_1^T[n] P[n, n-1] \mathbf{S}_1[n] + N)^{-1} \mathbf{S}_1^T[n] P[n, n-1],$$

где $s[n, \boldsymbol{\lambda}_o]$ — оценка сигнала от источника излучения; $\xi[n] = s[n, \boldsymbol{\lambda}] + \nu[n]$ — телевизионное изображение источника излучения на фоне помех; $\boldsymbol{\lambda}[n]$ — вектор параметров; $\boldsymbol{\lambda}_o[n]$ — вектор оценок параметров; $\boldsymbol{\lambda}_o[n+1, 1]$ — вектор прогнозирования оценок параметров; $\mathbf{S}_1[n]$ — вектор-столбец с компонентами $\frac{\partial s[n]}{\partial \lambda_{oi}}$; $\mathbf{a}[n, \boldsymbol{\lambda}_o]$ — вектор-столбец; $P[n]$ — дисперсионная матрица вектора оценок параметров; $P[n+1, 1]$ — дисперсионная матрица вектора прогнозирования оценок параметров.

При пропадании изображения источника излучения квазиоптимальный фильтр (1), (2) или (3), (4) обеспечивает прогнозирование оценок параметров источника излучения:

$$\frac{d\lambda_{\mathbf{o}}}{dt} = \mathbf{e}(t, \lambda_{\mathbf{o}}(t)), \quad (6)$$

где $\mathbf{e}(t, \lambda_{\mathbf{o}})$ — вектор, определяющий характер изменения параметров при отсутствии информации о нем.

В соответствии с прогнозируемыми значениями параметров (6) осуществляется восстановление сигнала от источника излучения $s(t, \lambda_{\mathbf{o}})$.

Синтезированные алгоритмы идентификации параметров источника излучения

Пусть яркостная структура изображения источника излучения описывается гауссовской поверхностью с параметрами a, b [3]:

$$s(x, y, t) = a \exp\left(-\frac{[x - (x_d + A_d \cos \varphi_d)]^2 + [y - (y_d + A_d \sin \varphi_d)]^2}{2b^2}\right), \quad (7)$$

где a — максимальный уровень яркости изображения; b — радиус изображения.

Пространственно-яркостная структура сформированного телевизионного изображения записывается следующим образом:

$$\xi(x, y, t) = s(x, y, t) + f(x, y) + n_u(x, y, t),$$

где $f(x, y)$ — фоновая обстановка; $n_u(x, y, t)$ — пространственно-временной шум наблюдения, который образуется шумами элементарных приемников фотоприемной матрицы, шумами дискретизации и другими шумами, обусловленными особенностями алгоритмов и устройств последующей обработки, но допускающими соответствующий учет уже на этапе постановки задачи.

Функционал правдоподобия в этом случае определяется следующим выражением:

$$F(t, \lambda_{\mathbf{o}}) = -\frac{1}{2N} \iint_M (\xi(x, y, t) - f(x, y) - s(x_o, y_o, t))^2 dx_o, dy_o, \quad (8)$$

где M — область определения телевизионного изображения $\xi(x, y, t)$, а $s(x_o, y_o, t)$ определяется выражением (7).

Координаты движения центра источника излучения в экранной системе координат описываются уравнениями двумерного сигнала следующего вида [5, 6]:

$$x_c(t) = x_d(t) + A_d(t) \cos \varphi_d(t); \quad y_c(t) = y_d(t) + A_d(t) \sin \varphi_d(t), \quad (9)$$

где $x_d = x_p(t) + x(t)$; $y_d = y_p(t) + y(t)$; $A_d = A_p(t) + A(t)$; $\varphi_d = \varphi_p(t) + \varphi(t)$; $x(t)$, $y(t)$ — смещение сигнала; $A(t)$ — амплитуда сигнала; $\varphi(t)$ — фаза сигнала; $x_p(t)$, $y_p(t)$, $A_p(t)$, $\varphi_p(t)$ — опорные значения соответствующих параметров, $\varphi_p = \int_0^t \omega_p(t) dt$.

Хорошие результаты обеспечивает полиномиальное представление параметров траектории, учитывающее члены до третьего порядка. Запишем систему уравнений, представляющую искомые параметры, в виде диффузионного марковского процесса:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \mathbf{a}(t, \lambda) + \nu_{\mathbf{o}}(t), \quad (10)$$

где

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_x, \boldsymbol{\lambda}_y, \boldsymbol{\lambda}_A, \boldsymbol{\lambda}_\varphi, \boldsymbol{\lambda}_a, \boldsymbol{\lambda}_b)^T;$$

$$\boldsymbol{\lambda}_x = (x, v_x, a_x); \quad \boldsymbol{\lambda}_y = (y, v_y, a_y); \quad \boldsymbol{\lambda}_A = (A, r, \rho); \quad \boldsymbol{\lambda}_\varphi = (\varphi, \omega, \varepsilon); \quad \boldsymbol{\lambda}_a = (a, \dot{a}, \ddot{a}); \quad \boldsymbol{\lambda}_b = (b, \dot{b}, \ddot{b});$$

$$\boldsymbol{\nu}_0 = (\boldsymbol{\nu}_{0x}, \boldsymbol{\nu}_{0y}, \boldsymbol{\nu}_{0A}, \boldsymbol{\nu}_{0\varphi}, \boldsymbol{\nu}_{0a}, \boldsymbol{\nu}_{0b})^T;$$

$$\boldsymbol{\nu}_{0x} = (0, 0, \nu_{0a_x}); \quad \boldsymbol{\nu}_{0y} = (0, 0, \nu_{0a_y}); \quad \boldsymbol{\nu}_{0A} = (0, 0, \nu_{0\rho}); \quad \boldsymbol{\nu}_{0\varphi} = (0, 0, \nu_{0\varepsilon_x}); \quad \boldsymbol{\nu}_{0a} = (0, 0, \nu_{0\ddot{a}}); \quad \boldsymbol{\nu}_{0b} = (0, 0, \nu_{0\ddot{b}});$$

v_x, v_y, a_x, a_y — скорости и ускорения смещения сигнала; r, ρ — скорость и ускорение изменения амплитуды сигнала; ω, ε — угловые скорость и ускорение изменения фазы сигнала; \dot{a}, \ddot{a} — скорость и ускорение изменения максимального уровня яркости изображения; \dot{b}, \ddot{b} — скорость и ускорение изменения радиуса изображения; $\nu_{0a_x}(t), \nu_{0a_y}(t), \nu_{0\rho}(t), \nu_{0\varepsilon}(t), \nu_{0a}(t), \nu_{0b}(t)$ — белые гауссовские формирующие шумы соответствующих параметров.

Запишем векторы и матрицы коэффициентов для алгоритмов оценки параметров движения источника излучения:

$$\mathbf{a}(t, \boldsymbol{\lambda}_0) = (\mathbf{a}_{x_0}, \mathbf{a}_{y_0}, \mathbf{a}_{A_0}, \mathbf{a}_{\varphi_0}, \mathbf{a}_{a_0}, \mathbf{a}_{b_0})^T,$$

$$\mathbf{a}_{x_0} = (v_{x_0}, a_{x_0}, 0), \quad \mathbf{a}_{y_0} = (v_{y_0}, a_{y_0}, 0), \quad \mathbf{a}_{A_0} = (r_0, \rho_0, 0),$$

$$\mathbf{a}_{\varphi_0} = (\omega_0, \varepsilon_0, 0), \quad \mathbf{a}_{a_0} = (\dot{a}_0, \ddot{a}_0, 0), \quad \mathbf{a}_{b_0} = (\dot{b}_0, \ddot{b}_0, 0);$$

$$a_1(t, \boldsymbol{\lambda}_0) = \begin{pmatrix} a_{1x_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{1y_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{1A_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{1\varphi_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1a_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1b_0} \end{pmatrix},$$

$$a_{1x_0} = a_{1y_0} = a_{1A_0} = a_{1\varphi_0} = a_{1a_0} = a_{1b_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем параметры двумерного сигнала (9).

Теперь задача определения параметров движения источника излучения в общей постановке может быть сформулирована как задача оценки по наблюдаемому телевизионному изображению вектора параметров $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_x, \boldsymbol{\lambda}_y, \boldsymbol{\lambda}_A, \boldsymbol{\lambda}_\varphi, \boldsymbol{\lambda}_a, \boldsymbol{\lambda}_b)^T$, изменение которых во времени определяется уравнениями (9). При этом собственно алгоритм обработки телевизионного изображения, на выходе которого формируются регулирующие воздействия для блоков траекторной фильтрации оцениваемых переменных, определяется выражениями (1), (2); элементы $\frac{\partial F(t, \boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial \lambda_{0i}}$ можно интерпретировать как своеобразные дискриминационные характеристики, устанавливающие связь между наблюдаемым (входным) текущим телевизионным изображением и регулирующим воздействием по i -й координате [3].

В предположении некоррелированности шума наблюдений по времени и пространственным переменным представим его корреляционную функцию в виде

$$R_{nu}(\Delta x, \Delta y, \Delta t) = N \delta(\Delta t) \delta(\Delta x, \Delta y),$$

где N — спектральная плотность шума наблюдений; $\delta(\Delta t), \delta(\Delta x, \Delta y)$ — δ -функции (функции Дирака) от приращений соответствующих переменных.

Предполагая, что шумы параметров сигнала независимы друг от друга, запишем матрицу их спектральных плотностей:

$$N_0 = \begin{pmatrix} N_{ox} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{oy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{oA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{o\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{oa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ob} \end{pmatrix},$$

где $N_{ox} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{oa_x} \end{pmatrix}$; $N_{oy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{oa_y} \end{pmatrix}$; $N_{oA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{o\rho} \end{pmatrix}$; $N_{o\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{o\varepsilon} \end{pmatrix}$;

$N_{oa} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{o\ddot{a}} \end{pmatrix}$; $N_{ob} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{o\ddot{b}} \end{pmatrix}$; O — нулевая матрица.

После возведения в квадрат подынтегрального выражения функционал правдоподобия (8) примет вид [3]

$$F(t, \boldsymbol{\lambda}_o) = -\frac{1}{2N} \iint_M \left[(\xi(x, y, t) - f(x, y))^2 - 2(\xi(x, y, t) - f(x, y))s(x_o, y_o, t) + s^2(x_o, y_o, t) \right] dx_o dy_o.$$

При определении $F(t, \boldsymbol{\lambda}_o)$ оставим в подынтегральном выражении только среднее слагаемое, поскольку только оно зависит одновременно от $\xi(x, y, t)$ и оцениваемых переменных и, следовательно, только от него будут зависеть подлежащие определению оценки переменных. То есть будем использовать выражение для функционала правдоподобия в виде

$$F(t, \boldsymbol{\lambda}_o) = \frac{1}{N} \iint_M u_d(x, y, t) s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o,$$

где $u_d(x, y, t) = \xi(x, y, t) - f(x, y)$ — разностное изображение.

Вектор $\mathbf{F}_1(t, \boldsymbol{\lambda}_o)$ представим в развернутом виде:

$$\mathbf{F}_1(t, \boldsymbol{\lambda}_o) = \{\mathbf{F}_{1x_o}, \mathbf{F}_{1y_o}, \mathbf{F}_{1A_o}, \mathbf{F}_{1\varphi_o}, \mathbf{F}_{1a_o}, \mathbf{F}_{1b_o}\}^T,$$

где $\mathbf{F}_{1x_o} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_o}, 0, 0 \right)$; $\mathbf{F}_{1y_o} = \left(\frac{\partial F}{\partial y_o}, 0, 0 \right)$; $\mathbf{F}_{1A_o} = \left(\frac{\partial F}{\partial A_o}, 0, 0 \right)$;

$\mathbf{F}_{1\varphi_o} = \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_o}, 0, 0 \right)$; $\mathbf{F}_{1a_o} = \left(\frac{\partial F}{\partial a_o}, 0, 0 \right)$; $\mathbf{F}_{1b_o} = \left(\frac{\partial F}{\partial b_o}, 0, 0 \right)$;

$$\frac{\partial F}{\partial x_o} = \frac{1}{N} \iint_M u_d \frac{x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_o} = \frac{1}{N} \iint_M u_d \frac{y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o;$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_o} = \frac{1}{N} \iint_M u_d \frac{[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})] \cos \varphi_{do} + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})] \sin \varphi_{do}}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_0} = \frac{A_{d0}}{N} \iint_M u_d \frac{-[x - (x_{d0} + A_{d0} \cos \varphi_{d0})] \sin \varphi_{d0} + [y - (y_{d0} + A_{d0} \sin \varphi_{d0})] \cos \varphi_{d0}}{b_{d0}^2} s(x_0, y_0, t) dx_0 dy_0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = \frac{1}{N} \iint_M u_d \frac{s^2(x_0, y_0, t)}{2a_{d0}} dx_0 dy_0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_0} = \frac{-1}{N} \iint_M u_d \frac{[x - (x_{d0} + A_{d0} \cos \varphi_{d0})]^2 + [y - (y_{d0} + A_{d0} \sin \varphi_{d0})]^2}{2b_{d0}} s(x_0, y_0, t) dx_0 dy_0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_{x_0}} = \frac{\partial F}{\partial v_{y_0}} = \frac{\partial F}{\partial r_0} = \frac{\partial F}{\partial \omega_0} = \frac{\partial F}{\partial a_{x_0}} = \frac{\partial F}{\partial a_{y_0}} = \frac{\partial F}{\partial \rho_0} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial F}{\partial \dot{a}_0} = \frac{\partial F}{\partial \ddot{a}_0} = \frac{\partial F}{\partial \dot{b}_0} = \frac{\partial F}{\partial \ddot{b}_0} = 0;$$

$$s(x_0, y_0, t) = a_{d0} \exp \left(- \frac{[x - (x_{d0} + A_{d0} \cos \varphi_{d0})]^2 + [y - (y_{d0} + A_{d0} \sin \varphi_{d0})]^2}{2b_{d0}^2} \right).$$

Матрицу $F_2(t, \lambda_0)$ размером 18×18 представим в развернутом виде:

$$F_2(t, \lambda_0) = \begin{pmatrix} F_{2x_0x_0} & F_{2y_0x_0} & F_{2A_0x_0} & F_{2\varphi_0x_0} & F_{2a_0x_0} & F_{2b_0x_0} \\ F_{2x_0y_0} & F_{2y_0y_0} & F_{2A_0y_0} & F_{2\varphi_0y_0} & F_{2a_0y_0} & F_{2b_0y_0} \\ F_{2x_0A_0} & F_{2y_0A_0} & F_{2A_0A_0} & F_{2\varphi_0A_0} & F_{2a_0A_0} & F_{2b_0A_0} \\ F_{2x_0\varphi_0} & F_{2y_0\varphi_0} & F_{2A_0\varphi_0} & F_{2\varphi_0\varphi_0} & F_{2a_0\varphi_0} & F_{2b_0\varphi_0} \\ F_{2x_0a_0} & F_{2y_0a_0} & F_{2A_0a_0} & F_{2\varphi_0a_0} & F_{2a_0a_0} & F_{2b_0a_0} \\ F_{2x_0b_0} & F_{2y_0b_0} & F_{2A_0b_0} & F_{2\varphi_0b_0} & F_{2a_0b_0} & F_{2b_0b_0} \end{pmatrix},$$

$$\text{где } F_{2\lambda_{0i}\lambda_{0j}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(t, \lambda_0)}{\partial \lambda_{0i} \partial \lambda_{0j}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставив полученные выражения в (1) и (2), получим уравнения, по которым синтезируется алгоритм оценки параметров. Разворачивая матричное представление (2) в систему уравнений, получаем фильтр с множеством перекрестных связей по оцениваемым параметрам. Из (2) следует, что для расчета коэффициентов требуется на каждом шаге решать систему нелинейных дифференциальных уравнений, что требует больших вычислительных ресурсов.

Проведем упрощение полученного алгоритма. Для этого воспользуемся уравнениями (3) и (4). Можно показать, что для рассматриваемого сигнала (7) соблюдается равенство $\mathbf{S}_1(t, \lambda_0) N^{-1}(t) \times (\xi(t) - s(t, \lambda_0)) = \mathbf{F}_1(t, \lambda_0)$, следовательно, уравнение (4) совпадает с (2).

Обозначим $P(t, \lambda_0) = \mathbf{S}_1(t, \lambda_0) N^{-1}(t) \mathbf{S}_1^T(t, \lambda_0)$. Запишем матрицу $P(t, \lambda_0)$ размером 18×18 :

$$P = \begin{pmatrix} P_{x_0x_0} & P_{y_0x_0} & P_{A_0x_0} & P_{\varphi_0x_0} & P_{a_0x_0} & P_{b_0x_0} \\ P_{x_0y_0} & P_{y_0y_0} & P_{A_0y_0} & P_{\varphi_0y_0} & P_{a_0y_0} & P_{b_0y_0} \\ P_{x_0A_0} & P_{y_0A_0} & P_{A_0A_0} & P_{\varphi_0A_0} & P_{a_0A_0} & P_{b_0A_0} \\ P_{x_0\varphi_0} & P_{y_0\varphi_0} & P_{A_0\varphi_0} & P_{\varphi_0\varphi_0} & P_{a_0\varphi_0} & P_{b_0\varphi_0} \\ P_{x_0a_0} & P_{y_0a_0} & P_{A_0a_0} & P_{\varphi_0a_0} & P_{a_0a_0} & P_{b_0a_0} \\ P_{x_0b_0} & P_{y_0b_0} & P_{A_0b_0} & P_{\varphi_0b_0} & P_{a_0b_0} & P_{b_0b_0} \end{pmatrix}.$$

Полагая, что периодические составляющие в матрице P не оказывают заметного влияния на R , усредним их за период.

Корреляционная матрица ошибок фильтрации имеет следующий вид:

$$R = \begin{pmatrix} R_{x_0x_0} & R_{y_0x_0} & R_{A_0x_0} & R_{\varphi_0x_0} & R_{a_0x_0} & R_{b_0x_0} \\ R_{x_0y_0} & R_{y_0y_0} & R_{A_0y_0} & R_{\varphi_0y_0} & R_{a_0y_0} & R_{b_0y_0} \\ R_{x_0A_0} & R_{y_0A_0} & R_{A_0A_0} & R_{\varphi_0A_0} & R_{a_0A_0} & R_{b_0A_0} \\ R_{x_0\varphi_0} & R_{y_0\varphi_0} & R_{A_0\varphi_0} & R_{\varphi_0\varphi_0} & R_{a_0\varphi_0} & R_{b_0\varphi_0} \\ R_{x_0a_0} & R_{y_0a_0} & R_{A_0a_0} & R_{\varphi_0a_0} & R_{a_0a_0} & R_{b_0a_0} \\ R_{x_0b_0} & R_{y_0b_0} & R_{A_0b_0} & R_{\varphi_0b_0} & R_{a_0b_0} & R_{b_0b_0} \end{pmatrix}.$$

В предположении, что изменение параметров независимо, т. е. $R_{x_0y_0} = R_{x_0A_0} = R_{x_0\varphi_0} = R_{x_0a_0} = R_{x_0b_0} = R_{y_0A_0} = R_{y_0\varphi_0} = R_{y_0a_0} = R_{y_0b_0} = R_{A_0\varphi_0} = R_{A_0a_0} = R_{A_0b_0} = R_{\varphi_0a_0} = R_{\varphi_0b_0} = R_{a_0b_0} = 0$, непрерывный алгоритм квазиоптимальной фильтрации будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{x_0}}{dt} &= \mathbf{a}_{x_0} + R_{x_0x_0} \mathbf{F}_{1x_0}; \\ \frac{dR_{x_0x_0}}{dt} &= N_{0x} + a_{1x_0} R_{x_0x_0} + R_{x_0x_0} a_{1x_0}^T + R_{x_0x_0} F_{2x_0x_0} R_{x_0x_0}; \\ \frac{d\lambda_{y_0}}{dt} &= \mathbf{a}_{y_0} + R_{y_0y_0} \mathbf{F}_{1y_0}; \\ \frac{dR_{y_0y_0}}{dt} &= N_{0y} + a_{1y_0} R_{y_0y_0} + R_{y_0y_0} a_{1y_0}^T + R_{y_0y_0} F_{2y_0y_0} R_{y_0y_0}; \\ \frac{d\lambda_{A_0}}{dt} &= \mathbf{a}_{A_0} + R_{A_0A_0} \mathbf{F}_{1A_0}; \\ \frac{dR_{A_0A_0}}{dt} &= N_{0A} + a_{1A_0} R_{A_0A_0} + R_{A_0A_0} a_{1A_0}^T + R_{A_0A_0} F_{2A_0A_0} R_{A_0A_0}; \\ \frac{d\lambda_{\varphi_0}}{dt} &= \mathbf{a}_{\varphi_0} + R_{\varphi_0\varphi_0} \mathbf{F}_{1\varphi_0}; \\ \frac{dR_{\varphi_0\varphi_0}}{dt} &= N_{0\varphi} + a_{1\varphi_0} R_{\varphi_0\varphi_0} + R_{\varphi_0\varphi_0} a_{1\varphi_0}^T + R_{\varphi_0\varphi_0} F_{2\varphi_0\varphi_0} R_{\varphi_0\varphi_0}; \\ \frac{d\lambda_{a_0}}{dt} &= \mathbf{a}_{a_0} + R_{a_0a_0} \mathbf{F}_{1a_0}; \\ \frac{dR_{a_0a_0}}{dt} &= N_{0a} + a_{1a_0} R_{a_0a_0} + R_{a_0a_0} a_{1a_0}^T + R_{a_0a_0} F_{2a_0a_0} R_{a_0a_0}; \\ \frac{d\lambda_{b_0}}{dt} &= \mathbf{a}_{b_0} + R_{b_0b_0} \mathbf{F}_{1b_0}; \\ \frac{dR_{b_0b_0}}{dt} &= N_{0b} + a_{1b_0} R_{b_0b_0} + R_{b_0b_0} a_{1b_0}^T + R_{b_0b_0} F_{2b_0b_0} R_{b_0b_0}. \end{aligned}$$

Для стационарного состояния полагаем $\frac{dR}{dt} = 0$. В результате (2) преобразуется в систему из нелинейных алгебраических уравнений, не зависящих от времени.

Для частного случая при третьем порядке уравнений диффузионного марковского процесса для независимых друг от друга параметров траектории имеем следующую структуру непрерывного фильтра:

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= v_{x_0} + \frac{\Omega_{x_0} q}{N} \iint_M u_d \frac{x - (x_{d_0} + A_{d_0} \cos \varphi_{d_0})}{b_{d_0}^2} s(x_0, y_0, t) dx_0 dy_0; \\ \frac{dv_{x_0}}{dt} &= a_{x_0} + \frac{\Omega_{v_x} q}{N} \iint_M u_d \frac{x - (x_{d_0} + A_{d_0} \cos \varphi_{d_0})}{b_{d_0}^2} s(x_0, y_0, t) dx_0 dy_0; \\ \frac{da_{x_0}}{dt} &= \frac{\Omega_{a_x} q}{N} \iint_M u_d \frac{x - (x_{d_0} + A_{d_0} \cos \varphi_{d_0})}{b_{d_0}^2} s(x_0, y_0, t) dx_0 dy_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_o}{dt} &= v_{y_o} + \frac{\Omega_{yq}}{N} \iint_M u_d \frac{y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{dv_{y_o}}{dt} &= a_{y_o} + \frac{\Omega_{v_y q}}{N} \iint_M u_d \frac{y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{da_{y_o}}{dt} &= \frac{\Omega_{a_y q}}{N} \iint_M u_d \frac{y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{dA_o}{dt} &= r_o + \frac{\Omega_{Aq}}{N} \iint_M u_d \frac{[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})] \cos \varphi_{do} + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})] \sin \varphi_{do}}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{dr_o}{dt} &= \rho_o + \frac{\Omega_{r q}}{N} \iint_M u_d \frac{[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})] \cos \varphi_{do} + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})] \sin \varphi_{do}}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{d\rho_o}{dt} &= \frac{\Omega_{\rho q}}{N} \iint_M u_d \frac{[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})] \cos \varphi_{do} + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})] \sin \varphi_{do}}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{d\varphi_o}{dt} &= \omega_o + \\
 &+ \frac{\Omega_{\varphi q} A_{do}}{N} \iint_M u_d \frac{-[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})] \sin \varphi_{do} + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})] \cos \varphi_{do}}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{d\omega_o}{dt} &= \varepsilon_o + \\
 &+ \frac{\Omega_{\omega q} A_{do}}{N} \iint_M u_d \frac{-[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})] \sin \varphi_{do} + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})] \cos \varphi_{do}}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{d\varepsilon_o}{dt} &= \frac{\Omega_{\varepsilon q} A_{do}}{N} \iint_M u_d \frac{-[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})] \sin \varphi_{do} + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})] \cos \varphi_{do}}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{da_o}{dt} &= \dot{a}_o + \frac{\Omega_{a q}}{N} \iint_M \frac{u_d s^2(x_o, y_o, t)}{a_{do}} dx_o dy_o; \\
 \frac{d\dot{a}_o}{dt} &= \ddot{a}_o + \frac{\Omega_{\dot{a} q}}{N} \iint_M \frac{u_d s^2(x_o, y_o, t)}{a_{do}} dx_o dy_o; \\
 \frac{d\ddot{a}_o}{dt} &= \frac{\Omega_{\ddot{a} q}}{N} \iint_M \frac{u_d s^2(x_o, y_o, t)}{a_{do}} dx_o dy_o; \\
 \frac{db_o}{dt} &= \dot{b}_o - \frac{\Omega_{b q}}{N} \iint_M u_d \frac{[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})]^2 + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})]^2}{2b_{do}} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{d\dot{b}_o}{dt} &= \ddot{b}_o - \frac{\Omega_{\dot{b} q}}{N} \iint_M u_d \frac{[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})]^2 + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})]^2}{2b_{do}} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{d\ddot{b}_o}{dt} &= -\frac{\Omega_{\ddot{b} q}}{N} \iint_M u_d \frac{[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})]^2 + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})]^2}{2b_{do}} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где q — признак отсутствия изображения источника излучения на видеокдрах (принимает значение 0 или 1); $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_{v_x}, \Omega_{v_y}, \Omega_{a_x}, \Omega_{a_y}, \Omega_A, \Omega_r, \Omega_\rho, \Omega_\varphi, \Omega_\omega, \Omega_\varepsilon, \Omega_a, \Omega_{\dot{a}}, \Omega_{\ddot{a}}, \Omega_b, \Omega_{\dot{b}}, \Omega_{\ddot{b}}$ — коэффициенты фильтра.

Синтезированный квазиоптимальный алгоритм обеспечивает оценку не только самих параметров, но и скоростей и ускорений их изменения.

Из алгоритма (11) возможно получение частных вариантов путем исключения оцениваемых параметров, а также понижением порядка уравнений диффузионного марковского процесса. Например, для частного случая при первом порядке уравнений диффузионного марковского процесса для параметров сигнала имеем следующую структуру фильтра [13]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_o}{dt} &= \frac{\Omega_x q}{N} \iint_M u_d \frac{x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{dy_o}{dt} &= \frac{\Omega_y q}{N} \iint_M u_d \frac{y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{dA_o}{dt} &= \frac{\Omega_A q}{N} \iint_M u_d \frac{[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})] \cos \varphi_{do} + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})] \sin \varphi_{do}}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{d\varphi_o}{dt} &= \\
 &= \frac{\Omega_\varphi q A_{do}}{N} \iint_M u_d \frac{-[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})] \sin \varphi_{do} + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})] \cos \varphi_{do}}{b_{do}^2} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o; \\
 \frac{da_o}{dt} &= \frac{\Omega_a q}{N} \iint_M \frac{u_d s^2(x_o, y_o, t)}{a_{do}} dx_o dy_o; \\
 \frac{db_o}{dt} &= -\frac{\Omega_b q}{N} \iint_M u_d \frac{[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})]^2 + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})]^2}{2b_{do}} s(x_o, y_o, t) dx_o dy_o.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Дискретный алгоритм квазиоптимальной фильтрации для оценки только параметров движения изображения на фоне помех, полученный в соответствии с (5) и с учетом равенства $\mathbf{S}_1[n, \boldsymbol{\lambda}_o] N^{-1}[n] \times (\xi[n] - s[n, \boldsymbol{\lambda}_o]) = \mathbf{F}_1[n, \boldsymbol{\lambda}_o]$, имеет вид

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\lambda}_{x_o}[n+1, n] &= \mathbf{a}_{x_o}[n]; \\
 \boldsymbol{\lambda}_{x_o}[n] &= \boldsymbol{\lambda}_{x_o}[n, n-1] + qP_x[n] \mathbf{F}_{1x_o}[n]; \\
 \boldsymbol{\lambda}_{y_o}[n+1, n] &= \mathbf{a}_{y_o}[n]; \\
 \boldsymbol{\lambda}_{y_o}[n] &= \boldsymbol{\lambda}_{y_o}[n, n-1] + qP_y[n] \mathbf{F}_{1y_o}[n]; \\
 \boldsymbol{\lambda}_{A_o}[n+1, n] &= \mathbf{a}_{A_o}[n]; \\
 \boldsymbol{\lambda}_{A_o}[n] &= \boldsymbol{\lambda}_{A_o}[n, n-1] + qP_A \mathbf{F}_{1A_o}[n]; \\
 \boldsymbol{\lambda}_{\varphi_o}[n+1, n] &= \mathbf{a}_{\varphi_o}[n]; \\
 \boldsymbol{\lambda}_{\varphi_o}[n] &= \boldsymbol{\lambda}_{\varphi_o}[n, n-1] + qP_\varphi \mathbf{F}_{1\varphi_o}[n],
 \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{x_o}[n] &= \left(x_o[n] + v_{x_o}[n]T + \frac{a_{x_o}[n]T^2}{2}, v_{x_o}[n] + a_{x_o}[n]T, a_{x_o}[n] \right)^T; \\
 \mathbf{a}_{y_o}[n] &= \left(y_o[n] + v_{y_o}[n]T + \frac{a_{y_o}[n]T^2}{2}, v_{y_o}[n] + a_{y_o}[n]T, a_{y_o}[n] \right)^T; \\
 \mathbf{a}_{A_o}[n] &= \left(A_o[n] + r_o[n]T + \frac{\rho_o[n]T^2}{2}, r_o[n] + \rho_o[n]T, \rho_o[n] \right)^T; \\
 \mathbf{a}_{\varphi_o}[n] &= \left(\varphi_o[n] + \omega_o[n]T + \frac{\varepsilon_o[n]T^2}{2}, \omega_o[n] + \varepsilon_o[n]T, \varepsilon_o[n] \right)^T; \\
 \mathbf{F}_{1x_o}[n] &= \left(\frac{\partial F[n]}{\partial x_o}, 0, 0 \right)^T; \quad \mathbf{F}_{1y_o}[n] = \left(\frac{\partial F[n]}{\partial y_o}, 0, 0 \right)^T;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{1A_o} [n] &= \left(\frac{\partial F [n]}{\partial A_o}, 0, 0 \right)^T; \quad \mathbf{F}_{1\varphi_o} [n] = \left(\frac{\partial F [n]}{\partial \varphi_o}, 0, 0 \right)^T; \\
 \frac{\partial F [n]}{\partial x_o} &= \frac{1}{N} \sum_M \sum \left[u_d \frac{x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})}{b^2} s [x_o, y_o, n] \right]; \\
 \frac{\partial F [n]}{\partial y_o} &= \frac{1}{N} \sum_M \sum \left[u_d \frac{y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})}{b^2} s [x_o, y_o, n] \right]; \\
 \frac{\partial F [n]}{\partial A_o} &= \frac{1}{N} \sum_M \sum \left\{ u_d \frac{[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})] \cos \varphi_{do} + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})] \sin \varphi_{do}}{b^2} s [x_o, y_o, n] \right\}; \\
 \frac{\partial F [n]}{\partial \varphi_o} &= \\
 &= \frac{A_{do}}{N} A_{do} \sum_M \sum \left\{ u_d \frac{-[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})] \sin \varphi_{do} + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})] \cos \varphi_{do}}{b^2} s [x_o, y_o, n] \right\}; \\
 \frac{\partial F [n]}{\partial v_{x_o}} &= \frac{\partial F [n]}{\partial v_{y_o}} = \frac{\partial F [n]}{\partial r_o} = \frac{\partial F [n]}{\partial w_o} = \frac{\partial F [n]}{\partial a_{x_o}} = \frac{\partial F [n]}{\partial a_{y_o}} = \frac{\partial F [n]}{\partial \rho_o} = \frac{\partial F [n]}{\partial \varepsilon_o} = 0; \\
 s [x_o, y_o, n] &= a_{do} \exp \left(- \frac{[x - (x_{do} + A_{do} \cos \varphi_{do})]^2 + [y - (y_{do} + A_{do} \sin \varphi_{do})]^2}{2b_{do}^2} \right).
 \end{aligned}$$

С учетом того, что изменение параметров независимо, дисперсионные матрицы вычисляются по следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
 P_x [n+1, n] &= \frac{\partial \mathbf{a}_x [n]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{x_o} [n]} P_x [n] \frac{\partial \mathbf{a}_x^T [n]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{x_o} [n]} + N_{ox} [n]; \\
 P_x [n] &= P_x [n, n-1] - P_x [n, n-1] \mathbf{S}_{1x} [n] \left(\mathbf{S}_{1x}^T [n] P_x [n, n-1] \mathbf{S}_{1x} [n] + N_x \right)^{-1} \mathbf{S}_{1x}^T [n] P_x [n, n-1]; \\
 P_y [n+1, n] &= \frac{\partial \mathbf{a}_y [n]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{y_o} [n]} P_y [n] \frac{\partial \mathbf{a}_y^T [n]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{y_o} [n]} + N_{oy} [n]; \\
 P_y [n] &= P_y [n, n-1] - P_y [n, n-1] \mathbf{S}_{1y} \left(\mathbf{S}_{1y}^T [n] P_y [n, n-1] \mathbf{S}_{1y} [n] + N_y \right)^{-1} \mathbf{S}_{1y}^T [n] P_y [n, n-1]; \\
 P_A [n+1, n] &= \frac{\partial \mathbf{a}_A [n]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{A_o} [n]} P_A [n] \frac{\partial \mathbf{a}_A^T [n]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{A_o} [n]} + N_{ox} [n]; \\
 P_A [n] &= P_A [n, n-1] - P_A [n, n-1] \mathbf{S}_{1A} [n] \left(\mathbf{S}_{1A}^T [n] P_A [n, n-1] \mathbf{S}_{1A} [n] + N_A \right)^{-1} \mathbf{S}_{1A}^T [n] P_A [n, n-1]; \\
 P_\varphi [n+1, n] &= \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi [n]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{\varphi_o} [n]} P_\varphi [n] \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi^T [n]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{\varphi_o} [n]} + N_{ox} [n]; \\
 P_\varphi [n] &= P_\varphi [n, n-1] - P_\varphi [n, n-1] \mathbf{S}_{1\varphi} [n] \left(\mathbf{S}_{1\varphi}^T [n] P_\varphi [n, n-1] \mathbf{S}_{1\varphi} [n] + N_\varphi \right)^{-1} \mathbf{S}_{1\varphi}^T [n] P_\varphi [n, n-1],
 \end{aligned}$$

$$\text{где } \frac{\partial \mathbf{a}_x [n]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{x_o} [n]} = \frac{\partial \mathbf{a}_y [n]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{y_o} [n]} = \frac{\partial \mathbf{a}_A [n]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{A_o} [n]} = \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi [n]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{\varphi_o} [n]} = \begin{pmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_{1x} [n] = \left(\frac{\partial s [n, \boldsymbol{\lambda}_o]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{x_o} [n]}, 0, 0 \right)^T; \\
 \mathbf{S}_{1y} [n] = \left(\frac{\partial s [n, \boldsymbol{\lambda}_o]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{y_o} [n]}, 0, 0 \right)^T; \quad \mathbf{S}_{1A} [n] = \left(\frac{\partial s [n, \boldsymbol{\lambda}_o]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{A_o} [n]}, 0, 0 \right)^T; \quad \mathbf{S}_{1\varphi} [n] = \left(\frac{\partial s [n, \boldsymbol{\lambda}_o]}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{\varphi_o} [n]}, 0, 0 \right)^T.$$

При отсутствии изображения источника излучения на видеокадрах его движение можно восстановить по прогнозируемым параметрам движения в соответствии с выражениями

$$x_{co} (t) = x_{do} + A_{do} \cos (\varphi_{do}); \quad y_{co} (t) = y_{do} + A_{do} \sin (\varphi_{do}). \quad (14)$$

В соответствии с законами геометрической оптики связь между координатами изображения источника излучения и реальными его координатами определяется выражениями

$$x = \frac{d}{f}X; \quad y = \frac{d}{f}Y, \quad (15)$$

где x, y — координаты источника излучения; X, Y — координаты изображения источника излучения; d — дальность до источника излучения; f — фокусное расстояние объектива.

Синтезированные алгоритмы можно использовать непосредственно для оценки параметров движения источника излучения. В этом случае в уравнения для оценки координат центра $(x_0, v_{x_0}, a_{x_0}, y_0, v_{y_0}, a_{y_0})$ и радиуса (A_0, r_0, ρ_0) вращения источника излучения перед интегралами в (11), (12) или знаками суммирования в (13) вводится коэффициент $K = d/f$ в соответствии с (15), а под интегралами или знаками суммирования используются параметры движения изображения источника излучения. Если первоначально определяют оценки параметров движения изображения источника излучения, используя алгоритмы (11), (12) или (13), то расчет координат источника излучения осуществляется по выражениям (15).

Полученный упрощенный алгоритм (11) целесообразно использовать в случаях стационарного или квазистационарного изменения параметров движения изображения источника излучения.

В алгоритмах (11)—(13) должны обеспечиваться условия синхронизации [14], в противном случае возможен срыв процесса оценки параметров движения источника излучения. Тогда необходимо переходить в режим прогнозирования параметров (14) в соответствии с (6).

Результаты моделирования алгоритма оценки параметров движения источника излучения

Разработанный квазиоптимальный алгоритм (13) без оценки параметров изображения a и b реализован в среде Matlab [11]. По полученным координатам изображения путем пересчета (15) получают координаты источника излучения.

Реализация алгоритма осуществлена с частотой 200 Гц. Размер телевизионного изображения 320×320 пикселей. Для упрощения вычисления интегралов при реализации указанного алгоритма использован подход, предложенный в работе [3], позволяющий вести расчеты по сумме и разности площадей четырех квадрантов ограниченной квадратным стробом области обработки.

На рис. 1 приведены исходные телевизионные изображения. На рис. 2—4 — результаты оценки параметров движения изображения источника излучения по видеокадрам (серого цвета), а также истинные значения оцениваемых параметров (черного цвета).

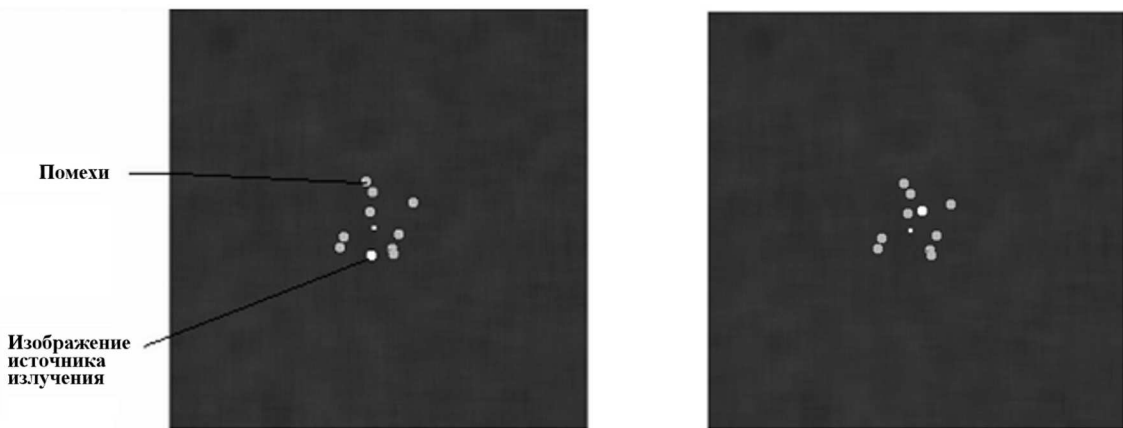


Рис. 1. Два видеокадра из последовательности телевизионных изображений, показывающие положение подвижного изображения источника полезного излучения относительно помех

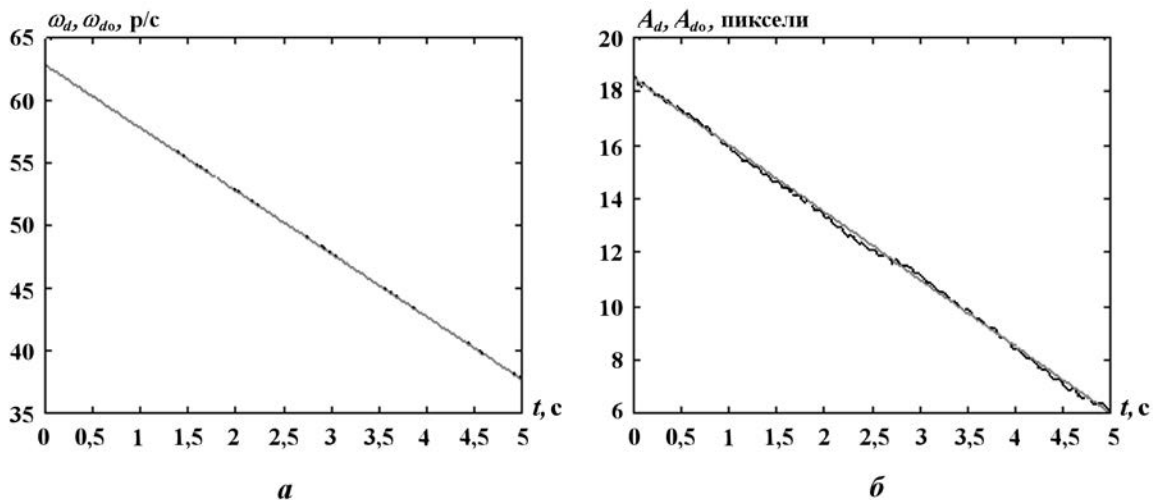


Рис. 2. Оценка частоты (а) и радиуса (б) вращения изображения источника полезного излучения

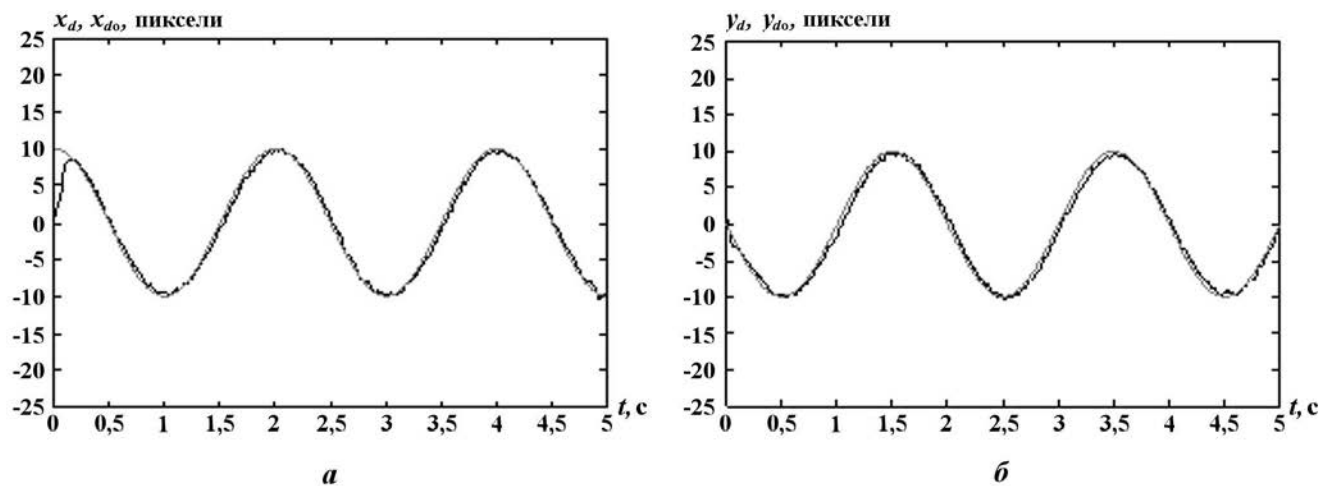


Рис. 3. Оценка координат центра вращения изображения источника полезного излучения: а — по горизонтали; б — по вертикали

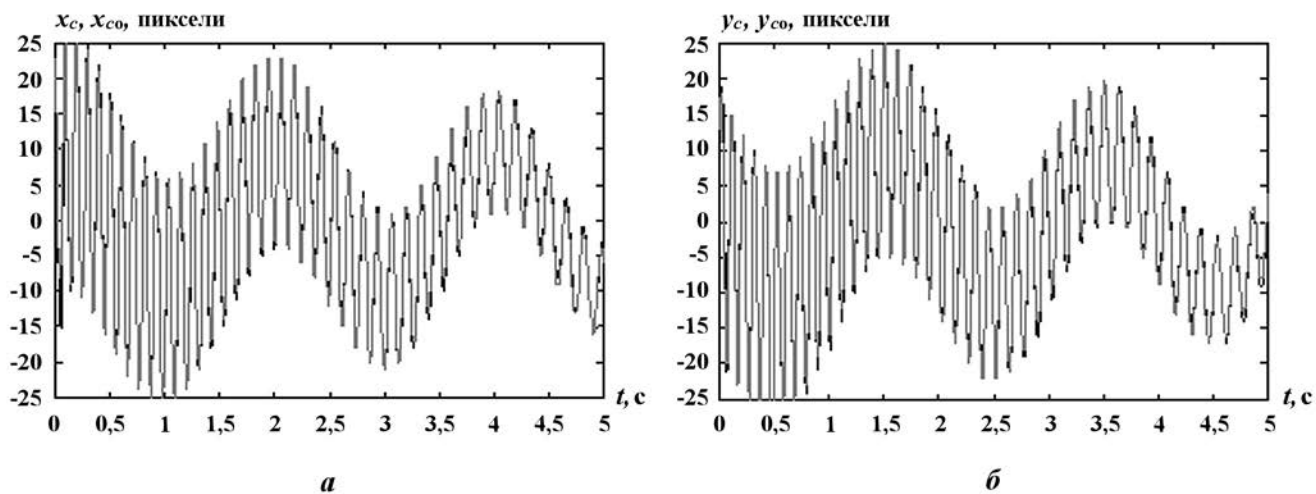


Рис. 4. Оценка координат центра изображения источника полезного излучения: а — по горизонтали; б — по вертикали

Проведен расчет ошибок оценок параметров движения изображения источника полезного излучения. Получены следующие математические ожидания и среднеквадратические ошибки оценок соответственно: для координат центра вращения — 1,0 и 0,88 пикселя; для радиуса вращения — 0,11 и 0,08 пикселя; для частоты вращения — 0,02 и 0,01 р/с; для координат центра изображения источника излучения — 1,2 и 1,3 пикселя.

Заключение

Таким образом, разработаны квазиоптимальные алгоритмы, обеспечивающие оценку и прогнозирование параметров движения (координат центра, частоты и радиуса вращения) источника излучения, а также уровня яркости и радиуса его изображения непосредственно по последовательности телевизионных изображений.

Список литературы

1. *Понятский В. М., Карамов С. В., Макарецкий Е. А.* Выделения координат полезного источника излучения на фоне помех с фотоприемника матричного типа // 8-я Межд. конф. "Цифровая обработка сигналов и ее применение" (29—31 марта 2006 г.). Т. 2. М.: Институт проблем управления, 2006. С. 450—453.
2. *Карамов С. В., Понятский В. М.* Реализация алгоритма выделения координат полезного источника по изображению с фотоприемника матричного типа // Тр. Третьей межд. конф. "Параллельные вычисления и задачи управления" (2—4 октября 2006 г.). М.: Институт проблем управления, 2006. С. 456—471.
3. *Понятский В. М., Южно П. М.* Квазиоптимальный синтез системы оценки координат источника излучения с пространственно-временной модуляцией // Всерос. воен.-науч. конф. "Проблемы развития системы РЭБ Российской Федерации". Тез. докл. Ч. 2. Воронеж: ФГНИИЦ РЭБ ОЭСЗ, 2005. С. 64—66.
4. *Карамов С. В., Понятский В. М.* Оценка фазы вращения подвижного источника излучения по видеоизображениям // Третья межд. конф. по проблемам управления (20—22 июня 2006 г.): Пленарные доклады и избранные труды. М.: Институт проблем управления, 2006. С. 638—645.
5. *Понятский В. М.* Определение частоты вращения летательного аппарата по последовательности видеоизображений // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2007. Вып. 1. С. 89—103.
6. *Понятский В. М., Карамов С. В.* Идентификация параметров нестационарных двумерных сигналов // Тр. VI Межд. конф. "Идентификация систем и задачи управления". М.: Институт проблем управления, 2007. С. 1338—1354.
7. *Понятский В. М.* Выделение параметров траектории движения вращающегося летательного аппарата с помощью квазиоптимального фильтра // Межд. науч. конф. "Проблемы баллистики". Т. 2. С.-Пб.: БГТУ, 2007. С. 136—161.
8. *Понятский В. М.* Оценка экспериментальных характеристик летательного аппарата методом инвариантного погружения // Первая всерос. науч.-тех. конф. "Фундаментальные основы баллистического проектирования" (23—26 июня 2008 г.). Т. 1. С.-Пб.: БГТУ, 2008. С. 29—33.
9. *Понятский В. М.* Оценка параметров движения изображения при видеообработке с помощью квазиоптимальной фильтрации // X Межд. семинар "Супервычисления и математическое моделирование" (29 сентября — 3 октября 2008 г.). Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2008. С. 100—103.
10. *Понятский В. М.* Выделение параметров движения изображения источника излучения по последовательности видеокадров с помощью квазиоптимального фильтра // Изв. ТулГУ. Сер. "Радиотехника и радиооптика". 2008. Т. X. С. 123—135.

11. *Понятский В. М.* Методический подход к проектированию алгоритмов оценки параметров движения изображения объекта при обработке последовательности телевизионных кадров на основе метода квазиоптимальной фильтрации // 11-я Межд. конф. "Цифровая обработка сигналов и ее применение" (24—26 марта 2009 г). Т. 2. М.: Институт проблем управления, 2009. С. 497—501.
12. *Тихонов В. И.* Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983.
13. *Сейдж Э., Мелса Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
14. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977.

Статья поступила в редакцию 12.05.09.

УДК 519.6

ПРОГРАММНО-АППАРАТНАЯ СИСТЕМА СИНХРОНИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ В ИЗОЛИРОВАННЫХ ЛОКАЛЬНЫХ СЕТЯХ

А. П. Чухонцев, В. А. Первов, А. Н. Давыдов, М. Ю. Осипов
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Дается описание программно-аппаратной системы синхронизации времени в изолированных локальных сетях. Освещены основные принципы функционирования системы, структура аппаратных и программных средств.

Ключевые слова: аппаратно-программный комплекс, изолированные сети, сервер времени, синхронизация времени, коррекция системных часов, проводное радиовещание, гальваническая развязка, дешифрация радиосигнала, микроконтроллер.

Введение

С развитием локальных вычислительных сетей (ЛВС) появляется объективная необходимость автоматизации процесса корректировки показаний системных часов сервера времени, так как точное время является одним из главных компонентов системного администрирования. В администрировании распределенных приложений, веб-сервисов и наблюдений за безопасностью точное время — это необходимость, для обеспечения которой в составе ЛВС организуется эталонный сервер времени.

Системные часы сервера времени задают импульсы внутреннего программного генератора. Нестабильность формирования импульсов приводит к погрешности показаний системного времени, и, как следствие, появляется необходимость его постоянной корректировки относительно точного астрономического значения. В серийно выпускаемых серверах средства автоматической синхронизации отсутствуют, и корректировка системных часов такого сервера времени производится вручную его администратором. Очевидно, что для автоматизации процесса корректировки целесообразно использовать доступные ресурсы систем точного времени, позволяющие осуществлять синхронизацию. Такими ресурсами являются серверы точного времени, размещенные в сети Интернет, время, полученное от системы GPS (Global Positioning System — глобальная система позиционирования), каналы проводного радиовещания и др.

К изолированным ЛВС, предназначенным для обработки информации разной степени конфиденциальности, предъявляются дополнительные требования, связанные с предотвращением образования каналов утечки информации. Поэтому средства эфирного взаимодействия (GPRS, эфирное радиовещание) вызывают множество проблем. Наиболее подходящим решением в этих условиях является применение в качестве синхронизирующего ресурса канала проводного радиовещания.

Обзор существующих устройств

Поиск и анализ информации об устройствах синхронизации времени, представленной на сайтах Интернета и в периодических изданиях, не выявил устройств, отвечающих изложенным выше требованиям.

Ниже приведены краткие характеристики наиболее близких по функциональному назначению устройств:

1. Прибор привязки временной синхронизации Харьковского метрополитена, работающий по Государственному эталону времени (по шести точкам привязки). Устройство многофункциональное и поэтому слишком громоздкое, может использовать различные синхронизирующие ресурсы [1].
2. Устройство синхронизации времени УСВ-1 (занесено в Государственный реестр средств измерений № 28716-05). Имеет очень высо-

кую цену и, помимо функции синхронизации времени от радиотрансляционной проводной линии, позволяет получать данные от GPS [2].

3. Электронная схема синхронизации часов ЭВМ, разработанная во ВНИИЭФ в 1967 г. на элементной базе того времени.

Анализ характеристик отмеченных выше (и ряда других) систем позволил сделать вывод об отсутствии устройств, удовлетворяющих техническим, экономическим и организационным требованиям, необходимых для применения в ЛВС. На основании этого было принято решение и проведена разработка собственной оригинальной программно-аппаратной системы синхронизации системных часов эталонного сервера времени ЛВС.

Основные принципы работы

Известно, что центральный канал проводного радиовещания осуществляет трансляцию точного времени в виде стандартной последовательности определенных сигналов:

- пауза (отсутствие звуковых сигналов) перед началом выдачи последовательности синхронизирующих сигналов;
- последовательность синхронизации из пяти монотонных звуковых сигналов и пяти пауз, а затем шестой монотонный звуковой сигнал, начало которого соответствует времени 00 минут 00 секунд каждого часа и является моментом корректировки времени.

Исходя из вышеизложенного, алгоритм синхронизации времени можно представить в следующем виде:

- анализ наличия звукового сигнала (для выделения синхронизирующего сигнала, начинается за минуту до момента корректировки);

- фиксация звукового сигнала (частотой 1 кГц и длительностью 100 мс);
- выделение паузы (отсутствие сигнала на протяжении 900 мс);
- коррекция часов с приходом шестого звукового сигнала и переход системы в исходное состояние ожидания;
- переход системы в исходное состояние ожидания при нарушении протокольной последовательности (считается, что последовательность сигналов точного времени ложная).

Структура аппаратных средств

В состав системы синхронизации времени (ССВ) входят следующие компоненты:

- устройство выделения синхросигнала точного времени (ВСТВ);
- сервер времени.

На рис. 1 представлена структура взаимодействующих в процессе синхронизации времени компонентов.

Устройство ВСТВ состоит:

- из схемы гальванической развязки канала проводного радиовещания;
- схемы согласования с каналом проводного радиовещания;
- блока выделения синхросигнала точного времени;
- схемы согласования с каналом (портом) ввода-вывода сервера времени;
- источника стабилизированного электропитания.

Схема устройства ВСТВ без автономного источника электропитания приведена на рис. 2.

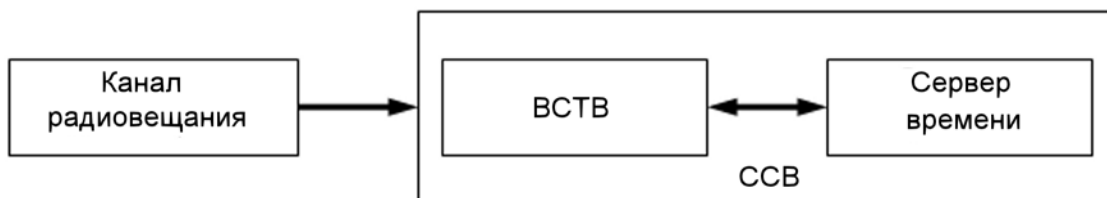


Рис. 1. Структура взаимодействующих компонентов

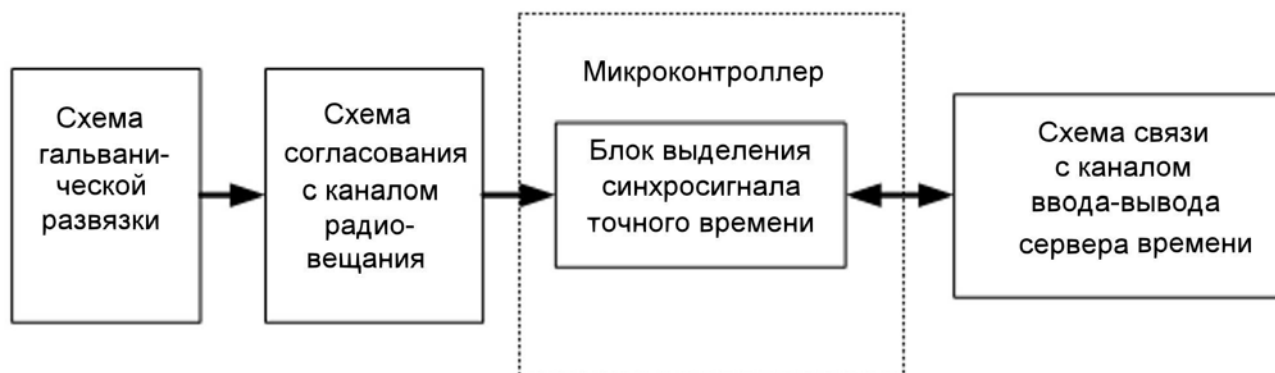


Рис. 2. Схема устройства ВСТВ

Структура программных средств

Программные средства ССВ состоят из программы дешифрации радиосигнала точного времени микроконтроллером устройства ВСТВ и программ синхронизации системных часов сервера времени, реализованных для операционных систем Windows и Linux.

В соответствии с принципами работы ССВ разработана управляющая программа устройства ВСТВ.

Основное время устройство ВСТВ находится в режиме ожидания команды активации в соответствии с логикой работы программы сервера времени.

После получения устройством команды активации в виде последовательности байтов от управляющей программы сервера времени происходит ее распознавание. Если команда корректна, микроконтроллер отправляет подтверждение о том, что им принята команда активации, и переводит устройство ВСТВ в режим детектирования и подсчета длительности и количества импульсов радиосигнала.

Как только блок ВСТВ определит стандартную последовательность сигналов точного времени, отправляется команда, состоящая из определенного набора байтов, серверу времени для корректировки системных часов. Получив ответную команду, микроконтроллер отправляет подтверждение о завершении процесса дешифрации радиосигнала и снова переводит устройство в режим ожидания.

Если стандартная последовательность сигналов точного времени все же не была выделена, то микроконтроллер по истечении времени, отведенного для дешифрации радиосигнала, переводит устройство в первоначальный режим ожидания сигнала активации.

На рис. 3 представлена упрощенная блок-схема алгоритма работы управляющей программы устройства ВСТВ.

В соответствии с принципами функционирования программных средств ВСТВ разработаны управляющие программы сервера времени для операционных систем Windows и Linux.

Управляющая программа сервера времени начинает свою работу с инициализации устройства ВСТВ соответствующей командой, состоящей из последовательности байтов. После этого в течение 10 минут она ожидает сигнал (команду) от устройства для синхронизации системного времени сервера. Интервал в 10 минут обусловлен погрешностью хода системных часов; он предусматривает начало ожидания сигнала для корректировки времени за 5 минут до предполагаемого момента корректировки и завершение ожидания сигнала через 5 минут после предполагаемого момента корректировки.

Если сигнал поступил, производится корректировка системных часов. В противном случае управляющая программа переходит в спящий режим до следующего сеанса связи с блоком ВСТВ, предварительно переведя его в режим ожидания.

Программы написаны на языке C/C++.

На рис. 4 представлена упрощенная блок-схема алгоритма работы управляющей программы сервера времени.

Заключение

Система успешно применяется в изолированных сетях РФЯЦ-ВНИИЭФ. Сопровождение точного времени на персональных компьютерах и других субъектах ЛВС осуществляется стандартными службами операционных систем. Точное время принимается или от контроллера до-



Рис. 3. Блок-схема алгоритма работы управляющей программы ВСТВ

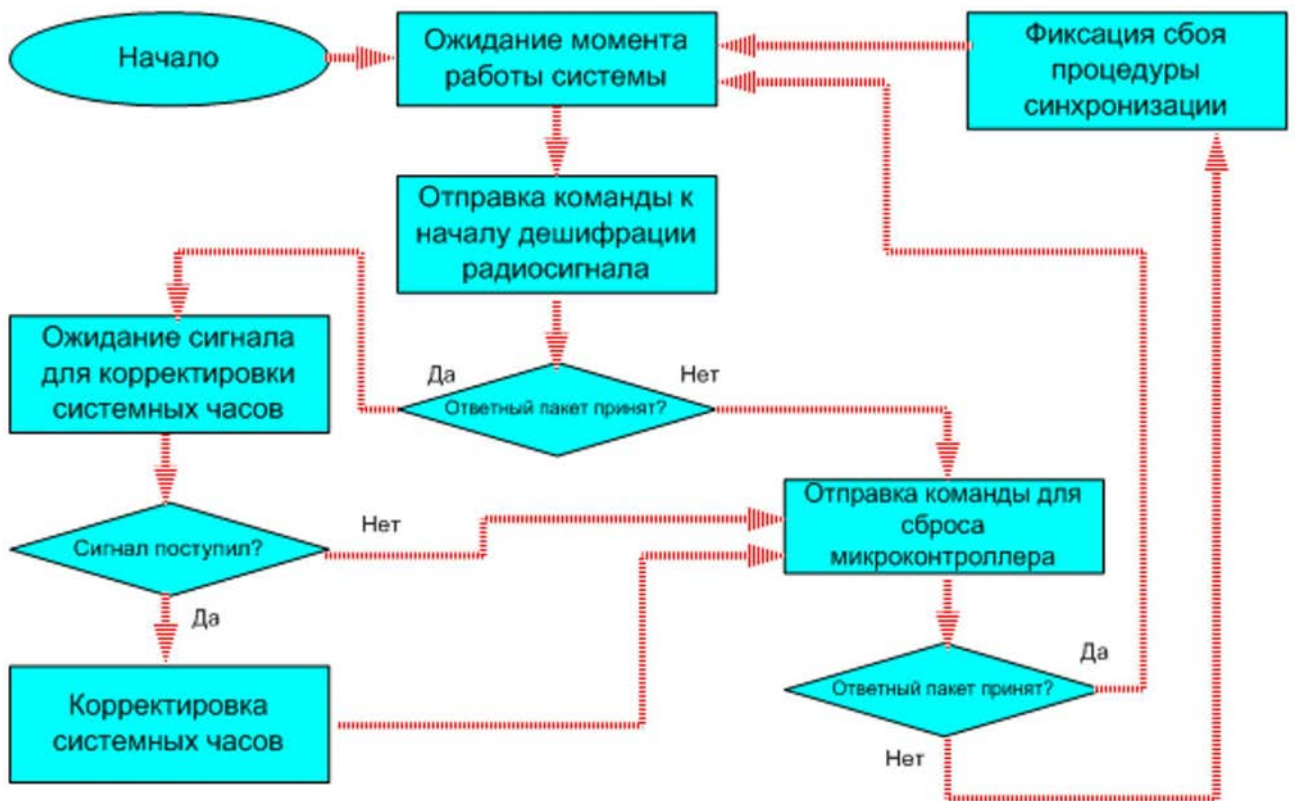


Рис. 4. Блок-схема алгоритма работы управляющей программы для сервера времени

мена, или непосредственно от сервера времени, коррекция системных часов которого осуществляется от устройства ВСТВ.

В настоящее время изготовлены серийные образцы аппаратных компонентов ССВ. Устройство имеет малые габариты и удобно в применении. В процессе эксплуатации устройство показало надежную и стабильную работу.

На систему была подана заявка на изобретение № 2007143820 от 26.11.2007, получившая положительное решение от 31.10.2008. Зарегистрирован патент № 2356080. Информация о патенте опубликована в Бюллетене изобретений № 14 от 20.05.2009.

Список литературы

1. Система единого времени метрополитена СЕВ-М2000. <http://www.niiri.com.ua/Rus/SEV>.
2. Устройство синхронизации времени УСВ-1. <http://www.sicon.ru/usv-1>.

Статья поступила в редакцию 09.06.09.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Стенин А. М., Соловьева Е. А.</i> Матрица искусственных вязкостей для двумерной лагранжевой газодинамики, способствующая уменьшению "энтропийного следа" в численных расчетах	3
<i>Голубев А. И., Сысоева Т. Г.</i> Схема расщепления для численного моделирования динамики бесстолкновительной релятивистской плазмы	19
<i>Карлыханов Н. Г.</i> Применение метода квазидиффузии для решения задач переноса излучения	32
<i>Грошев Е. В.</i> О применении метода Райбики к процессу решения системы уравнений переноса излучения итерациями по граничным условиям	39
<i>Модестов Д. Г.</i> Весовой множитель и методы отбора. Моделирование когерентного рассеяния фотонов	48
<i>Модестов Д. Г.</i> Вычисление функции плотности распределения нейтронов при упругом рассеянии	55
<i>Черенков П. В., Борисенко О. Н., Черенкова М. В., Тарасов В. И., Олесницкая К. К., Баканова Т. Ю., Кузнецов М. Г., Шутов Д. А., Сергеева А. С.</i> Подготовка начальных данных двумерных задач по программам SolidEditor и 2D-РНД	59
<i>Понятский В. М.</i> Восстановление параметров движения источника излучения по последовательности телевизионных изображений с использованием квазиоптимальной фильтрации	68
<i>Чухонцев А. П., Первов В. А., Давыдов А. Н., Осипов М. Ю.</i> Программно-аппаратная система синхронизации времени в изолированных локальных сетях	82

CONTENTS

<i>Stenin A. M., Solovieva E. A.</i> Artificial viscosity array for 2D Lagrangian gas dynamics to reduce the "entropy trace" in numerical simulations	3
<i>Golubev A. I., Sysoeva T. G.</i> Splitting scheme for numerical simulation of collisionless relativistic plasma dynamics	19
<i>Karlykhanov N. G.</i> Quasi-diffusion method application for radiation transfer problems	32
<i>Groshev E. V.</i> About the application of Raibiki method to the solution of the system of radiation transfer equations using boundary condition iterations	39
<i>Modestov D. G.</i> Weighting factor and selection methods. Simulation of coherent scattering of photons	48
<i>Modestov D. G.</i> Computation of neutron distribution density at elastic scattering	55
<i>Cherenkov P. V., Borisenko O. N., Cherenkova M. V., Tarasov V. I., Olesnitskaya K. K., Bakanova T. Yu., Kuznetsov M. G., Shutov D. A., Sergeeva A. S.</i> Initial data processing of 2D SolidEditor and 2D-IDC problems	59
<i>Ponyatskii V. M.</i> Radiation source motion recovery according to the sequence of television images using quasioptimal filtration	68
<i>Chukhontsev A. P., Pervov V. A., Davydov A. N., Osipov M. Yu.</i> Software-hardware system of time synchronization in isolated local networks	82

Ответственный за выпуск Е. В. Соколовская

Редакторы Л. В. Мазан,
Е. Н. Старченко

Корректоры В. В. Барышникова,
Е. А. Окальева

Подписано в печать .12.09

Офсетн. печ. Усл. печ. л. ~ 11

Тираж 1000 экз. Зак. тип. 9 статей

Формат 60×84/8

Уч.-изд. л. ~ 14

Индекс 3642

Оригинал-макет подготовлен в Математическом отделении
Всероссийского научно-исследовательского института
экспериментальной физики

Отпечатано в ИПК ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"
607188 г. Саров Нижегородской обл.

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

Редакция н/т сборника "Вопросы атомной науки и техники" серии "Математическое моделирование физических процессов" просит авторов, направляющих статьи в журнал, придерживаться следующих правил.

1. Автор представляет редакции 2 экземпляра рукописи основного текста статьи на русском языке, а также аннотацию и реферат с обязательным указанием ключевых слов. Текст набирается на компьютере (шрифт не менее 12 пунктов) на одной стороне листа формата А4 через два интервала. Рекомендуемый объем статьи — не более 25 страниц указанного формата, включая рисунки. Все страницы должны быть пронумерованы. Рукопись должна быть подписана всеми авторами.

Редакции также передается (по электронной почте) соответствующий текстовый файл в формате WinWord или LATEX (с использованием стандартного стиля article).

2. Статью обязательно должны сопровождать следующие документы:

- 1) направление от организации, в которой выполнена работа, с указанием информации о первичном или повторном опубликовании материала статьи (отдельных ее страниц);
- 2) разрешение на опубликование от организации, в которой выполнена работа;
- 3) сведения об авторе (авторах): полные фамилия, имя, отчество; паспортные данные, адрес места жительства; место работы, табельный номер, должность, ученая степень и ученое звание; контактные адреса и телефоны, e-mail;
- 4) соглашение, подписанное авторами, об их долевом участии в создании статьи (если авторов несколько).

Название статьи и список авторов, указанные в документах, должны полностью соответствовать указанным в представленной рукописи.

3. Название статьи должно быть конкретным и лаконичным. Перед названием статьи необходимо указать УДК. Разделы и подразделы текста должны иметь заголовки.

4. Необходимо соблюдать единство терминологии, закрепленное соответствующими стандартами по теме статьи.

5. Для нумерации формул, на которые имеются ссылки в тексте, используются последовательные натуральные числа. Формулы, на которые нет ссылок, не нумеруются.

6. Все обозначения должны расшифровываться. Не рекомендуется использовать одинаковые обозначения для разных величин и разные обозначения для одной и той же величины.

Необходимо делать пометки для различия букв с одинаковым или сходным начертанием (например, a и α ("альфа"), v и ν ("ню")). Строчные (малые) буквы следует помечать двумя черточками сверху (например, \bar{c} , \bar{k} , \bar{z} , \bar{d}), а прописные (большие) — двумя черточками снизу (например, \underline{C} , \underline{K} , \underline{Z} , \underline{Q}). Для отличия цифры 0 от буквы O цифру следует перечеркивать косой чертой. Должны различаться по написанию единица, штрих и запятая в индексах, а также буквы e и l , I и J . Необходимо выделять (жирным шрифтом или стрелкой) векторные величины.

7. Рисунки должны быть четкими и обязательно иметь подрисуночные подписи. Рисунки также необходимо представить в виде графических файлов (предпочтительны форматы .tif и .bmp). Текстовые надписи на самих рисунках не рекомендуются, их заменяют цифровыми обозначениями, которые объясняются в тексте или подрисуночной подписи.

Таблицы должны иметь заголовки.

На все таблицы и рисунки в тексте статьи должны быть ссылки.

8. Список литературы должен быть составлен по порядку ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

В библиографическое описание источника обязательно включаются фамилии и инициалы авторов, название книги или статьи. Для книг указывается город, издательство и год издания, для статей — название журнала, год издания, том, выпуск (номер), страницы начала и конца статьи. Описания иностранных источников должны быть напечатаны латинским шрифтом. Если источник размещен в Интернете, указывается адрес сайта.

9. Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, отделение 08.

В редакцию журнала ВАНТ, сер. "Математическое моделирование физических процессов".

Тел. (83130)2-84-06; e-mail: sokol@vniief.ru