УДК 517.956.4

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ ОТ СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИЛИ ОБЪЕМНОГО ИСТОЧНИКА В СРЕДЕ С НЕОДНОРОДНЫМИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Б. П. Тихомиров
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Обсуждается вопрос о сопряжении на плоской границе раздела сред с разными теплофизическими характеристиками известных автомодельных решений. Поставлена задача об объемном источнике, включающая в себя как частный случай задачу о мгновенном сосредоточенном источнике. Построено точное решение задачи с учетом плотности энергии излучения. Приводятся примеры модельных задач для тестирования методик расчета нелинейной теплопроводности в неоднородной среде без учета и с учетом функции горения.

Ключевые слова: сосредоточенный и объемный источники, тепловая волна, граница раздела сред, согласование автомодельных решений, модельные тестовые задачи.

В работах [1, 2] было получено точное решение задачи о распространении в среде с однородными теплофизическими параметрами тепловой волны от мгновенного сосредоточенного источника. В настоящей работе эта задача обобщается на случай мгновенного выделения энергии на границе раздела сред с разными теплофизическими параметрами. Рассматривается также задача об объемном источнике специального вида, включающая в себя как частный случай задачу о мгновенном сосредоточенном источнике. В нелинейное уравнение теплопроводности вводится функция горения, прямо пропорциональная энергии и обратно пропорциональная времени. Уравнение решается в полупространстве с заданным температурным режимом на границе и в неограниченном пространстве с заданным степенным законом возрастания энергии.

Рассматриваемые задачи о сосредоточенном и объемном источниках в среде с распределенными теплофизическими параметрами имеют точные решения. В общем виде их можно найти в справочнике по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса [3].

Работа состоит из трех разделов. В первом разделе приводится автомодельное решение для случая мгновенного выделения энергии на плоской границе полупространства и обсуждается вопрос о сопряжении автомодельных решений на границе раздела сред с разными теплофизическими параметрами. Во втором разделе формулируется задача об объемном источнике, описывается автомодельное решение и рассматривается вопрос о согласовании решений на плоской границе раздела сред. Строится точное решение задачи с учетом плотности энергии излучения в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрий. В последнем разделе приводятся конкретные примеры модельных задач. Эти задачи могут использоваться для тестирования численных методов решения задач нелинейной теплопроводности в неоднородной среде.

1. Мгновенное выделение энергии на границе раздела сред с разными теплофизическими параметрами

Среда с распределенной плотностью. Формулы автомодельного решения. Будем рассматривать задачу о распространении тепла путем лучистой теплопроводности в неподвижной среде. Процесс описывается уравнением

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ell c}{3}\,\frac{\partial\sigma T^4}{\partial x}\right),$$

где t — время; x — координата; E — удельная внутренняя энергия; T — температура; ρ — плотность; ℓ — длина свободного пробега фотонов; c — скорость света; σ — постоянная Стефана.

Предполагаем, что внутренняя энергия подчиняется уравнению состояния вида $E = c_V T$, где c_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме, являющаяся степенной функцией температуры $\left(c_V = c_{V_0}T^{k-1}\right)$. Плотностью энергии излучения пренебрегаем.

Будем считать, что длина пробега фотонов является степенной функцией температуры и плотности:

$$\ell = \ell_0\frac{T^\alpha}{\rho^\beta},$$

что плотность не меняется с течением времени и степенным образом зависит от пространственной координаты:

$$\rho = \rho_0\,|x|^\mu\,.$$

Тогда уравнение лучистой теплопроводности можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(b\,|x|^\mu\,T^k\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{|x|^\nu}T^n\frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{1}$$

где

$$b = \rho_0 c_{V_0};\quad a = \frac{4}{3}\,\frac{\ell_0\sigma c}{\rho_0^\beta};\quad n = 3+\alpha;\quad \nu = \mu\beta.$$

На показатель степени μ накладывается естественное ограничение $1+\mu > 0$, вытекающее из требования конечности массы в ограниченной области, содержащей точку $x = 0$. Кроме того, потребуем, чтобы выполнялись неравенства $2+\mu+\nu > 0$; $n+1-k > 0$. Далее уравнение (1) будем рассматривать в полупространстве $x > 0$.

Точное решение задачи о распространении тепла в неограниченной среде при мгновенном выделении энергии Q в точке $x = 0$ было построено в работах [1, 2] для случаев плоской ($\mu = \nu = 0$), цилиндрической ($\mu = 1$, $\nu = -1$) и сферической ($\mu = 2$, $\nu = -2$) симметрий.

Приведем формулы точного решения для произвольных показателей степеней μ, ν, удовлетворяющих указанным выше неравенствам.

По постановке задачи температура, кроме уравнения (1), удовлетворяет также условию сохранения энергии

$$\int\limits_0^\infty bx^\mu T^k dx = Q.$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \left(\frac{Q^{2+\mu+\nu}}{a^{1+\mu}b^{1+\nu}}\right)^{\frac{1}{(1+\mu)\,(n+1)+(1+\nu)\,k}};\quad B = \left[\left(\frac{a}{Q}\right)^k\left(\frac{Q}{b}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{(1+\mu)\,(n+1)+(1+\nu)\,k}};$$
$$q = \frac{-\left(1+\mu\right)}{(1+\mu)(n+1)+(1+\nu)k};\qquad \delta = \frac{k}{(1+\mu)(n+1)+(1+\nu)k}. \tag{2}$$

Решение задачи зависит от параметров a, b, Q и, очевидно, является автомодельным, так как из определяющих параметров и независимых переменных можно составить единственную безразмерную комбинацию

$$\xi = \frac{x}{Bt^{\delta}}.$$

Решение можно представить в виде

$$T\left(x,t\right) = At^{q} f\left(\xi\right), \tag{3}$$

где функция $f\left(\xi\right)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{f^{n}}{\xi^{\nu}}\,\frac{df}{d\xi}\right) + \delta\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{1+\mu} f^{k}\right) = 0$$

и условию сохранения энергии

$$\int\limits_{0}^{\xi_0} \xi^{\mu} f^{k}(\xi) d\xi = 1.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение с учетом равенства нулю температуры и потока на фронте тепловой волны, получаем

$$f\left(\xi\right) = \left\{\delta\frac{n+1-k}{2+\mu+\nu}\,\xi_0^{2+\mu+\nu}\left[1-\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{2+\mu+\nu}\right]\right\}^{\frac{1}{n+1-k}}, \quad 0 \le \xi \le \xi_0\,. \tag{4}$$

Из условия сохранения энергии можно найти постоянную интегрирования

$$\xi_0 = \left\{\left[\frac{2+\mu+\nu}{\delta\left(n+1-k\right)}\right]^{k}\left[\frac{\left(1+\mu\right)\Gamma\left(1+\dfrac{1+\mu}{2+\mu+\nu}+\dfrac{k}{n+1-k}\right)}{\Gamma\left(1+\dfrac{1+\mu}{2+\mu+\nu}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{k}{n+1-k}\right)}\right]^{n+1-k}\right\}^{\frac{1}{(1+\mu)\,(n+1)+(1+\nu)\,k}}, \tag{5}$$

где Γ — гамма-функция. Постоянная интегрирования определяет положение фронта тепловой волны

$$x_{\text{ф}} = \xi_0 B t^{\delta}.$$

Итак, решение поставленной задачи описывается соотношениями (3), (4). При $\mu = \nu = 0$ и $k = 1$ оно переходит в решение классической задачи о мгновенном плоском источнике, рассмотренной в работе [1].

Структура решения в окрестности точки $x = 0$ зависит от показателей степеней μ, ν. Нетрудно проверить, что поток тепла в точке $x = 0$ равен нулю. Производная обращается в нуль, когда $1+\mu+$ $+\nu > 0$; принимает некоторое конечное значение, отличное от нуля, если $1+\mu+\nu = 0$; обращается в бесконечность при $1+\mu+\nu < 0$.

Сопряжение решений на плоской границе раздела сред. Пусть среда в левом полупространстве имеет теплофизические параметры a_1, b_1, k_1, n_1, μ_1, ν_1, а в правом — a_2, b_2, k_2, n_2, μ_2, ν_2. Требуется определить температурное поле после мгновенного выделения энергии Q в плоскости $x = 0$.

Решение этой задачи легко построить с помощью решений двух вспомогательных задач о мгновенном плоском источнике. В первой задаче рассматривается левая половина геометрии исходной задачи, во второй — правая. Плоскость $x = 0$, в которой мгновенно выделяется энергия Q_i, где i — номер вспомогательной задачи, является теплоизолированной стенкой. Она разделяет температурное поле на не связанные друг с другом температурные поля левого и правого полупространств. Эти поля описываются точным решением, представленным в предыдущем подразделе. В формулы точного решения подставляются теплофизические параметры i-й вспомогательной задачи, энерговыделение берется равным Q_i.

Чтобы построить точное решение основной задачи, нужно согласовать температурные поля так, чтобы на границе $x = 0$ были непрерывны температура и тепловой поток. Непрерывность потока обеспечена автоматически, так как тепловой поток, как уже отмечалось, обращается на границе в нуль.

Для согласования температур на границе нужно прежде всего потребовать, чтобы зависимость температуры от времени слева и справа от плоскости энерговыделения была одинаковой. Это требование выполняется, когда показатели степени, в которую возводится время в формуле (3) слева и справа от границы, совпадают:

$$\frac{1+\mu_1}{(1+\mu_1)(n_1+1)+(1+\nu_1)k_1} = \frac{1+\mu_2}{(1+\mu_2)(n_2+1)+(1+\nu_2)k_2}. \tag{6}$$

Из условия непрерывности температуры имеем

$$\left(\delta_1 \frac{n_1+1-k_1}{2+\mu_1+\nu_1} \xi_{01}^{2+\mu_1+\nu_1}\right)^{\frac{1}{n_1+1-k_1}} \left(\frac{Q_1^{2+\mu_1+\nu_1}}{a_1^{1+\mu_1} b_1^{1+\nu_1}}\right)^{\frac{1}{(1+\mu_1)(n_1+1)+(1+\nu_1)k_1}} =$$
$$= \left(\delta_2 \frac{n_2+1-k_2}{2+\mu_2+\nu_2} \xi_{02}^{2+\mu_2+\nu_2}\right)^{\frac{1}{n_2+1-k_2}} \left(\frac{Q_2^{2+\mu_2+\nu_2}}{a_2^{1+\mu_2} b_2^{1+\nu_2}}\right)^{\frac{1}{(1+\mu_2)(n_2+1)+(1+\nu_2)k_2}}, \tag{7}$$

где ξ_{01}, ξ_{02} — константы, определяемые по формуле (5). Они характеризуют положение фронта тепловой волны соответственно в левом и правом полупространствах.

Присоединяя к соотношению (7) уравнение баланса энергии

$$Q_1 + Q_2 = Q, \tag{8}$$

получаем замкнутую систему для определения неизвестных величин Q_1, Q_2. Нетрудно убедиться, что эта система имеет единственное положительное решение.

Таким образом, задача о мгновенном выделении энергии на плоской границе сред с разными теплофизическими параметрами имеет точное решение, если показатели степени, входящие в уравнение теплопроводности (1), удовлетворяют соотношению (6). В каждом полупространстве точное решение задачи описывается формулами (3), (4), в которых в качестве констант берутся соответствующие данному полупространству теплофизические параметры, а величина Q заменяется на энерговыделение в полупространстве. Энерговыделение в каждом полупространстве определяется из системы уравнений (7), (8).

В частном случае $\mu_i = \nu_i = 0$, $k_i = 1$ имеем $n_i = n$, $\xi_{0i} = \xi_0$. Соотношение (7) переходит в выражение

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \sqrt{\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}},$$

показывающее, что отношение энергий в левом и правом полупространствах равно квадратному корню из произведения отношений коэффициентов теплопроводности и коэффициентов объемных теплоемкостей. Выделившаяся в i-м полупространстве энергия находится по формуле

$$Q_i = \frac{\sqrt{a_i b_i}}{\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2}} Q, \quad i = 1, 2.$$

Отношение размеров прогретых зон слева и справа от плоскости энерговыделения в этом частном случае не зависит от времени и определяется соотношением

$$\frac{x_{\text{ф}}^{(1)}}{x_{\text{ф}}^{(2)}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2} \frac{b_2}{b_1}}.$$

2. Задача об объемном источнике

Распространение тепла при степенном температурном режиме на границе. Рассмотрим в полупространстве уравнение нелинейной теплопроводности с объемным источником, мощность которого является однородной функцией температуры:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(bx^{\mu}T^{k}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{x^{\nu}}T^{n}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+F\left(x,t,T\right). \tag{9}$$

В начальный момент времени температура равна нулю:

$$T\left(x,0\right)=0,\quad x>0.$$

На левой границе задан закон изменения температуры:

$$T\left(0,t\right)=T_0t^{q}.$$

Решение данной задачи зависит от размерных параметров T_0, a, b и от размерных констант, входящих в функцию источника. Выберем эту функцию так, чтобы решение рассматриваемой задачи было автомодельным и представлялось в конечной замкнутой форме.

Анализ условий автомодельности задачи и структуры обыкновенного дифференциального уравнения, которому удовлетворяет безразмерная функция автомодельной переменной, показывает, что функцию источника можно взять в виде

$$F\left(x,t,T\right)=s\,b\,\frac{x^{\mu}}{t}T^{k}, \tag{10}$$

где

$$s=\frac{1+\mu+q\Big[(1+\mu)(n+1)+(1+\nu)k\Big]}{2+\mu+\nu}.$$

Действительно, очевидно, что задача без источника автомодельна. Включение в уравнение теплопроводности указанной функции источника не приводит к появлению дополнительных размерных констант и, следовательно, не нарушает условий автомодельности задачи.

В качестве независимой переменной возьмем безразмерную комбинацию

$$\xi=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}T_0^{n+1-k}\right)^{\frac{1}{2+\mu+\nu}}}\,\frac{x}{t^{\delta}},\quad \delta=\frac{1+q(n+1-k)}{2+\mu+\nu}$$

и будем искать автомодельное решение в виде

$$T\left(x,t\right)=T_0t^{q}f\left(\xi\right), \tag{11}$$

где безразмерная функция $f\left(\xi\right)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{f^{n}}{\xi^{\nu}}\,\frac{df}{d\xi}\right)+\delta\,\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{1+\mu}f^{k}\right)=0;$$

$$f\left(0\right)=1;\qquad f\left(\xi_0\right)=0;\qquad \left.\frac{f^{n}}{\xi^{\nu}}\,\frac{df}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_0}=0.$$

Если показатели степени μ, ν, n, k удовлетворяют указанным в первом разделе неравенствам, решение данной краевой задачи существует и имеет вид

$$f\left(\xi\right)=\left[1-\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{2+\mu+\nu}\right]^{\frac{1}{n+1-k}}\quad \text{при}\quad 0\le\xi\le\xi_0,$$

где

$$\xi_0 = \left[\frac{2+\mu+\nu}{(n+1-k)\delta}\right]^{\frac{1}{2+\mu+\nu}}.$$

Эта константа определяет положение фронта тепловой волны

$$x_\text{ф} = \xi_0 \left(\frac{a}{b} T_0^{n+1-k}\right)^{\frac{1}{2+\mu+\nu}} t^\delta.$$

Итак, решение уравнения (9) с функцией источника (10) при заданной температуре на границе представимо в конечной замкнутой форме (11). Энергия находится по формуле

$$\int\limits_0^{x_\text{ф}} b x^\mu T^k dx = Q\, t^s,$$

где

$$Q = \frac{1}{1+\mu} b T_0^k \left[\frac{2+\mu+\nu}{(n+1-k)\delta}\ \frac{a}{b} T_0^{n+1-k}\right]^{\frac{1+\mu}{2+\mu+\nu}} \frac{\Gamma\left(1+\dfrac{1+\mu}{2+\mu+\nu}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{k}{n+1-k}\right)}{\Gamma\left(1+\dfrac{1+\mu}{2+\mu+\nu}+\dfrac{k}{n+1-k}\right)}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть $\mu = w$, $\nu = -w$. Предположим, что объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности не содержат явной зависимости от координаты. Тогда уравнение (9) описывает распространение тепла для плоской, цилиндрической и сферической симметрий соответственно при $w = 0, 1, 2$.

   Точное решение находится по формулам

$$T(x,t) = T_0 t^q \left[1-\left(\frac{x}{x_\text{ф}}\right)^2\right]^{\frac{1}{n+1-k}}, \quad x_\text{ф} = \left[\frac{2}{(n+1-k)\delta}\ \frac{a}{b} T_0^{n+1-k}\right]^{0{,}5} t^\delta, \quad \delta = \frac{1+q\,(n+1-k)}{2}.$$

   Константа, входящая в функцию источника, равна

$$s = \frac{1}{2}\left\{1+w+q\Big[(1+w)(n+1)+(1-w)k\Big]\right\}.$$

2. Пусть $q = 0$, т. е. на левой границе поддерживается постоянная температура. В этом случае расчетные формулы упрощаются, особенно при дополнительном условии $\mu = w$, $\nu = -w$.
3. Пусть $s = 0$ (отсутствует источник). Этот случай реализуется, когда на границе задан температурный режим

$$q = -\frac{1+\mu}{(1+\mu)(n+1)+(1+\nu)k}.$$

Нетрудно убедиться, что в такой постановке задача эквивалентна задаче о мгновенном плоском источнике, рассмотренной в первом разделе.

Таким образом, постановка задачи о тепловом источнике, действующем в прогретой области, включает в себя как частный случай постановку задачи о мгновенном плоском источнике.

Задача об объемном источнике в неограниченном пространстве. Связь между задачами о сосредоточенном и объемном источниках становится еще очевиднее, если сформулировать последнюю в другой, эквивалентной форме, что всегда можно сделать, так как в задаче об объемном источнике поток в точке $x = 0$ равен нулю. Это означает, что с момента времени $t > 0$, когда уже произошло *зажигание* топлива, т. е. включился тепловой источник, задавать температуру на границе совершенно не обязательно. Она автоматически будет поддерживаться на требуемом уровне за счет действия источника.

Рассмотрим задачу об объемном источнике в неограниченном пространстве. Распространение тепла описывается уравнением (9), в которое введен источник вида (10). Будем предполагать, что константа Q в законе возрастания энергии

$$\int\limits_0^\infty bx^\mu T^k dx = Q\,t^s,$$

соответствующем заданному источнику, известна и что источник включается в начальный момент времени в точке $x = 0$.

В силу симметрии относительно плоскости $x = 0$ интегрирование производится по полупространству. В задачах с плоской симметрией интеграл дает половину энергии прогретой области.

Решение данной задачи автомодельное. Оно зависит от параметров a, b, Q, строится по той же схеме, что и в первом разделе, и совпадает с формулами (3), (4), в которых вместо констант (2) следует взять величины

$$q = \frac{(2+\mu+\nu)\,s - (1+\mu)}{(1+\mu)(n+1)+(1+\nu)k}, \quad \delta = \frac{k+(n+1-k)\,s}{(1+\mu)(n+1)+(1+\nu)k}. \tag{12}$$

Легко проверить, что данное решение совпадает с решением (11), если в качестве констант взять величины (5), (12) и положить

$$T_0 = \left(\delta \frac{n+1-k}{2+\mu+\nu}\;\xi_0^{2+\mu+\nu}\right)^{\frac{1}{n+1-k}} A.$$

Рассмотрим теперь задачу об объемном источнике в случае, когда левое и правое полупространства имеют разные теплофизические параметры.

Будем считать, что имеет место энергетическое соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^0 b_1\,|x|^{\mu_1}\,T^{k_1} dx + \int\limits_0^\infty b_2 x^{\mu_2} T^{k_2} dx = Q\,t^s, \quad s \geq 0. \tag{13}$$

Построим в каждом полупространстве точное решение, взяв в качестве энергетических констант пока неизвестные величины Q_i:

$$\int\limits_0^\infty b_i x^{\mu_i} T^{k_i} dx = Q_i t^s, \quad i = 1, 2.$$

Из условия непрерывности температуры в точке $x = 0$ и соотношения (13) следуют уравнения (7), (8) и правило согласования показателей степени, гарантирующее существование составного автомодельного решения:

$$\frac{(2+\mu_1+\nu_1)\,s - (1+\mu_1)}{(1+\mu_1)(n_1+1)+(1+\nu_1)k_1} = \frac{(2+\mu_2+\nu_2)\,s - (1+\mu_2)}{(1+\mu_2)(n_2+1)+(1+\nu_2)k_2}.$$

Уравнения (7), (8) образуют систему для определения энергетических констант. Эта система имеет единственное положительное решение.

Рассмотрим теперь общий случай. Предположим, что выполняются следующие энергетические соотношения:

$$\int\limits_{-\infty}^0 b_1\,|x|^{\mu_1}\,T^{k_1} dx = Q_1 t^{s_1}, \quad s_1 \geq 0; \qquad \int\limits_0^\infty b_2 x^{\mu_2} T^{k_2} dx = Q_2 t^{s_2}, \quad s_2 \geq 0.$$

Тогда решение в каждом полупространстве описывается формулами (3), (4). Решение существует, если выполняется равенство (7) и показатели степени удовлетворяют соотношению

$$\frac{(2+\mu_1+\nu_1)\,s_1-(1+\mu_1)}{(1+\mu_1)(n_1+1)+(1+\nu_1)k_1}=\frac{(2+\mu_2+\nu_2)\,s_2-(1+\mu_2)}{(1+\mu_2)(n_2+1)+(1+\nu_2)k_2}.$$

Учет плотности энергии излучения в задаче о тепловом источнике. Рассмотрим уравнение теплопроводности с учетом плотности энергии излучения в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрий:

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{1}{x^w}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^w aT^n\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{1+w}{2}\rho\frac{E}{t},\quad x\geq 0,\quad w=0,1,2;\quad E=c_VT^k+\frac{\sigma T^4}{\rho}.$$

Уравнение содержит размерные константы, из которых можно образовать комбинацию с размерностью температуры, а вместе с независимыми переменными и безразмерную комбинацию. Поэтому для автомодельности решения нужно потребовать, чтобы при задании начальных данных и граничного условия не появлялись константы с независимыми размерностями.

Пусть в начальный момент времени температура равна нулю, а на границе $x=0$ задана температура $T_0=\left(\frac{\rho c_V}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4-k}}$. Введем автомодельную переменную $\xi=\frac{x}{Bt^{0,5}}$, где $B=\left[\frac{a}{\rho c_V}\left(\frac{\rho c_V}{\sigma}\right)^{\frac{n+1-k}{4-k}}\right]^{0,5}$, и будем искать решение задачи в виде

$$T\left(x,t\right)=T_0f\left(\xi\right).$$

После подстановки этого выражения в исходное уравнение получаем для определения функции $f\left(\xi\right)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi^w f^n\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{w+1}\left(f^k+f^4\right)\right)=0$$

с краевыми условиями

$$f\left(0\right)=1;\qquad f\,|_{\,\xi=\xi_0}=0;\qquad \xi^w f^n\,\frac{df}{d\xi}\bigg|_{\,\xi=\xi_0}=0.$$

Однократное интегрирование с учетом условий на фронте тепловой волны приводит к уравнению

$$\frac{f^{n-k}df}{1+f^{4-k}}+\frac{1}{4}\,d\left(\xi^2\right)=0.$$

Оно легко интегрируется. Простые выражения получаются, например, в следующих случаях:

1. $n=3$.

$$T\left(x,t\right)=T_0\left\{\exp\left(\ln 2\left[1-\left(\frac{x}{x_{\text{ф}}}\right)^2\right]\right)-1\right\}^{\frac{1}{4-k}},\quad x_{\text{ф}}=\left(\frac{4}{4-k}\ln 2\right)^{0,5}Bt^{0,5}. \tag{14}$$

2. $n=6;\quad k=1$.

$$T\left(x,t\right)=T_0f\left(\frac{x}{x_{\text{ф}}}\right),\quad 0\leq x\leq x_{\text{ф}},\quad x_{\text{ф}}=\left(4\frac{1-\ln 2}{3}\right)^{0,5}Bt^{0,5}.$$

3. $n=9;\quad k=1$.

$$T\left(x,t\right)=T_0f\left(\frac{x}{x_{\text{ф}}}\right),\quad 0\leq x\leq x_{\text{ф}},\quad x_{\text{ф}}=\left(2\frac{2\ln 2-1}{3}\right)^{0,5}Bt^{0,5}. \tag{15}$$

Значения функций $f\left(\dfrac{x}{x_\text{ф}}\right)$ в случаях 2, 3 находятся соответственно из нелинейных уравнений

$$f^3 - \ln\,\left(1+f^3\right) = (1-\ln 2)\left[1-\left(\frac{x}{x_\text{ф}}\right)^2\right];$$

$$f^6 - 2f^3 + 2\ln\left(f^3+1\right) = (2\ln 2 - 1)\left[1-\left(\frac{x}{x_\text{ф}}\right)^2\right].$$

Закон выделения энергии с точностью до множителя, зависящего от типа симметрии, описывается формулой

$$J = \sigma T_0^4(\xi_0 B)^{1+w} Q_n^w t^{\frac{1+w}{2}}, \quad Q_n^w = \int\limits_0^1 \Big(f(z)+f^4(z)\Big) z^w dz.$$

Индекс w указывает тип симметрии; индекс n совпадает со значением показателя степени температуры (3, 6, 9) в коэффициенте теплопроводности. Значения интегралов приведены в таблице.

Значения константы Q_n^ω для разных коэффициентов теплопроводности

Показатель степени	Тип симметрии		
	0	1	2
3	1,37573	0,54101	0,30418
6	1,60673	0,69833	0,42095
9	1,71405	0,77610	0,48216

3. Примеры модельных задач

Мгновенный плоский источник. Теплоемкость зависит от температуры. Уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T^2 \frac{\partial T}{\partial x}\right), \qquad -2 \le x < 0;$$

$$\frac{\partial T^{1,5}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{75}{16} T^{1,5} \frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad 0 < x \le 5.$$

Расчетная область: $-2 \le x \le 5$.

В момент времени $t = 0$ в плоскости $x = 0$ выделяется энергия $Q = 1{,}4375\pi$. Закон распространения тепловых волн: $x_\text{ф}^{(1)} = -2t^{0,25}$; $x_\text{ф}^{(2)} = 5t^{0,375}$. В качестве начальных данных берется распределение температуры в момент времени $t = 0{,}00065536$ $(-0{,}32 \le x \le 0{,}32)$.

Задача решается до момента времени $t = 1$. Решение описывается формулой

$$T\,(x,t) = t^{-0,25} f\left(\frac{x}{x_\text{ф}}\right), \quad f\left(\frac{x}{x_\text{ф}}\right) = \begin{cases} \left[1-\left(\dfrac{x}{x_\text{ф}^{(1)}}\right)^2\right]^{0,5}, & x_\text{ф}^{(1)} \le x \le 0, \\ 1-\left(\dfrac{x}{x_\text{ф}^{(2)}}\right)^2, & 0 < x \le x_\text{ф}^{(2)}. \end{cases}$$

Распределение энергии по областям: $Q_1 = 0{,}5\pi$; $Q_2 = 0{,}9375\pi$.

Объемный источник. Плоская, цилиндрическая и сферическая геометрии. Уравнение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{x^w}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x^w T^4 \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{1+w}{2}\,\frac{T}{t}\,, \quad x > 0, \quad w = 0, 1, 2.$$

Решение ищется в области $0 \le x \le 10$.

Возможны две идентичные постановки задачи. В первой постановке на левой границе расчетной области поддерживается постоянная температура, равная единице. В качестве начальных данных задается нулевой профиль температуры. Во второй постановке задачи на левой границе задается нулевой поток тепла. Горение инициируется заданием на участке [0; 0,1] отличного от нуля профиля температуры, который берется на момент времени $t = 0{,}01$ из формулы точного решения. Закон распространения тепловой волны: $x_{\text{ф}} = \sqrt{t}$.

Задача решается до момента времени $t = 100$. Точное решение описывается формулой

$$T(x,t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^2}{t}\right)^{0,25} & \text{при } x \le \sqrt{t}; \\ 0 & \text{при } x > \sqrt{t}. \end{cases}$$

Энергия системы изменяется с течением времени по закону $J = Qt^{\frac{1+w}{2}}$. Для плоской геометрии $Q = 0{,}87402$. В случае цилиндрической симметрии $Q = 0{,}4$, сферической — $Q = 0{,}24972$. Заметим, что в случае цилиндрической (сферической) геометрии энергия приведена на один радиан (стерадиан).

Объемный источник. Две области. Плоская геометрия. Уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2T^8 \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{T}{t}, \qquad -1 \le x < 0;$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T^4 \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{T}{t}, \qquad 0 < x \le 1.$$

Расчетная область: $-1 \le x \le 1$.

Горение инициируется путем задания в момент времени $t = 0{,}01$ $(-0{,}1 \le x \le 0{,}1)$ отличного от нуля профиля температуры, взятого в соответствии с формулой точного решения. Тепловые волны распространяются вправо и влево с одинаковой скоростью ($x_{\text{ф}} = \pm\sqrt{t}$).

Задача решается до момента времени $t = 1$. Точное решение описывается формулой

$$T(x,t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^2}{t}\right)^{0,125} & \text{при } -\sqrt{t} \le x \le 0; \\ \left(1 - \dfrac{x^2}{t}\right)^{0,25} & \text{при } 0 \le x \le \sqrt{t}; \\ 0 & \text{при } x < -\sqrt{t} \text{ и } x > \sqrt{t}. \end{cases}$$

Энергия в системе выделяется по закону $J = Q\sqrt{t}$, $Q = Q_1 + Q_2$. В первой области $Q_1 = 0{,}93088$, во второй — $Q_2 = 0{,}87402$.

Объемный источник. Теплоемкость зависит от температуры. Уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2T^4 \frac{\partial T}{\partial x}\right) + 1{,}25\,\frac{T}{t}, \qquad -1 \le x < 0;$$
$$\frac{\partial T^{1,5}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2T^{4,5} \frac{\partial T}{\partial x}\right) + 1{,}375\,\frac{T^{1,5}}{t}, \quad 0 < x \le 1.$$

Расчетная область: $-1 \le x \le 1$.

В качестве начальных данных берется распределение температуры из точного решения на момент времени $t = 0{,}1$ $(-0{,}1 \leq x \leq 0{,}1)$. Тепловые волны распространяются влево и вправо с постоянной скоростью, равной единице.

Задача решается до момента времени $t = 1$. Точное решение описывается формулой

$$T(x,t) = t^{0{,}25} f\left(\frac{x}{t}\right),$$

где

$$f\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} \left[1 - \left(\dfrac{x}{t}\right)^2\right]^{0{,}25} & \text{при } \ -t \leq x \leq t; \\ 0 & \text{при } \ x < -t \ \text{ и } \ x > t. \end{cases}$$

В левом полупространстве выделяется энергия $J_1 = 0{,}87402\, t^{1{,}25}$, в правом — $J_2 = 0{,}82624\, t^{1{,}375}$.

Объемный источник. Идеальный газ с излучением. Уравнение:

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ell c}{3}\,\frac{\partial \sigma T^4}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\rho\frac{E}{t}, \quad E = c_V T + \frac{\sigma T^4}{\rho}, \quad \ell = \ell_0 T^{\alpha}, \quad \sigma = 1{,}37, \quad c = 3\,000.$$

Расчетная область: $-1{,}1 \leq x \leq 1{,}1$.

Слева от точки $x = 0$ плотность равна 0,1, справа — 10. Параметры уравнения состояния и пробега излучения: $c_V = 13{,}7$, $\ell_0 = 2{,}70505 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 0$ при $x < 0$ и $c_V = 0{,}137$, $\ell_0 = 9{,}70762 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 6$ при $x > 0$.

В начальный момент времени $(t_0 = 0{,}0004)$ температура равна 0,85107 в интервале $-0{,}02 < x < 0$ и 0,93845 при $0 < x < 0{,}02$; в остальных точках температура равна нулю. Тепловые волны распространяются вправо и влево с одинаковой скоростью $(x_{\text{ф}} = \pm\sqrt{t})$.

Задача решается до момента времени $t = 1$. Точное решение описывается формулами (14) $(n = 3)$ и (15) $(n = 9)$ соответственно слева и справа от точки $x = 0$.

В левом полупространстве выделяется энергия $J_1 = 1{,}88475 t^{0{,}5}$, в правом — $J_2 = 2{,}34825\, t^{0{,}5}$.

Заметим, что в данной задаче в качестве начальных данных берутся средние значения температур, соответствующие величине энергии, поступившей в систему к моменту времени t_0. Аналогичным образом можно поступить и в предыдущих задачах, уменьшив начальный момент времени. Например, в первой задаче удобно взять $t_0 = 10^{-8}$ или $t_0 = 2{,}56 \cdot 10^{-6}$, во второй и третьей задачах — $t_0 = 10^{-4}$, в четвертой задаче — $t_0 = 10^{-2}$.

Список литературы

1. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61—67.
2. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 67—78.
3. *Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А.* Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М.: Факториал, 1998.

Статья поступила в редакцию 19.10.09.