

УДК 519.6

DS_n -СХЕМА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ТРУБОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА, ЗАПИСАННОГО В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

А. И. Бочков
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Для уравнения переноса, записанного в цилиндрической системе координат, построена характеристическая схема. Схема включает в себя два этапа. На первом этапе в счетной ячейке строится обыкновенное дифференциальное уравнение баланса частиц, с помощью которого находится полный поток частиц на неосвещенной поверхности ячейки. На втором этапе по схеме типа DS_n -метода происходит распределение выходящего потока частиц по неосвещенным граням ячейки.

Ключевые слова: уравнение переноса, разностная схема, DS_n -метод, DS_n -схема характеристических трубок.

Введение

При решении разностными методами кинетического уравнения переноса широкое распространение получили схемы типа DS_n -метода [1–5]. Численные исследования показали, что на четырехугольных пространственных сетках схемы [3] и [5] имеют близкий ко второму порядок точности.

Известно, что линейные схемы второго порядка точности являются немонотонными [6]. Среди первых работ, направленных на улучшение монотонности разностных схем решения уравнения переноса, следует отметить работы [7–10]. В настоящее время также развиваются различные методы построения разностных схем, позволяющие улучшить монотонность решения и сохранить при этом близкий ко второму порядок точности.

В [11] была предложена DDAD-схема, которая является модификацией схемы DS_n -метода с введением в уравнение переноса диссипативных членов. При этом новый метод сохраняет второй порядок точности, а искусственная диссипация ослабляет нефизические осцилляции.

В [12–14] изложен характеристический подход к построению разностных схем на S_n -сетках для решения многомерных уравнений переноса. Основные положения этого характеристического метода построения схем заключаются в следующем:

1. В каждой ячейке строится обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), с помощью которого находится полный поток частиц на неосвещенной поверхности ячейки. ОДУ решается по положительным монотонным (квазимонотонным) схемам.
2. Посредством дополнительных аппроксимационных соотношений происходит распределение полного потока по неосвещенным граням поверхности ячейки.

В настоящей работе описывается двухэтапная DS_n -схема характеристических трубок для решения кинетического уравнения переноса в цилиндрических координатах (DS_{nt} -схема).

Постановка задачи

Рассмотрим унифицированное пространственно-двумерно-трехмерное кинетическое уравнение переноса в одногрупповом приближении, записанное в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N}{v} \right) + \frac{\partial}{r \partial r} \left(r \sqrt{1 - \mu^2} N \cos \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu N) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sqrt{1 - \mu^2} N \sin \varphi}{r} \right) + \\ + (d - 2) \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{\sqrt{1 - \mu^2} N \sin \varphi}{r} \right) + \alpha N = F, \end{aligned} \quad (1)$$

$$F = \frac{1}{2(d-1)\pi} (\beta n^{(0)} + Q), \quad n^{(0)} = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2(d-1)\pi} N d\varphi.$$

Здесь t — время; z, r, Φ — цилиндрические координаты положения частиц в пространстве; v — скорость частиц; $N = N(z, r, \Phi, t, \theta, \varphi)$ — плотность потока частиц в точке (z, r, Φ, t) , летящих в направлении $\vec{\Omega}$; $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$ — единичный вектор в направлении полета частицы; $\mu = \cos \theta$, θ — угол между $\vec{\Omega}$ и осью симметрии \vec{z} ; φ — угол между проекцией вектора $\vec{\Omega}$ на плоскость, проходящую через точку (z, r, Φ) перпендикулярно оси \vec{z} , и вектором, соединяющим точки $(z, 0, \Phi)$ и (z, r, Φ) ; α — коэффициент столкновения частиц; β — коэффициент размножения частиц; F — правая часть кинетического уравнения; Q — независимый источник частиц; d — пространственная размерность задачи ($d = 2$ — двумерная задача, $d = 3$ — трехмерная задача).

Система (1) решается в области фазового пространства $D = \{(r, z) \in L(\Phi), \Phi_1 \leq \Phi \leq \Phi_2, -1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, где $L(\Phi)$ — сечение тела вращения плоскостью, проходящей через ось симметрии \vec{z} ; Φ_1, Φ_2 — сечения, ограничивающие область решения: $\Phi_1 = \text{const}$, $\Phi_2 = \text{const}$, $0 \leq \Phi_1 \leq \Phi_2 \leq 2\pi$.

Граничное условие ставится на внешней поверхности в виде потока частиц, входящих в тело при $(\vec{\Omega}, \vec{n}) < 0$:

$$N(z, r, \Phi, t, \mu, \varphi)_{(z,r) \in \Gamma(\Phi)} = \psi(z_\Gamma, r_\Gamma, \Phi, t, \mu, \varphi), \quad (2)$$

где $\Gamma = \Gamma(\Phi)$ — образующая тела вращения; \vec{n} — внешняя нормаль к поверхности тела вращения; $\psi(z_\Gamma, r_\Gamma, \Phi, t, \mu, \varphi)$ — заданная функция (поток).

В случае $\Phi_1 = 0, \Phi_2 = 2\pi$ граничных условий (2) достаточно для корректной постановки задачи. В случае наличия в трехмерном теле выреза необходимо задать также граничные условия и на торцах, т. е. при $\Phi = \Phi_1$ и $\Phi = \Phi_2$. При отсутствии внешнего облучения входящий поток задается равным нулю.

Наряду с уравнением (1) вводится также уравнение, получающееся из (1) при $\varphi = \pi$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N}{v} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{1 - \mu^2} N \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu N) + \alpha N = F. \quad (3)$$

Уравнение (3) используется как дополнительное граничное условие.

Построенную систему разностных уравнений необходимо также дополнить внутренними граничными условиями при $r = 0$. Они описываются уравнением

$$N \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} (N \sin \varphi) + (d - 2) \frac{\partial}{\partial \Phi} (N \sin \varphi) = 0. \quad (4)$$

В двумерном случае уравнение (4) эквивалентно уравнению $\left. \frac{\partial N}{\partial \varphi} \right|_{r=0} = 0$.

Уравнение (1) решается итерациями по интегралу столкновений.

Аппроксимация уравнения

Для аппроксимации уравнения переноса по угловым переменным на интервале $[-1, 1]$ выбираются узловые значения переменной μ_ω . Для каждого интервала $\hat{\omega}$ переменной μ интервал изменения

переменной $\varphi \in [0, 2\pi]$ разбивается на подынтервалы $\varphi_{q-1} \geq \varphi \geq \varphi_q$ для $\varphi \in [0, \pi]$ и $\varphi_{q-1} \leq \varphi \leq \varphi_q$ для $\varphi \in [\pi, 2\pi]$.

Общие принципы организации пространственно-трехмерных сеток, а также метод решения полученной системы сеточных уравнений рассмотрены в [15].

Область изменения переменной Φ разбивается на интервалы $\Phi_{r-1} < \Phi < \Phi_r$, $r = 0, 1, \dots, \tilde{r}$. Внутри интервалов выбираются некоторые точки $\Phi_{r-1/2}$, $r = 1, 2, \dots, \tilde{r}$.

На каждом сечении $\Phi = \Phi_r$ ($r = 0, 1, \dots, \tilde{r}$) вводится регулярная (т. е. имеющая матричную структуру) сетка из выпуклых четырехугольников. Сетки, отвечающие разным сечениям, топологически эквивалентны, т. е. содержат одинаковое число строк и столбцов. Соединяя вершины соответствующих четырехугольников двух последовательных сечений, получаем пространственные ячейки, на которых аппроксимируем уравнение переноса.

Рассмотрим ячейку пространства (z, r, Φ) (рис. 1). Координаты z'' и r'' относятся к листу Φ_2 , а координаты z' и r' — к листу Φ_1 , $\Delta\Phi = |\Phi_2 - \Phi_1|$. Грани трехмерной ячейки, лежащие на листах, называются основаниями, остальные грани называются боковыми гранями. Сеточные значения функции N определены в следующих точках: на основаниях (N_{Φ_2}, N_{Φ_1}), боковых гранях (N_l), боковых ребрах (V_l) и в центре ячейки (N_0). Для определенности будем считать, что освещенным является основание, лежащее в плоскости $\Phi = \Phi_1$.

Рассмотрим сначала стационарное уравнение. В результате конечно-разностной аппроксимации [15] уравнение баланса в ячейке примет следующий вид:

$$\operatorname{div}_h (\vec{\Omega}N) + \alpha N_0 = F, \quad (9)$$

где

$$\operatorname{div}_h (\vec{\Omega}N) = \frac{1}{V} \left(\sum_{l=1}^4 \chi_l N_l + \chi_6 P_6 - \chi_5 P_5 + \chi_{\Phi_2} N_{\Phi_2} - \chi_{\Phi_1} N_{\Phi_1} \right);$$

$$V = \iiint r dz dr d\Phi = -\frac{\Delta\Phi}{72} \sum_{l=1}^4 \{ (r_{l+1}^{\prime 2} + r_{l+1}' r_l' + r_l^{\prime 2}) [3(z'_{l+1} - z'_l) + z''_{l+1} - z''_l] +$$

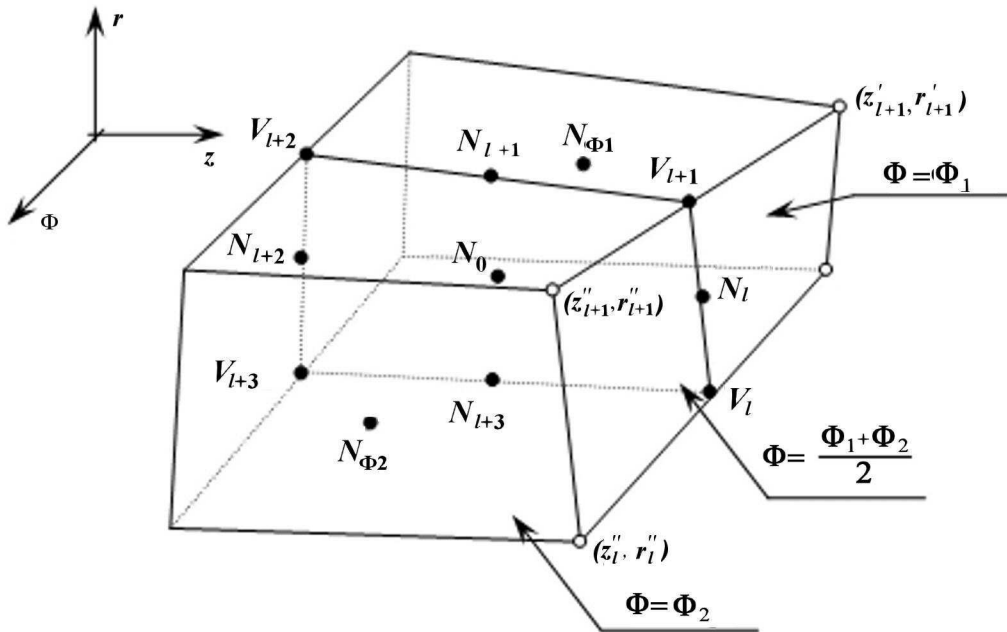


Рис. 1. Ячейка в пространстве (z, r, Φ)

$$\begin{aligned}
 & + (r_{l+1}''^2 + r_{l+1}'' r_l'' + r_l''^2) [3 (z_{l+1}'' - z_l'') + z_{l+1}' - z_l'] + (z_{l+1}' - z_l' + z_{l+1}'' - z_l'') \times \\
 & \times [2 (r_l' r_l'' + r_{l+1}' r_{l+1}'') + r_l' r_{l+1}'' + r_{l+1}' r_l'']; \\
 \chi_l & = \frac{\Delta\Phi}{6} \left(\sqrt{1 - \mu_\omega^2} \cos \varphi_{q-1/2} S1_l + \mu_\omega S2_l \right) + \sqrt{1 - \mu_\omega^2} \sin \varphi_{q-1/2} S3_l, \quad l = \overline{1, 4}; \\
 S1_l & = - \left[(r_{l+1}' + r_l') \left(z_{l+1}' - z_l' + \frac{z_{l+1}'' - z_l''}{2} \right) + (r_{l+1}'' + r_l'') \left(z_{l+1}'' - z_l'' + \frac{z_{l+1}' - z_l'}{2} \right) \right]; \\
 S2_l & = (r_{l+1}' + r_l') \left(r_{l+1}' - r_l' + \frac{r_{l+1}'' - r_l''}{2} \right) + (r_{l+1}'' + r_l'') \left(r_{l+1}'' - r_l'' + \frac{r_{l+1}' - r_l'}{2} \right); \\
 S3_l & = - \frac{(r_{l+1}' - r_l'') (z_{l+1}'' - z_l') - (z_{l+1}' - z_l'') (r_{l+1}'' - r_l')}{2}; \\
 \cos \varphi_{q-1/2} & = \cos \frac{\varphi_q + \varphi_{q-1}}{2}, \quad \sin \varphi_{q-1/2} = \sin \frac{\varphi_q + \varphi_{q-1}}{2}; \\
 \chi_5 & = \frac{M_{q-1/2} V_{zr\Phi} \sqrt{1 - \mu_\omega^2} \sin \varphi_{q-1}}{\varphi_{q-1} - \varphi_q}; \quad \chi_6 = \frac{M_{q-1/2} V_{zr\Phi} \sqrt{1 - \mu_\omega^2} \sin \varphi_q}{\varphi_{q-1} - \varphi_q}; \\
 V_{zr\Phi} & = \iiint dz dr d\Phi = \frac{\Delta\Phi}{6} \sum_{l=1}^4 S1_l; \quad M_{q-1/2} = \frac{\cos \frac{\varphi_q + \varphi_{q-1}}{2}}{\sin \varphi_q - \sin \varphi_{q-1}}; \\
 \chi_{\Phi 2} & = \sqrt{1 - \mu_\omega^2} \sin \varphi_{q-1/2} S Q_2; \quad \chi_{\Phi 1} = \sqrt{1 - \mu_\omega^2} \sin \varphi_{q-1/2} S Q_1;
 \end{aligned}$$

V — объем ячейки; $S Q_1, S Q_2$ — площади оснований ячейки, лежащих на листах Φ_1 и Φ_2 соответственно; P_5 и P_6 — значения искомой функции соответственно в точках φ_{q-1} и φ_q . В двумерном случае $\Delta\Phi = 2\pi$; $z'' \equiv z'$; $r'' \equiv r'$; $\varphi \in [0, \pi]$.

Отметим, что значения функций в точках $l + k$ тождественны значениям в точках $\text{mod}(l + k, 4)$.

Рассмотрим уравнение (5) в разностно-характеристическом виде:

$$\frac{N_{s+1} - N_s}{\Delta x_s} + \alpha N_0 = F, \tag{6}$$

где

$$N_{s+1} = \frac{\sum_{\substack{l=\overline{1,4}: \\ (\vec{\Omega}, \vec{n}) > 0}} \chi_l N_l + \chi_6 P_6 + \chi_{\Phi 2} N_{\Phi 2}}{\sum_{\substack{l=\overline{1,4}: \\ (\vec{\Omega}, \vec{n}) > 0}} \chi_l + \chi_6 + \chi_{\Phi 2}} - \text{среднее значение искомой функции на неосвещенной по-}$$

верхности ячейки;

$$N_s = \frac{- \sum_{\substack{l=\overline{1,4}: \\ (\vec{\Omega}, \vec{n}) < 0}} \chi_l N_l + \chi_5 P_5 + \chi_{\Phi 1} N_{\Phi 1}}{- \sum_{\substack{l=\overline{1,4}: \\ (\vec{\Omega}, \vec{n}) < 0}} \chi_l + \chi_5 + \chi_{\Phi 1}} - \text{среднее значение искомой функции на освещенной поверх-}$$

ности ячейки;

$$\Delta x_s = \frac{V}{\sum_{\substack{l=\overline{1,4}: \\ (\vec{\Omega}, \vec{n}) > 0}} \chi_l + \chi_6 + \chi_{\Phi 2}} \equiv \frac{V}{\sum_{\substack{l=\overline{1,4}: \\ (\vec{\Omega}, \vec{n}) < 0}} \chi_l + \chi_5 + \chi_{\Phi 1}} - \text{линейный размер ячейки вдоль характери-}$$

стики (среднее расстояние, проходимое частицами в ячейке).

Используя дополнительные соотношения DS_n -метода, можно показать, что значение функции в центре ячейки связано со значениями функции на освещенной и неосвещенной поверхностях ячейки следующим соотношением:

$$N_0 = \frac{N_{s+1} + N_s}{2} + \varepsilon, \quad (7)$$

где ε — величина либо первого, либо второго порядка малости относительно шагов сетки.

Таким образом, схема (6), (7) является аппроксимацией ОДУ

$$\frac{dN}{dx} + \alpha N = F, \quad N(0) = N_s, \quad 0 < x < \Delta x_s. \quad (8)$$

Определим N_{s+1} из ОДУ (8), воспользовавшись положительной монотонной схемой с весами [16]:

$$\frac{N_{s+1} - N_s}{\Delta x_s} + \alpha N_0^* = F, \quad (9)$$

где $N_0^* = \gamma_h N_{s+1} + (1 - \gamma_h) N_s$ — среднее значение искомой функции в ячейке фазового пространства;

$$\gamma_h = \frac{-1 + \frac{\hbar}{2} + \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{4}}}{\hbar}, \quad \hbar = \alpha \Delta x_s.$$

После того, как значение N_{s+1} найдено из уравнения (9), выходящий поток частиц с помощью дополнительных интерполяционных соотношений распределяется по неосвещенным граням ячейки. Для этого используются следующие дополнительные соотношения:

- по пространственным переменным z и r : в двумерном случае — схема [5], в трехмерном случае — схема [15];
- по пространственной переменной Φ : $N_0 = \delta N_{\Phi 2} + (1 - \delta) N_{\Phi 1}$, $0,5 \leq \delta \leq 1$;
- по угловой переменной φ : $N_0 = \eta P_6 + (1 - \eta) P_5$, $0,5 \leq \eta \leq 1$.

Для примера рассмотрим варианты распределения выходящего потока частиц по неосвещенным граням ячейки в двумерном случае. Если все ячейки пространственной сетки представляют собой выпуклые четырехугольники, возможны три варианта освещенности сторон ячейки (рис. 2).

Вариант 1. Пусть для определенности освещены три стороны ячейки — направление $\vec{\Omega}_3$ (см. рис. 2). В этом случае известны N_{l+1} , N_{l+2} и N_{l+3} . Для замыкания системы сеточных уравнений по пространственным переменным вводится одно дополнительное соотношение

$$N_0 = \delta N_l + (1 - \delta) N_{l+2}, \quad 0,5 \leq \delta \leq 1.$$

В результате для распределения полного потока по неосвещенным граням потребуется решить следующую систему уравнений:

$$N_{s+1} = \frac{\chi_l N_l + \chi_6 P_6}{\chi_l + \chi_6};$$

$$\eta P_6 + (1 - \eta) P_5 = \delta N_l + (1 - \delta) N_{l+2}.$$

Вариант 2. Освещены две стороны ячейки — направление $\vec{\Omega}_2$, так что известны N_l и N_{l+3} , а также V_l , V_{l+1} и V_{l+3} . По пространственным переменным вводятся следующие дополнительные соотношения:

$$N_0 = \delta N_{l+2} + (1 - \delta) N_l; \quad N_0 = \delta N_{l+1} + (1 - \delta) N_{l+3}; \quad 0,5 \leq \delta \leq 1.$$

Для распределения полного потока нужно решить следующую систему уравнений:

$$N_{s+1} = \frac{\chi_{l+1} N_{l+1} + \chi_{l+2} N_{l+2} + \chi_6 P_6}{\chi_{l+1} + \chi_{l+2} + \chi_6};$$

$$\eta P_6 + (1 - \eta) P_5 = \delta N_{l+2} + (1 - \delta) N_l = \delta N_{l+1} + (1 - \delta) N_{l+3}.$$

После того, как значения N_{l+1} и N_{l+2} определены, дополнительно рассчитывается значение искомой функции V_{l+2} в неосвещенном узле ячейки:

$$V_{l+2} = \frac{N_{l+1} + N_{l+2} - (1 - \delta)(V_{l+1} + V_{l+3})}{2\delta}.$$

Вариант 3. Освещена только одна стороны ячейки — направление $\vec{\Omega}_1$ (известны N_l , V_l и V_{l+1}) (рис. 3). Рассмотрим эту ситуацию подробнее.

По пространственным переменным используются следующие дополнительные соотношения:

$$N_{l+1} = cP_1; \quad N_{l+3} = cP_2; \quad N_0 = \frac{N_{l+1} + N_{l+3}}{2}; \quad N_0 = \delta N_{l+2} + (1 - \delta) N_l, \quad 0,5 \leq \delta \leq 1, \quad (10)$$

где P_1 и P_2 — значения функции в точках пересечения характеристик, проходящих через середины боковых неосвещенных сторон, с освещенной стороной ячейки; c — коэффициент пропорциональности. Значения P_1 и P_2 находятся линейной интерполяцией входящих узловых значений V_l и V_{l+1} :

$$P_1 = \alpha_1 V_l + (1 - \alpha_1) V_{l+1}; \quad P_2 = \alpha_2 V_{l+1} + (1 - \alpha_2) V_l,$$

где коэффициенты α_1 и α_2 определяются следующим образом:

$$\alpha_1 = -\frac{\bar{\chi}_{l+1}}{2\bar{\chi}_l}; \quad \alpha_2 = -\frac{\bar{\chi}_{l+3}}{2\bar{\chi}_l}; \quad \bar{\chi}_l = (r_{l+1} - r_l) \mu_{\vec{\omega}} - \sqrt{1 - \mu_{\vec{\omega}}^2} \cos \varphi_{q-1/2} (z_{l+1} - z_l).$$

Отметим, что дополнительные соотношения (10) используются в случае, когда хотя бы одно из значений V_l , V_{l+1} не равно нулю. В этом случае значения V_l и V_{l+1} предварительно нормируются таким образом, чтобы $V_l + V_{l+1} = 2N_l$. В противном случае ($V_l = V_{l+1} = 0$) используются дополнительные соотношения первого порядка точности:

$$N_{l+1} = N_0; \quad N_{l+3} = N_0; \quad N_0 = \delta N_{l+2} + (1 - \delta) N_l, \quad 0,5 \leq \delta \leq 1.$$

В результате в зависимости от значений V_l и V_{l+1} для распределения полного потока нужно решить одну из следующих систем уравнений:

$$N_{s+1} = \frac{\chi_{l+1} N_{l+1} + \chi_{l+2} N_{l+2} + \chi_{l+3} N_{l+3} + \chi_6 P_6}{\chi_{l+1} + \chi_{l+2} + \chi_{l+3} + \chi_6};$$

$$\eta P_6 + (1 - \eta) P_5 = \frac{N_{l+1} + N_{l+3}}{2} = \delta N_{l+2} + (1 - \delta) N_l;$$

$$N_{l+1} = cP_1; \quad N_{l+3} = cP_2$$

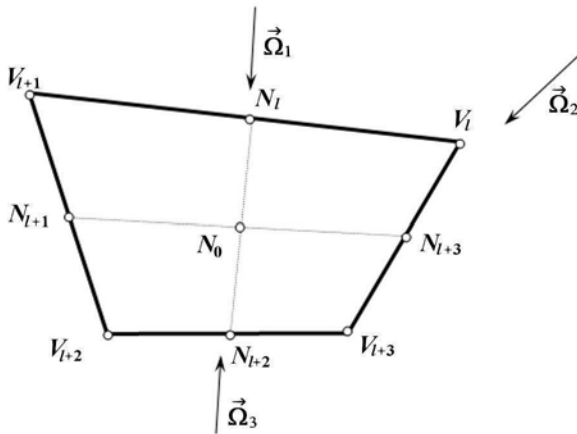


Рис. 2. Возможные варианты освещенности сторон пространственной ячейки в двумерном случае

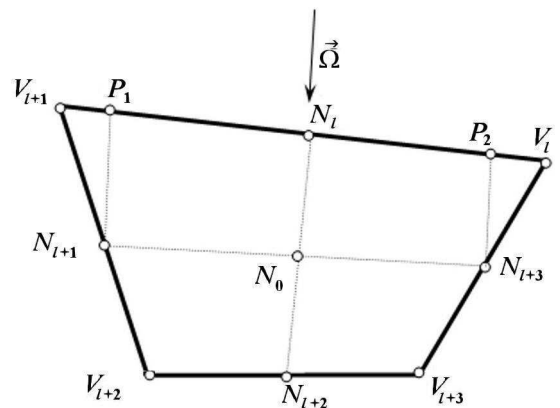


Рис. 3. Освещена одна сторона ячейки

либо

$$N_{s+1} = \frac{\chi_{l+1}N_{l+1} + \chi_{l+2}N_{l+2} + \chi_{l+3}N_{l+3} + \chi_6 P_6}{\chi_{l+1} + \chi_{l+2} + \chi_{l+3} + \chi_6};$$

$$\eta P_6 + (1 - \eta) P_5 = N_{l+1} = N_{l+3} = \delta N_{l+2} + (1 - \delta) N_l.$$

После того, как значения на неосвещенных сторонах и в центре ячейки найдены, определяются значения искомой функции в неосвещенных узлах ячейки V_{l+2} и V_{l+3} . Для этого используются следующие дополнительные соотношения:

$$N_{l+1} = \delta V_{l+2} + (1 - \delta) V_{l+1}; \quad N_{l+3} = \delta V_{l+3} + (1 - \delta) V_l.$$

В общем случае описанная схема распределения выходящего потока частиц по неосвещенным границам ячейки является немонотонной, поэтому для обеспечения положительности сеточного решения применяется метод балансного зануления [17].

Нестационарное уравнение аппроксимируем следующей схемой:

$$\frac{\left(\frac{N}{v}\right)^{n+1} - \left(\frac{N}{v}\right)^n}{\Delta t} + \frac{N_{s+1} - N_s}{\Delta x_s} + \alpha N_0^* = F,$$

где для замыкания системы сеточных уравнений по производной времени используется дополнительное соотношение

$$\frac{N_0^*}{v} = \gamma \left(\frac{N}{v}\right)^{n+1} + (1 - \gamma) \left(\frac{N}{v}\right)^n, \quad 0,5 \leq \gamma \leq 1.$$

Полученная система разностных уравнений решается с помощью алгоритма *бегущего счета* [15, 18].

Численное исследование разностной схемы

Далее приведены результаты расчетов двумерных тестовых задач. Аналогичные результаты были получены и в трехмерном случае.

Задача 1. Эта стационарная задача заимствована из работы [11]. Сферически-симметричная система состоит из 7 подобластей с различной оптической плотностью (рис. 4). В качестве граничного условия на внешней поверхности задан единичный входящий поток. Для аппроксимации по угловым переменным использовалась ES_{20} -квадратура с усовершенствованной аппроксимацией по угловой переменной φ [1, 19]. Сетка по радиусу берется равномерная, с шагом $\Delta h = 0,2$, — 65 строк, сетка по пространственному углу также равномерная — 32 столбца.

В качестве результата рассматривается скалярный поток $n^{(0)}$ вдоль радиуса. За *точное* решение принят результат, полученный на очень подробной пространственной сетке.

На рис. 5 представлен график зависимости $n^{(0)}(r)$. Видно, что для схемы [5] кривая существенно отклонилась от точного решения. Заметное улучшение решения получено по DS_{nt} -схеме: решение всюду близко к точному, выброса в области $3 < r < 5$ нет.

Представленные на рис. 5 результаты демонстрируют преимущества DS_{nt} -схемы.

Задача 2. Подробная постановка тестовой задачи представлена в работе [2]. Рассматривается цилиндр с параметрами $0 \leq r \leq 1$; $0 \leq z \leq 2$; $\alpha = 1,34$; $\beta = 2,25$; $Q = 0$; $v = 1$. Граничное условие — нулевой входящий поток. Для аппроксимации по угловым переменным применялась ES_{32} -квадратура угловой переменной φ [1, 19].

В качестве результата используется временная постоянная размножения частиц λ . При расчете параметра λ точность сведения итераций задавалась равной 10^{-7} .

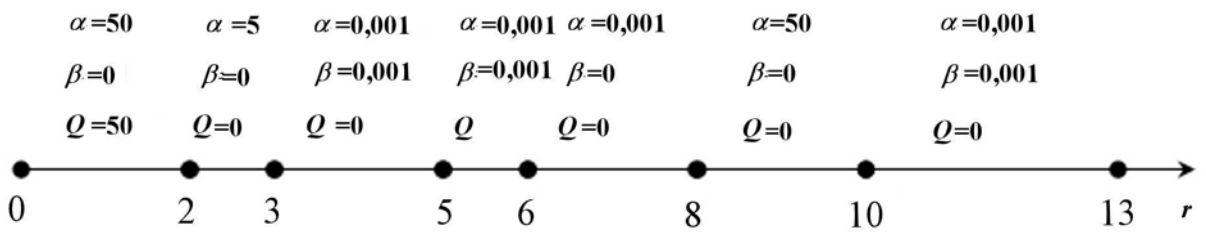


Рис. 4. Геометрия и параметры расчетной системы

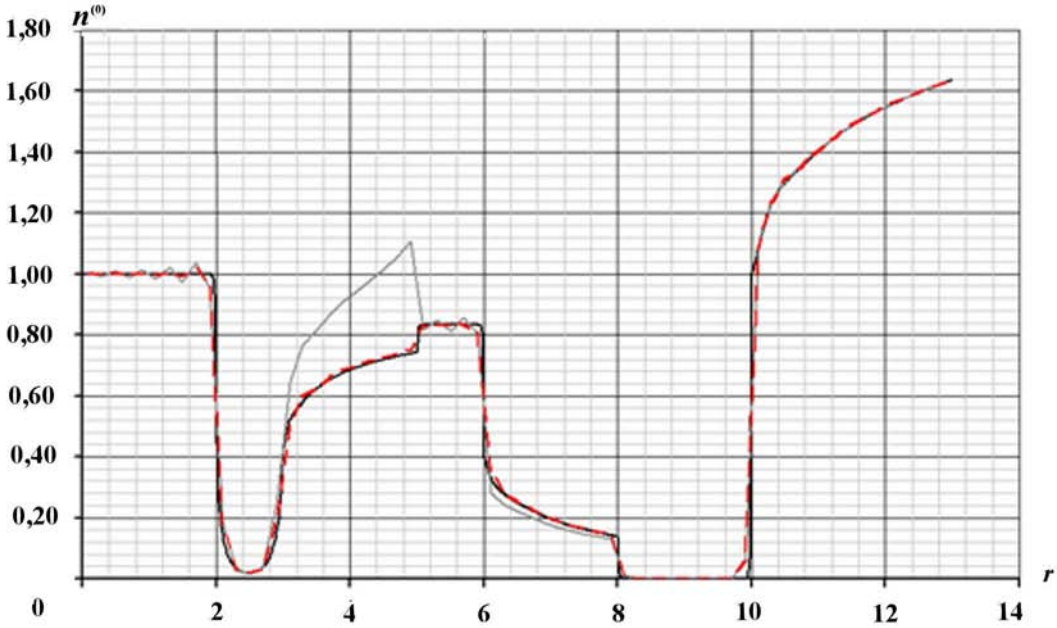


Рис. 5. Зависимость скалярного потока от радиуса: — — точное решение; — — схема типа DS_n -метода [5]; - - - — DS_{ni} -схема

Расчеты проводились на сгущающихся прямоугольных пространственных сетках. При этом число строк и столбцов последовательно полагалось равным 8, 16, 32, 64 и 128.

За *точное* принималось решение на очень подробной прямоугольной сетке — $\lambda = 0,147478$. Если $\|\lambda_{\text{точное}} - \lambda_h\| \leq C\Delta h^k$, где $C > 0$, $k > 0$ — не зависящие от Δh постоянные, то разностная схема имеет k -й порядок точности (имеет место сходимость порядка Δh^k) [20]. Используем норму $\|\lambda_{\text{точное}} - \lambda_h\| = |\lambda_{\text{точное}} - \lambda_h|$.

Для оценки порядка точности схемы использовался метод наименьших квадратов для последовательности точек. То есть определялось, при каких значениях параметров C и k выполняется условие минимума суммы квадратов невязок $S = \sum_{i=1}^n (|\lambda_{\text{точное}} - \lambda_i| - C\Delta h_i^k)^2$ по всем имеющимся точкам. При этом Δh не определялось каким-либо образом, а лишь предполагалось, что при измельчении сетки вдвое по переменным r и z (увеличением вдвое числа строк и столбцов) Δh также уменьшается в 2 раза.

В таблице представлены значения собственного параметра λ , относительная ошибка параметра λ и скорость сходимости k . Для сравнения представлены результаты, полученные по DD-схеме.

Параметр λ , относительная ошибка и скорость сходимости k

Размер сетки	λ		Относительная ошибка, %	
	DD-схема	DS_{nt} -схема	DD-схема	DS_{nt} -схема
8×8	0,144398	0,142212	-2,09	-3,57
16×16	0,146709	0,145920	-0,52	-1,06
32×32	0,147287	0,146991	-0,13	-0,33
64×64	0,147431	0,147309	-0,03	-0,11
128×128	0,147467	0,147411	-0,01	-0,05
k	2,00	1,74	2,00	1,74

Полученные результаты показывают, что DD-схема обеспечивает сходимость сеточного решения к точному со вторым порядком, DS_{nt} -схема имеет близкий ко второму порядку сходимости и несколько уступает DD-схеме по точности.

Итак, для решения уравнения переноса, записанного в цилиндрической системе координат, построена двухэтапная DS_n -схема характеристических трубок с распределением потока по схемам типа DS_n -метода [5, 15]. Проведенные численные исследования показывают, что в некоторых случаях качество сеточного решения при использовании этой схемы по сравнению со схемами типа DS_n -метода существенно улучшается (немонотонность значительно ослабевает).

Список литературы

1. *Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А.* Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1986.
2. *Троцкий В. Е., Шумилин В. А.* Разностная схема решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных четырехугольных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1986. Т. 26, № 2. С. 230—241.
3. *Шагалиев Р. М., Плетенёва Н. П.* Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 34—41.
4. *Москвин А. Н., Шумилин В. А.* Методика решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных многоугольных сетках // Там же. Вып. 1. С. 31—40.
5. *Бочков А. И., Шумилин В. А.* Схема типа DS_n -метода решения двумерного уравнения переноса на четырехугольных пространственных сетках // Там же. 2008. Вып. 4. С. 13—18.
6. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
7. *Гольдин В. Я.* Характеристическая разностная схема для нестационарного кинетического уравнения // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133, № 4. С. 748—751.
8. *Рухтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
9. *Carlson B. G.* A Method of characteristics and other improvements in solutions methods for the transport equations // Nucl. Sci. and Eng. 1976. Vol. 61, No 3. P. 408—425.
10. *Никифорова А. В., Тарасов В. А., Троцкий В. Е.* О решении кинетических уравнений дивергентным методом характеристик // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1972. Т. 12, № 4. С. 1041—1048.
11. *Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Писарев В. Н., Стародумов О. И., Шестаков А. А.* Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 13—24.

12. Трощев В. Е., Нифанова А. В., Трощев Ю. В. Характеристический подход к аппроксимации законов сохранения в кинетических уравнениях переноса излучений // Докл. РАН. 2004. Т. 394, № 4. С. 454–458.
13. Трощев В. Е., Нифанова А. В. Подход характеристических трубок к анализу DS_n -метода и построение новых разностных схем на S_n -сетках // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 7. С. 24–42.
14. Нифанова А. В. Характеристические S_n -методы для кинетического уравнения переноса нейтронов в сферических системах. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Троицк: ТРИНИТИ, 2008.
15. Алексеев А. В., Евдокимов В. В., Шагалиев Р. М. Методика численного решения нестационарного трехмерного уравнения переноса частиц в комплексе САТУРН // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 3. С. 3–8.
16. Трощев В. Е., Трощев Ю. В. Монотонные разностные схемы с весом для уравнения переноса в плоском слое // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 1. С. 3–13.
17. Елесин В. А., Трощев В. Е., Федянин В. И., Юдинцев В. Ф. Численная методика и организация программы для решения многогруппового нестационарного кинетического уравнения // Комплексы программ математической физики. Новосибирск, 1972.
18. Трощев В. Е. О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1976. Т. 16, № 3. С. 793–797.
19. Алексеев А. В., Мжачих С. В., Плетенева Н. П., Шагалиев Р. М. Некоторые методы аппроксимации двумерного уравнения переноса по угловым переменным // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 2. С. 5–11.
20. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы (введение в теорию). М.: 1973.

Статья поступила в редакцию 01.02.10.
