

УДК 517.958:536.2

ПРИМЕНЕНИЕ TVD-ПОДХОДА К DS_n -МЕТОДУ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ RZ -ГЕОМЕТРИИ

А. Д. Гаджиев, В. В. Завьялов, А. А. Шестаков

(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается реализация неявной нелинейной схемы типа TVD повышенного порядка аппроксимации для решения уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ -геометрии. Ранее данная схема была апробирована в плоском и сферически-симметричном случаях. Приводятся результаты численных расчетов тестовых задач.

Ключевые слова: перенос излучения, разностная схема, метод дискретных ординат, TVD-подход.

Введение

Для численного моделирования задач переноса теплового излучения разработка монотонных схем второго порядка аппроксимации является актуальной проблемой. Широко используемый для решения уравнения переноса метод дискретных ординат (DS_n -метод) [1] приводит к решению системы гиперболических уравнений. В то же время известно, что для гиперболических уравнений в классе линейных схем нет монотонной схемы с порядком аппроксимации выше первого. На практике, чтобы совместить в определенной степени монотонность и второй порядок аппроксимации, используются различные монотонизаторы [1]. В разработанной в РФЯЦ-ВНИИТФ DDAD-схеме [2] вводится искусственная диссипация. Хотя построенную подобным образом схему нельзя считать монотонной, она оказалась весьма эффективной для моделирования широкого класса задач.

Одним из путей решения рассматриваемой проблемы является переход к нелинейным TVD-схемам (Total Variation Diminishing) (см., например, [3]). В работе [4] в рамках DS_n -метода построена неявная нелинейная схема типа TVD для нестационарного одномерного уравнения переноса теплового излучения, которая демонстрирует монотонность, а по точности близка ко второму порядку. Построенная указанным способом схема типа TVD обладает следующими свойствами:

1. Неявность, безусловная устойчивость.
2. Монотонность в смысле принадлежности к классу TVD-схем.
3. Первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок аппроксимации по пространству, кроме отдельных точек с экстремумами.
4. Консервативность в смысле выполнения разностного аналога интегрального закона сохранения в каждой ячейке.
5. Аппроксимация, как и в DS_n -методе, в рамках одной ячейки, если говорить о величинах с верхнего временного слоя. Данное свойство позволяет применять экономичный метод бегущего счета для решения системы разностных уравнений.

В данной работе схема из [4] обобщена на случай двумерной цилиндрически-симметричной геометрии с сохранением вышеперечисленных достоинств. Дополнительно в Приложении рассматривается вопрос о порядке аппроксимации схемы.

Постановка задачи

Система уравнений, описывающая распространение излучения, состоит из спектрального уравнения переноса в кинетической постановке, описывающего перенос, поглощение и рассеяние теплового излучения, и уравнения энергии, характеризующего изменение температуры вещества за счет поглощения и испускания фотонов. Данная система в осесимметричном спектральном случае для изотропного рассеяния выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{I_\nu}{\rho} \right) + \vec{\Omega} \nabla I_\nu + \alpha_\nu I_\nu &= \kappa_\nu B_\nu + \frac{k_\nu}{2\pi} U_\nu; \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} &= \int_0^\infty \int_{\vec{\Omega}} \kappa_\nu (I_\nu - B_\nu) d\vec{\Omega} d\nu. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\rho(\vec{r}, t)$ — плотность вещества; $\vec{r} = (r, z)$ — радиус-вектор; t — время; $I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, \nu, t)$ — спектральная интенсивность излучения; ν — энергия фотонов; $\vec{\Omega} = (\mu = \cos \theta, \xi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \phi, \eta = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \phi)$ — единичный вектор в направлении полета фотона; θ — угол между $\vec{\Omega}$ и осью Z ; ϕ — угол между \vec{r} и проекцией $\vec{\Omega}$ на плоскость, перпендикулярную оси R ; $\vec{\Omega} \nabla I_\nu = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi I_\nu) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \mu I_\nu) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\eta I_\nu)$ — оператор переноса; $B_\nu(T, \nu)$ — интенсивность равновесного излучения (функция Планка); $T(\vec{r}, t)$ — температура среды; $U_\nu = \int_{\vec{\Omega}} I_\nu d\vec{\Omega}$ — спектральная плотность энергии излучения, умноженная на скорость света c ; $\kappa_\nu(T, \nu)$ — коэффициент поглощения; $k_\nu(T, \nu)$ — коэффициент рассеяния; $\alpha_\nu(T, \nu) = \kappa_\nu + k_\nu$ — коэффициент ослабления; $E(T)$ — удельная внутренняя энергия вещества.

Для системы уравнений переноса (1) в некоторой области G , ограниченной замкнутой поверхностью \bar{G} , решается краевая задача со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, \nu, t = 0) &= I_\nu^0(\vec{r}, \vec{\Omega}, \nu); \\ I_\nu(\vec{r} \in \bar{G}, \vec{\Omega} \vec{n} < 0, \nu, t) &= I_\nu(\vec{r} \in \bar{G}, \vec{\Omega}, \nu, t); \\ T(\vec{r}, t = 0) &= T^0(\vec{r}), \end{aligned} \quad (2)$$

где \vec{n} — внешняя нормаль к \bar{G} . В силу осевой симметрии справедливо условие

$$I_\nu(r = 0, z, \mu, \phi, \nu, t) = I_\nu(r = 0, z, \mu, 2\pi - \phi, \nu, t), \quad \vec{\Omega} \vec{n} = \xi, \quad (3)$$

поэтому рассматривается только область значений $-1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi$.

Разностная аппроксимация

При разностной аппроксимации используется левая система координат. В качестве оси абсцисс используется ось Z , в качестве оси ординат — ось R . Для системы уравнений переноса (1) решается краевая задача с соответствующими начальными и граничными условиями (2), (3) в области

$$(t^0, t^{\hat{n}}) \times (-\infty < z < \infty, r \geq 0) \times (-1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi).$$

Для получения конечно-разностной схемы интегрирование уравнений производится по ячейке $G_{i+1/2,j+1/2}$ сетки ($i = 0, \dots, \hat{i} - 1, j = 0, \dots, \hat{j} - 1$) (рис. 1). Как правило, дробные индексы будем опускать. Объем и площадь ячейки равны

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{1}{6} (r_1 + r_2 + r_3) \left[r_1 (z_3 - z_2) + r_2 (z_1 - z_3) + r_3 (z_2 - z_1) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{6} (r_1 + r_3 + r_4) \left[r_1 (z_4 - z_3) + r_3 (z_1 - z_4) + r_4 (z_3 - z_1) \right]; \\ \Delta S &= 0,5 [(r_1 - r_3) (z_2 - z_4) + (r_2 - r_4) (z_3 - z_1)]. \end{aligned}$$

Введем следующие разности: $\Delta f_{i \rightleftharpoons j} = f_{i,j+1 \rightleftharpoons i+1,j} - f_{ij}$; $\Delta_* f = f_{*+1} - f_*$ ($*$ — некоторый индекс) и зададим векторы нормалей к ребрам ячеек разностной сетки, направленные в сторону возрастания индексов:

$$\begin{aligned} \vec{n}_i &= \left(\frac{\Delta z_i}{\sqrt{\Delta r_i^2 + \Delta z_i^2}}, -\frac{\Delta r_i}{\sqrt{\Delta r_i^2 + \Delta z_i^2}} \right); \quad \vec{n}_j = \left(-\frac{\Delta z_j}{\sqrt{\Delta r_j^2 + \Delta z_j^2}}, \frac{\Delta r_j}{\sqrt{\Delta r_j^2 + \Delta z_j^2}} \right); \\ \Delta s_i &= \sqrt{\Delta r_i^2 + \Delta z_i^2}; \quad \Delta s_j = \sqrt{\Delta r_j^2 + \Delta z_j^2}; \quad \vec{\varphi}_i = \vec{n}_i \Delta s_i; \quad \vec{\varphi}_j = \vec{n}_j \Delta s_j. \end{aligned}$$

Производя интегрирование (1) в пространстве $(t^n, t^{n+1}) \times G_{i+1/2,j+1/2} \times (\phi_{l+1}, \phi_l) \times (\mu_{m+1}, \mu_m)$ и используя формулу Гаусса—Остроградского, получим

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{n+1}}{c\tau} \left[\left(\frac{I_g}{\rho} \right)^{n+1} - \left(\frac{I_g}{\rho} \right)^n \right] + \vec{\Omega} \nabla_h I_g^{n+1} + \alpha_g^{n+1} I_g^{n+1} &= Q_g^{n+1}; \\ \rho^{n+1} \frac{E^{n+1} - E^n}{\tau} &= \sum_g w_g \kappa_g^{n+1} (U_g^{n+1} - 2\pi B_g^{n+1}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$; $Q_g^{n+1} = \kappa_g^{n+1} B_g^{n+1} + \frac{k}{2\pi} U_g^{n+1}$; w_g — весовой коэффициент. Оператор переноса в разностном виде:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \nabla_h I_g &= \frac{\Delta_i (\varpi I_g) + \Delta_j (\varpi I_g)}{\Delta V} - \frac{\Delta S}{\Delta V} \frac{\Delta_l (\eta I_g)}{\Delta_l \phi}, \\ \varpi_i &= \left(\vec{\Omega} \vec{n} \Delta s r \right)_i = \xi \Delta z_i - \mu \Delta r_i = \xi (z_{i,j+1} - z_{ij}) - \mu (r_{i,j+1} - r_{ij}), \\ \varpi_j &= \left(\vec{\Omega} \vec{n} \Delta s r \right)_j = -\xi \Delta z_j + \mu \Delta r_j = -\xi (z_{i+1,j} - z_{ij}) + \mu (r_{i+1,j} - r_{ij}). \end{aligned}$$

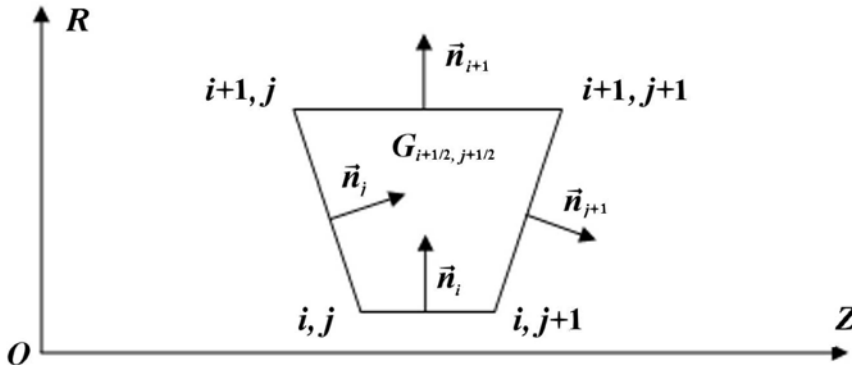


Рис. 1. Ячейка пространственной разностной сетки

Тогда уравнение переноса (4) можно записать в виде

$$\varpi_{i+1} I_{i+1,g}^{n+1} - \varpi_i I_{ig}^{n+1} + \varpi_{j+1} I_{j+1,g}^{n+1} - \varpi_j I_{jg}^{n+1} - \Delta S \frac{\eta_{l+1} I_{l+1,g}^{n+1} - \eta_l I_{lg}^{n+1}}{\Delta_l \phi} + \widehat{a}_g^{n+1} I_g^{n+1} = \widehat{Q}_g^{n+1}, \quad (5)$$

где $\widehat{a}_g^{n+1} = \left(\frac{\rho^{n+1}}{c\tau} + a_g^{n+1} \right) \Delta V$; $\widehat{Q}_g^{n+1} = \left[\frac{\rho^{n+1}}{c\tau} \left(\frac{I_g}{\rho} \right)^n + Q_g^{n+1} \right] \Delta V$.

Систему (4) нужно дополнить краевыми условиями и соотношениями связи значений I_g в центрах и на гранях ячеек. Для выпуклой ячейки при фиксированном $\vec{\Omega}$ существуют конфигурации трех типов (рис. 2).

Для широко используемой WDD-схемы соотношения связи задаются следующим образом:

$$I^+ = (1 + p) I - p I^-,$$

где I — интенсивность в центре ячейки; I^+ , I^- — значения на неосвещенных и освещенных гранях соответственно; $p \in [0, 1]$ — вес. Шаговая St-схема ($p = 0$) имеет первый порядок точности, алмазная DD-схема ($p = 1$) имеет второй порядок точности, но она немонотонна и неположительна. На произвольных четырехугольных сетках возникают ячейки с одной освещенной и тремя неосвещенными сторонами, для которых приходится применять соотношения St-схемы, имеющие первый порядок точности. Кроме того, на St-схему делается переход в тех ячейках, где DD-схема дает отрицательное решение. Тем не менее данная DD/St-коррекция также неудовлетворительна, поскольку осцилляции в положительной области решения остаются.

Для повышения порядка аппроксимации обобщим нелинейную TVD-подобную схему, рассмотренную в [4], на двумерную систему (4). С этой целью в соответствии с TVD-методологией в качестве производных по всем направлениям берутся некоторые ограничители L , которые обычно используют односторонние производные. Добавление производных эквивалентно введению антидиффузии в St-схему таким образом, чтобы новая схема имела второй порядок аппроксимации и сохраняла при этом монотонность.

Пусть $L(I)$ — некоторая функция-ограничитель, тогда можно записать следующие соотношения:

$$L_*^n = L(\Delta_{*+1/2} I^n, \Delta_{*-1/2} I^n); \quad (D_*^\pm)^n = 1 \pm \frac{L_*^n}{2I_*^n}; \quad I_{* \pm 1/2}^{n+1} = D_*^\pm I_*^{n+1}.$$

Поскольку D^\pm является дробно-линейным функционалом, можно брать его с n -го шага в предположении слабого изменения на итерациях. В этом случае можно использовать экономичный алгоритм бегущего счета.

Подставляя вышеприведенные соотношения связи в уравнение (5), получаем формулу для определения интенсивности в центре ячейки:

$$I^{n+1} = \frac{C_i^{n+1} + C_j^{n+1} + C_l^{n+1} + \widehat{Q}^{n+1}}{\Phi_i^n + \Phi_j^n + \Phi_l^n + \widehat{a}^{n+1}},$$

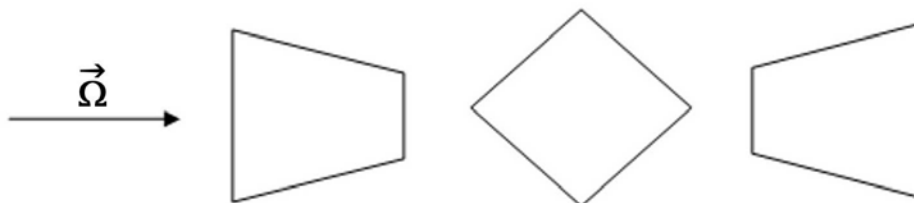


Рис. 2. Варианты освещенности ячеек

где

$$C_i = -\varpi_{i+1}I_{i+1}; \quad \Phi_i = -\varpi_i D_{i+1/2}^- \quad \text{при } \varpi_i \leq 0; \quad \varpi_{i+1} < 0;$$

$$C_i = 0; \quad \Phi_i = \varpi_{i+1}D_{i+1/2}^+ - \varpi_i D_{i+1/2}^- \quad \text{при } \varpi_i \leq 0; \quad \varpi_{i+1} \geq 0;$$

$$C_i = \varpi_i I_i; \quad \Phi_i = \varpi_{i+1}D_{i+1/2}^+ \quad \text{при } \varpi_i > 0; \quad \varpi_{i+1} \geq 0;$$

$$C_i = \varpi_i I_i - \varpi_{i+1}I_{i+1}; \quad \Phi_i = 0 \quad \text{при } \varpi_i > 0; \quad \varpi_{i+1} < 0;$$

$$C_l = -\Delta S \frac{\eta_l I_l}{\Delta_l \phi}; \quad \Phi_l = -\Delta S \frac{\eta_{l+1} D_{l+1/2}^+}{\Delta_l \phi};$$

C_j, Φ_j вычисляются аналогично C_i, Φ_i .

Для вычисления разностей, используемых в ограничителе, можно использовать более точное выражение для оператора $\nabla_h I$ на гранях разностной ячейки через расширение шаблона конечно-

разностной схемы с привлечением значений интенсивности в окружающих ячейках (рис. 3). Положим градиент на ребре $\beta_1\beta_2$ равным полусумме градиентов в узлах β_1, β_2 . Тогда разность интенсивностей в центре и на грани можно представить в виде

$$I - I_{\beta_1\beta_2} = (\nabla_h I)_{\beta_1\beta_2} (\vec{r}_{\beta_3\beta_4} - \vec{r}_{\beta_1\beta_2});$$

$$(\nabla_h I)_{\beta_2} = \frac{4}{\sum_{\gamma} \Delta S_{\alpha\gamma}} \sum_{\gamma} (\vec{n} \Delta s)_{\beta_2} (\Delta_{\alpha\gamma} I),$$

$$\alpha_5 = \alpha_1.$$

Хотя аппроксимация разностей на расширенном шаблоне может быть более точной, она требует дополнительных вычислительных затрат.

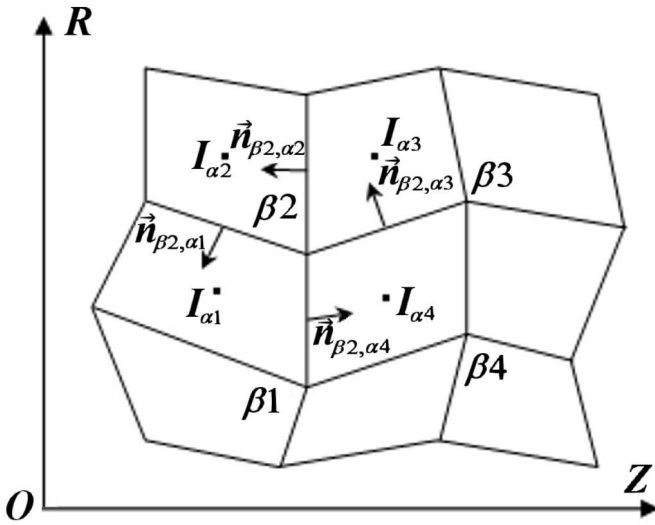


Рис. 3. Аппроксимация $\nabla_h I$ на расширенном шаблоне

Численные результаты

Рассмотрим две задачи в нерассеивающей среде ($k_g = 0$): вторую задачу Флека и тест с аналитическим решением. В схеме TVD использовался ограничитель Чакравати—Ошера [5]

$$L(a, b) = 0,5(1 - \delta) \min \text{mod}(a, \beta b) + 0,5(1 + \delta) \min \text{mod}(\beta a, b),$$

$$\min \text{mod}(a, b) = 0,5(\text{sign}(a) + \text{sign}(b)) \min(|a|, |b|)$$

с параметрами $\delta = 1/3, \beta = 3$. Сходимость определялась условием $|T^{\nu+1} - T^{\nu}| \leq 10^{-5} (1 + T^{\nu+1})$; $T^0 = 0,01$. Временной шаг выбирался так, что $c\tau = 0,03$; использовалась квадратура ES_{12} .

Задача 1. Рассматривается вторая задача Флека в сферически-симметричной геометрии [6]. На левой границе задано излучение планковского источника температуры $B_{\nu}(T = 1)$, на правой — условие *свободной поверхности*. В областях 1, 3 ($1 \leq r \leq 3; 3,4 \leq r \leq 5$) коэффициент поглощения равен $\kappa_{\nu} = 27(1 - e^{-\nu/T})/\nu^3$, в области 2 ($3 \leq r \leq 3,4$) $\kappa_{\nu} = 10000(1 - e^{-\nu/T})/\nu^3$, и всюду $E = 0,81T$.

Сетка по радиусу: $r_1 = 1; 1,004; 1,04; r_4 = 1,1; \dots; r_{22} = 2,9 (\Delta r = 0,1); r_{23} = 2,987; 2,999; 3; 3,001; 3,004; 3,013; r_{29} = 3,04; \dots; r_{37} = 3,36 (\Delta r = 0,04); r_{38} = 3,396; 3,4; 3,404; 3,44; r_{42} = 3,5; \dots; r_{57} = 5 (\Delta r = 0,1)$. В двумерной геометрии во втором направлении взято 59 каналов. Сетка по энергии: $\nu_{0.. \hat{g}=15} = 0; 0,3; 0,6; 0,8; 1,2; 1,5; 1,8; 2,4; 2,7; 3; 4; 5; 7; 9; 11; 15$.

На рис. 4 приведены профили температуры вещества на четыре момента времени ($ct = 18; 30; 150; 360$) для TVD-схемы. В качестве *точного* решения брались результаты на сильно измельченной сетке. Из рисунка видно, что результаты для различных геометрий практически совпадают. Схемы TVD с расширенным шаблоном для ограничителя и без него дали практически одинаковые результаты.

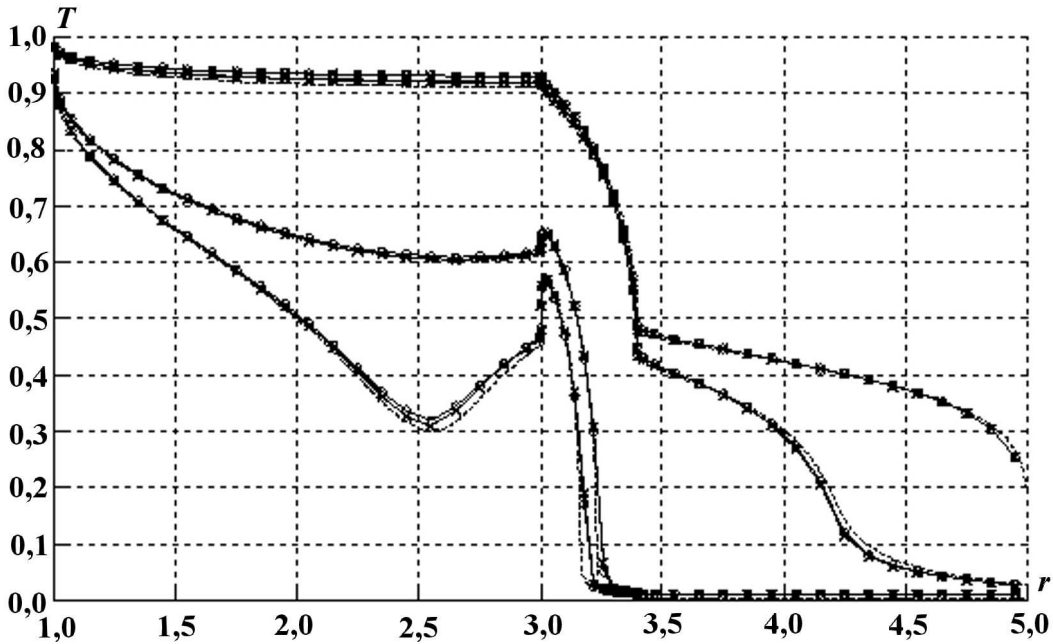


Рис. 4. Температура вещества $T(\vec{r}, t)$: - - - точное решение; \circ — RZ-геометрия; \times — сферически-симметричная геометрия

Задача 2. Задача построена на основе [7]. Выбранное точное решение в моноэнергетическом случае имеет вид тепловой волны, линейно распространяющейся вдоль оси Z :

$$T(\vec{r}, t) = \begin{cases} \xi, & T > T^0; \\ T^0, & T \leq T^0; \end{cases} \quad I(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \begin{cases} Bf, & I > B^0; \\ B^0, & I \leq B^0; \end{cases}$$

$$\xi(\vec{r}, t) = \beta_0 z + \nu_0 t; \quad E(T) = \frac{4\pi\kappa_0(F-1)}{\nu_0} B; \quad \kappa(T) = \frac{4\kappa_0}{T};$$

$$\gamma = \frac{\beta_0}{\kappa_0 + \nu_0 c^{-1}}; \quad \delta = \frac{\kappa_0}{\beta_0}; \quad f(\vec{\Omega}) = \frac{\delta\gamma}{(1 + \gamma\mu)}; \quad F = \delta \operatorname{arth} \gamma.$$

Использовались следующие параметры: $\beta_0 = 0,1; \nu_0 = 0,01; \kappa_0 = 500; c = 3000$. Задача решалась в прямоугольной области ($10 \leq r \leq 15, 1 \leq z \leq 11$).

Результаты расчетов, проведенных с параметрами $\hat{i} = 30, \hat{j} = 15$ на двух типах неортогональных сеток, приводятся на рис. 5, 6 (см. также цветную вкладку) на момент $ct = 12$. Из рис. 5 видно, что, за исключением St-схемы, результаты по всем остальным схемам практически совпали с точным решением. На *комбинированной* сетке (см. рис. 6) лучше всех ведет себя DDAD-схема; схемы типа TVD показывают значительно лучший результат по сравнению с St-схемой, причем применение расширенного шаблона для ограничителя, вообще говоря, может повышать точность.

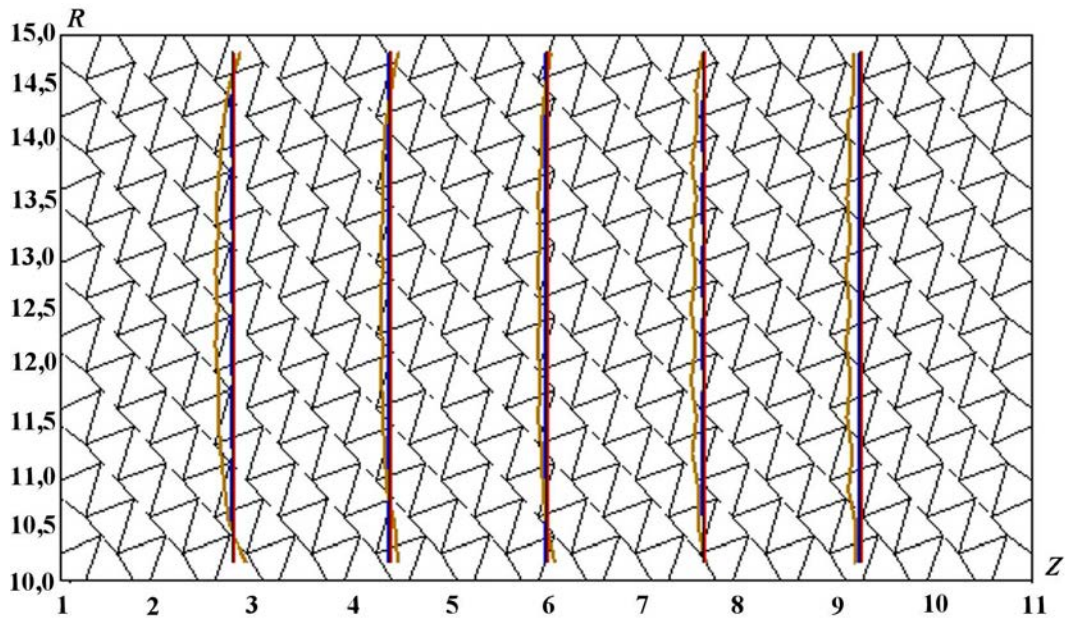


Рис. 5. Изолинии $T(\vec{r}, t)$ на сетке типа *рабица*, $ct = 12$

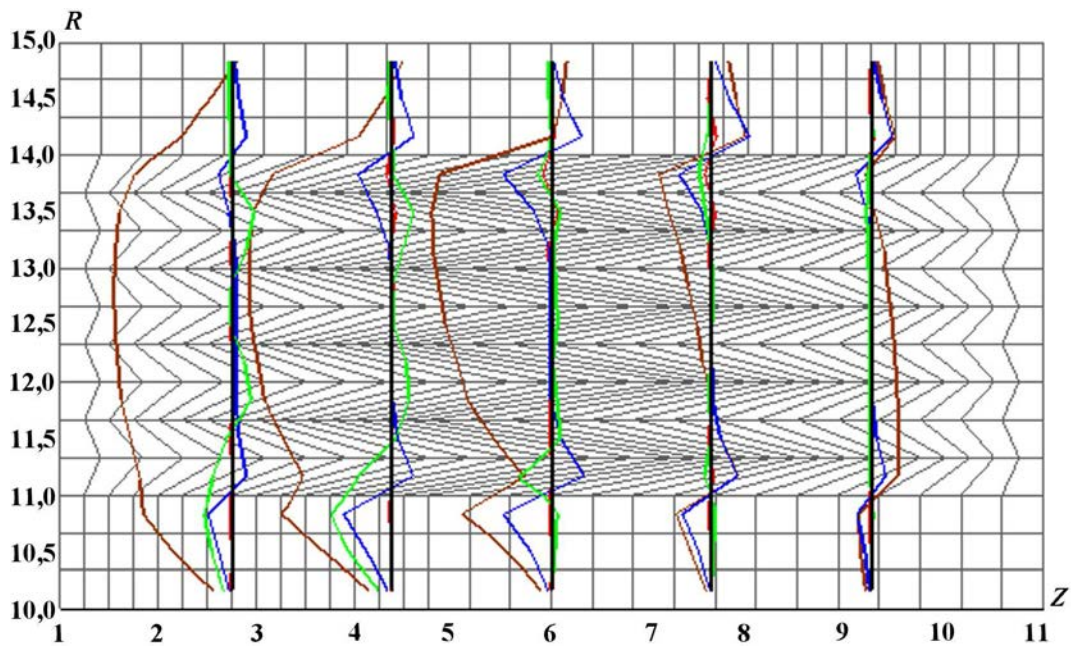


Рис. 6. Изолинии $T(\vec{r}, t)$ на *комбинированной* сетке, $ct = 12$

Заключение

В данной работе реализована неявная схема типа TVD для решения уравнения переноса теплового излучения в двумерной RZ -геометрии на произвольных четырехугольных сетках. В схеме используется ограничитель, который вычисляется явно по известным величинам с предыдущего временного шага на трехточечном шаблоне в каждом направлении. Эта схема сочетает в себе консервативность, монотонность в смысле методологии TVD-схем и второй порядок аппроксимации по пространству, кроме отдельных точек с экстремумами.

Кроме того, предложенная схема TVD обладает следующими достоинствами:

1. Простота реализации — повышение точности достигается при незначительном усложнении алгоритма St-схемы.
2. Сопоставимое с St-схемой число итераций за счет монотонности численного решения и отсутствия переключений.
3. Поскольку TVD-реконструкция производится для неосвещенных сторон в ячейке, то это позволяет дополнительно увеличить точность в ячейках, где освещена только одна сторона.

На основании численных расчетов, приведенных в данной статье, можно сделать вывод, что использование схемы типа TVD дает монотонное решение и порядок аппроксимации заметно выше первого.

Приложение

Рассмотрим порядок аппроксимации предложенной TVD-схемы для линейного уравнения переноса $\frac{\partial I}{\partial t} + c\mu \frac{\partial I}{\partial x} = 0$, которое получается из системы (1) в вакууме в плоской геометрии. Пусть для упрощения $c\mu = 1$, тогда

$$\frac{I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i+1/2}^n}{\tau} + \frac{I_{i+1}^{n+1} - I_i^{n+1}}{h} = 0.$$

Разложим I в ряд Тейлора в точке $(i + 1/2, n + 1)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i+1/2}^n}{\tau} &= \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial t} - \left(\frac{\tau}{2!} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial t^2} - \frac{\tau^2}{3!} \frac{\partial^3 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial t^3} + \frac{\tau^3}{4!} \frac{\partial^4 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial t^4} + O(\tau^4) \right); \\ \frac{I_{i+1}^{n+1} - I_i^{n+1}}{h} &= \frac{1}{h} \left(I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i-1/2}^{n+1} + \frac{L_{i+1/2}^{n+1} - L_{i-1/2}^{n+1}}{2} \right) = \\ &= \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} - \left(\frac{h}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^3} + O(h^3) \right) + \frac{L_{i+1/2}^{n+1} - L_{i-1/2}^{n+1}}{2h} = \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} + \tilde{I}. \end{aligned}$$

Возьмем для простоты простейший TVD-ограничитель $L = \min \text{mod}$, в этом случае возможны следующие варианты:

$$\begin{aligned} L_{i+1/2}^{n+1} &= \begin{cases} I_{i+3/2}^{n+1} - I_{i+1/2}^{n+1} = h \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^3} + O(h^4); \\ I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i-1/2}^{n+1} = h \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^3} + O(h^4); \\ 0; \end{cases} \\ L_{i-1/2}^{n+1} &= \begin{cases} I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i-1/2}^{n+1} = h \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^3} + O(h^4); \\ I_{i-1/2}^{n+1} - I_{i-3/2}^{n+1} = h \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} - \frac{3h^2}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{7h^3}{6} \frac{\partial^3 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^3} + O(h^4); \\ 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть $L_{i+1/2}^{n+1} = 0$ (аналогично рассматривается случай $L_{i-1/2}^{n+1} = 0$), тогда $\text{sign} \left(I_{i+3/2}^{n+1} - I_{i+1/2}^{n+1} \right) \neq \neq \text{sign} \left(I_{i+1/2}^{n+1} - I_{i-1/2}^{n+1} \right)$ и, пренебрегая членами $O(h^3)$, получаем $\left| \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} \right| < \left| \frac{h}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} \right|$ и

$\tilde{I} < \left| \frac{h}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} \right| + O(h^2)$. Заметим, что при линейном решении производные выше первой равны нулю и даже при $L_{i+1/2}^{n+1} = 0$, $L_{i-1/2}^{n+1} = 0$, $L_{i+1/2} = L_{i-1/2}$ имеем точную аппроксимацию $\frac{I_{i+1}^{n+1} - I_i^{n+1}}{h} = \frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x}$. В случае строго монотонно возрастающей или строго монотонно убывающей функции получаем второй порядок аппроксимации. Далее в таблице приведены девять практически возможных ситуаций.

Порядок аппроксимации для различных случаев поведения решения

Номер ситуации	$\frac{L_{i+1/2}^{n+1} - L_{i-1/2}^{n+1}}{h}$	Остаточный член \tilde{I}	Порядок аппроксимации
1	$h \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$\frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^3} + O(h^3)$	$O(h^2)$
2	$2h \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$-\frac{h}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$O(h)$
3	$\frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$\frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{2\partial x} - \frac{h}{4} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$O(h)$
4	0	$-\frac{h}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$O(h^2)$
5	$h \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$-\frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^3} + O(h^3)$	$O(h^2)$
6	$\frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$\frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{2\partial x} - \frac{3h}{4} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$O(h)$
7	$-\frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$-\frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{2\partial x} - \frac{h}{4} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$O(h)$
8	$-\frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} + \frac{3h}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$-\frac{\partial I_{i+1/2}^{n+1}}{2\partial x} + \frac{h}{4} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$O(h)$
9	0	$-\frac{h}{2} \frac{\partial^2 I_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x^2} + O(h^2)$	$O(h^2)$

Список литературы

1. *Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А.* Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1986.
2. *Гаджиев А. Д., Селезнев В. Н., Шестаков А. А.* DS_n -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 2. С. 33–46.
3. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.

4. Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к DS_n -методу решения уравнения переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 37–48.
5. Osher S., Chakravarthy S. High resolution schemes and the entropy condition // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21(5). P. 955–984.
6. Fleck J. A., Cummings J. D. An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313–342.
7. Zavyalov V. V., Gusev V. Y., Vershinskaya A. S. Exact solutions of radiation and energy transfer equations in 3D spherically non-symmetric geometry // J. Comp. and Appl. Math. 2006. Vol. 189. P. 635–642.

Статья поступила в редакцию 24.09.09.
