

УДК 517+519+533

## ОСОБЕННОСТИ СЧЕТА ДЕТОНАЦИИ НА ЭЙЛЕРОВЫХ СЕТКАХ С НАВЯЗАННОЙ СКОРОСТЬЮ ФРОНТА

Ю. А. Бондаренко  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

В одномерных газодинамических расчетах нормальной детонации на эйлеровой сетке при отрицательном дисбалансе полной энергии порядка  $\varepsilon$  давление на фронте навязанной детонации уменьшается на величину порядка  $\varepsilon^{1/2}$ . Построено автомодельное решение, учитывающее наличие отрицательного дисбаланса полной энергии при навязанной массовой скорости фронта волны энерговыделения.

*Ключевые слова:* газовая динамика в эйлеровых переменных, детонация, численные методы, автомодельные решения, тестовые задачи, консервативность, несохранение полной энергии, точность счета.

### Введение

Предлагаемая работа является логическим продолжением работ [1, 2], в которых рассматривались проблемы счета детонации методом *контроля* фронта (моделирование нормальной детонации навязыванием скорости фронта волны энерговыделения) в газодинамических методиках на лагранжевых сетках. В настоящей работе рассмотрены некоторые особенности счета детонации методом контроля в газодинамических методиках на эйлеровых сетках. В качестве модели *эйлеровых методик* используется лагранжево-эйлеров подход, в котором на *лагранжевом этапе* применяется полностью консервативный вариант разностной схемы *крест* [3] с пересчетом на каждом шаге по времени всех газодинамических величин с лагранжевой сетки на неподвижную эйлерову сетку. В расчетах моделируется одномерное плоское движение детонационной волны с неподвижными наружными границами. Фактически это задача 1 из набора тестовых задач для детонации [4], но с начальными параметрами из работы [1].

### Тестовая задача для нормальной плоской одномерной детонации с нулевой скоростью на границе

Взрывчатое вещество (ВВ) в расчетах занимает слой  $0 \leq x \leq L = 10,0$  с неподвижными лагранжевыми внешними границами  $u(t, x)|_{x=0} = u_{\text{гран}} = 0$ . Начальные параметры ВВ —  $\rho_0 = 1,0$ ;  $E_0 = 0$ ;  $u_0 = 0$ . Для ВВ и продуктов взрыва (ПВ) используется уравнение состояния  $p = (\gamma - 1)\rho E$ ,  $\gamma = 3,0$ . Детонация инициируется на левой границе в точке  $x_{\text{лев}} = 0$ , калорийность единицы массы ВВ равна  $Q_0 = 6,25$ . Массовая скорость детонационной волны равна  $\sigma = \rho_0 D = 10,0$ .

Для нормальной детонации Чепмена—Жуге в точном решении за фронтом детонационной волны располагается автомодельная изэнтропическая волна разрежения, которая непрерывно *сшивается* с состоянием покоя. Точное решение описывается следующими хорошо известными формулами:

$$\begin{aligned} D &= D_{\text{Жуге}} = \sqrt{2(\gamma^2 - 1)Q_0} = 10,0; \\ \rho_{\text{Жуге}} &= \frac{\gamma + 1}{\gamma}\rho_0 = \frac{4}{3}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$P_{\text{ЖУре}} = \frac{\rho_0 (D_{\text{ЖУре}})^2}{\gamma + 1} = 2(\gamma - 1) \rho_0 Q_0 = 25,0; \quad (2)$$

$$u_{\text{ЖУре}} = \frac{D_{\text{ЖУре}}}{\gamma + 1} = \sqrt{2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} Q_0 = 2,5;$$

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_0, & x > D_{\text{ЖУре}} t; \\ \rho_{\text{ЖУре}} \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( 1 - \frac{x}{D_{\text{ЖУре}} t} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma - 1}}, & \frac{D_{\text{ЖУре}} t}{2} \leq x \leq D_{\text{ЖУре}} t; \\ \rho_1 = \rho_{\text{ЖУре}} \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{\frac{2}{\gamma - 1}}, & 0 \leq x \leq \frac{D_{\text{ЖУре}} t}{2}; \end{cases}$$

$$P(t, x) = \begin{cases} 0, & x > D_{\text{ЖУре}} t; \\ P_{\text{ЖУре}} \left( \frac{\rho(t, x)}{\rho_{\text{ЖУре}}} \right)^\gamma, & 0 \leq x \leq D_{\text{ЖУре}} t; \end{cases} \quad (3)$$

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & x > D_{\text{ЖУре}} t; \\ u_{\text{ЖУре}} \left[ 1 - 2 \left( 1 - \frac{x}{D_{\text{ЖУре}} t} \right) \right], & \frac{D_{\text{ЖУре}} t}{2} \leq x \leq D_{\text{ЖУре}} t; \\ 0, & 0 \leq x \leq \frac{D_{\text{ЖУре}} t}{2}. \end{cases}$$

Формулы для кинетической энергии ПВ и для полной внутренней энергии ПВ имеют вид

$$E_{\text{кин}}(t) = \int_0^{D_{\text{ЖУре}} t} \rho \frac{u^2}{2} dx = k(\gamma) \rho_0 Q_0 D_{\text{ЖУре}} t, \quad k(\gamma) = \frac{2(\gamma - 1)}{3\gamma - 1} \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \right];$$

$$E_{\text{внутр}}(t) = \int_0^{D_{\text{ЖУре}} t} \rho E dx = e(\gamma) \rho_0 Q_0 D_{\text{ЖУре}} t, \quad e(\gamma) = \frac{2(\gamma - 1)}{3\gamma - 1} \left[ \frac{\gamma}{\gamma - 1} + \left( \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \right].$$

### Постановка тестовых расчетов на эйлеровой сетке и обработка результатов

Начальная сетка в расчетах — равномерная с размером ячеек  $\Delta x = 0,008$ . Полное число ячеек в направлении распространения детонации —  $M = 1250$ . Задача считается до момента времени  $t_{\text{кон}} = 0,9$ . В силу автомодельности задачи результаты одного расчета, взятые на несколько моментов времени, могут служить в качестве результатов серии расчетов на сходимость. При этом  $M_D = t D_{\text{ЖУре}} / \Delta x$  есть число ячеек, которое проходит к моменту времени  $t$  фронт детонационной волны в точном решении. Поэтому подробную зависимость погрешности от времени в одном расчете можно использовать как подробную зависимость погрешности от числа ячеек сетки в качестве эквивалента большого числа расчетов на сходимость.

Значения относительных погрешностей давления вычисляются по формулам

$$\delta P_C(t) = \frac{\max_{j: x_{j+1/2} \leq D_{\text{ЖУре}} t} \left\{ |P_{j+1/2}^{\text{расчет}}(t) - P_{j+1/2}^{\text{точн}}(t)| \right\}}{P_{\text{ЖУре}}};$$

$$\delta P_K(t) = \left( \frac{\sum_j \Delta x_{j+1/2}(t) |P_{j+1/2}^{\text{расчет}}(t) - P_{j+1/2}^{\text{точн}}(t)|^K}{\sum_j \Delta x_{j+1/2}(t) \left( P_{j+1/2}^{\text{точн}}(t) \right)^K} \right)^{1/K}, \quad K = 1, 2.$$

Здесь через  $P_{j+1/2}^{\text{точн}}(t)$  обозначено усредненное по объему ячейки сетки давление из точного решения (3), для  $\gamma = 3,0$  равное

$$P_{j+1/2}^{\text{точн}}(t) = \frac{\int_{x_j}^{x_{j+1}} P^{\text{точн}}(t, x) dx}{x_{j+1} - x_j} =$$

$$= \frac{2}{27} P_{\text{Жуге}} \frac{4 \left( x_{j+1}^{(1)} - x_j^{(1)} \right) + D_{\text{Жуге}} t \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{x_{j+1}^{(2)}}{D_{\text{Жуге}} t} \right)^4 - \left( \frac{1}{2} + \frac{x_j^{(2)}}{D_{\text{Жуге}} t} \right)^4 \right]}{x_{j+1} - x_j},$$

$$x_j^{(1)} = \min \left\{ x_j, \frac{D_{\text{Жуге}} t}{2} \right\}; \quad x_j^{(2)} = \min \left\{ D_{\text{Жуге}} t, \max \left\{ \frac{D_{\text{Жуге}} t}{2}, x_j \right\} \right\}.$$

Из-за значительных осцилляций по времени норм погрешностей рекомендуется при тестировании численных методик вычислять их на каждом временном шаге.

Представительными являются относительные дисбалансы полной энергии и погрешности отношения внутренней энергии к кинетической энергии:

$$\text{ДБ}(t) = \frac{(E_{\text{внутр}}^{\text{расчет}}(t) + E_{\text{кин}}^{\text{расчет}}(t)) - Q_0 \rho_0 D_{\text{Жуге}} t}{Q_0 \rho_0 D_{\text{Жуге}} t} \cdot 100\%;$$

$$\delta \left( \frac{E_{\text{внутр}}}{E_{\text{кин}}} \right) = \left( \frac{11 E_{\text{внутр}}^{\text{расчет}}(t)}{97 E_{\text{кин}}^{\text{расчет}}(t)} - 1 \right) \cdot 100\%. \quad (4)$$

Нормы погрешности плотности не представительны из-за существенного влияния энтропийного следа, возникающего на левой границе.

Для моделирования нормальной детонации Чепмена—Жуге использовался метод контроля скорости фронта волны навязанного энерговыделения в своей простейшей постановке — с заданной массовой скоростью фронта волны энерговыделения без использования каких-либо дополнительных механизмов догорания типа модельной кинетики. На лагранжевом этапе использовалась полностью консервативная версия разностной схемы *крест* с квадратичной искусственной вязкостью с безразмерным коэффициентом вязкости  $A2 = 4,0$ , которая "работала" только на сжатии.

Для пересчета газодинамических величин с лагранжевой сетки на равномерную по расстоянию эйлерову сетку опробовано четыре разных метода (1—4). Во всех четырех методах сохраняется масса, объем, импульс; в методах 1 и 3 сохраняется полная энергия; в методах 2 и 4 при пересчете сохраняется внутренняя энергия и в итоге не сохраняется полная энергия. Методы 1 и 2 основаны на кусочно-линейной предельной реконструкции всех газодинамических величин и имеют второй порядок аппроксимации, методы 3 и 4 основаны на кусочно-постоянной реконструкции всех сеточных величин и имеют первый порядок аппроксимации (подробнее см. в [5]).

Список проведенных одномерных расчетов приведен в таблице. Для сравнения расчет 7 проведен в лагранжевой постановке, в этом расчете была совсем отключена искусственная вязкость (чтобы не возникало аномальных решений [1, 2]). В таблице использованы обозначения:  $\chi_{\text{Кур}}$  —

### Параметры постановки тестовых расчетов

Номер расчета	$\chi_{\text{Кур}}$	$N_t$	$\chi_{\text{дет}}$	Метод пересчета	Сохранение полной энергии метода пересчета	Порядок аппроксимации метода пересчета	ДБ, % ( $t = 0,9$ )
1	0,97	3 471	0,324	1	Консервативный	Второй	$\sim 10^{-10}$
2	0,97	3 342	0,337	2	Неконсервативный	—    —	-1,07
3	0,97	3 261	0,345	3	Консервативный	Первый	$\sim 10^{-10}$
4	0,97	3 164	0,356	4	Неконсервативный	—    —	-1,75
5	0,47	11 881	0,095	1	Консервативный	Второй	$\sim 10^{-10}$
6	0,1	226 972	0,005	1	—    —	—    —	$\sim 10^{-10}$
7	0,97	2 252	0,5	Лагранжев счет			$\sim 10^{-10}$

значение числа Куранта в условиях устойчивости лагранжевой разностной схемы с учетом вклада в условие устойчивости искусственной вязкости [6], *эйлеровость* счета учитывается в этих условиях устойчивости заменой изэнтропической скорости звука  $c_V$  на величину  $c_V + 2|u|$ ;  $N_t$  — число шагов по времени на момент окончания счета  $t_{\text{кон}} = 0,9$ ;  $\chi_{\text{дет}}$  — реализовавшееся в расчете среднее детонационное число Куранта,  $\chi_{\text{дет}} = \Delta t_{\text{средн}} D_{\text{Жуге}} / \Delta x$ .

### Результаты расчетов и их обсуждение

Результаты расчетов 5, 6 с уменьшенным шагом по времени не приводятся, так как профили и нормы погрешности давления практически не меняются при уменьшении шага. Некоторые результаты остальных расчетов приведены на рис. 1–3. В расчетах 1 и 3 с консервативным пересчетом погрешность  $\delta (E_{\text{внутр}} / E_{\text{кинет}})$  убывает, демонстрируя порядки численной сходимости 0,96 и 0,81 соответственно. В неконсервативных расчетах 2 и 4 эта погрешность стабилизируется на значениях, примерно вдвое превышающем дисбаланс полной энергии.

**Об отсутствии аномальных решений на эйлеровых сетках.** Из результатов расчетов следует, что при использовании эйлеровой сетки метод контроля скорости фронта не приводит к появлению аномальных решений в отличие от чисто лагранжева счета [1]. Это согласуется с логикой происхождения аномальных решений, подробно исследованной в [2]. Дело в том, что этап пересчета газодинамических величин с лагранжевой сетки на эйлерову вносит в совокупную разностную схему набор диссипативных процессов в каждое из уравнений газовой динамики. А диссипативные процессы делают недопустимыми скачки разрежения на фронте волны энерговыделения и тем самым запрещают аномальные решения, возникающие в лагранжевых разностных схемах второго порядка аппроксимации при отсутствии вязкости на разрежении и с вязкостью на сжатии.

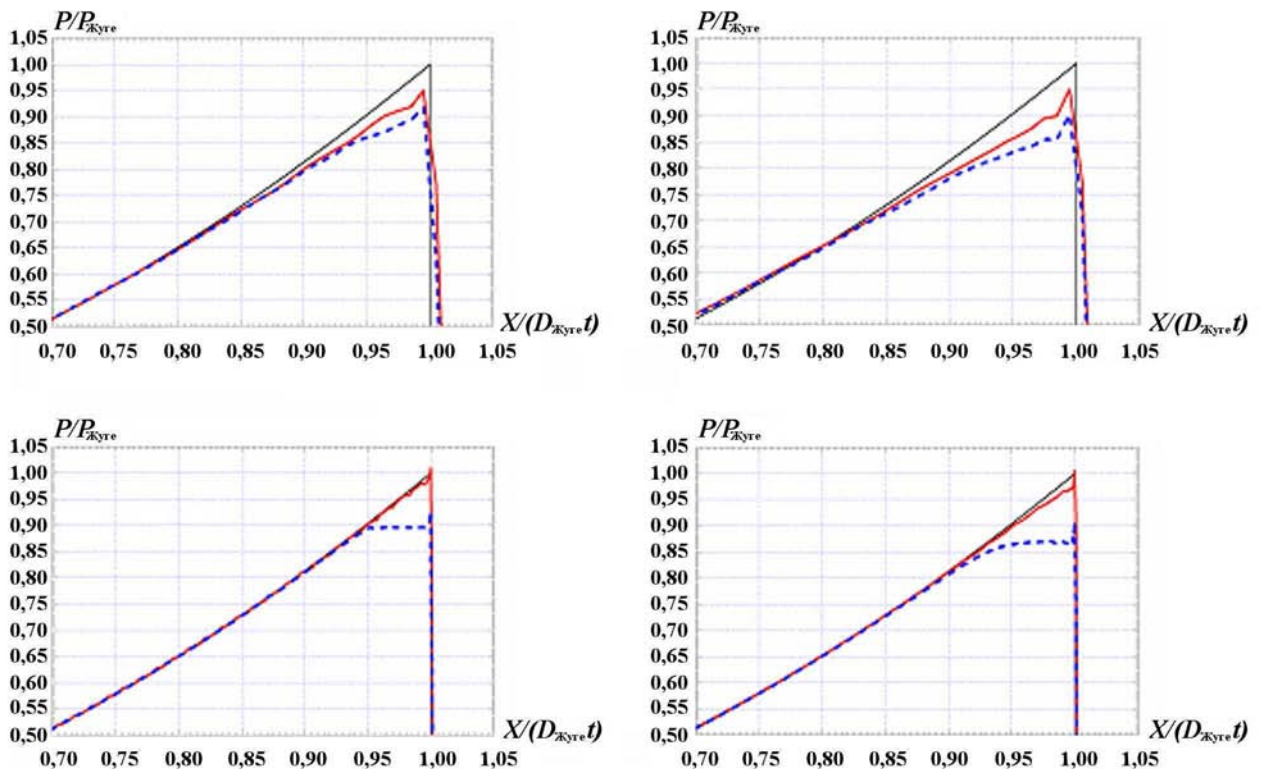


Рис. 1. Профили давления: — — точное решение; слева — расчеты 1 (—) и 2 (---); справа — расчеты 3 (—) и 4 (---); сверху —  $t = 0,08$  ( $M_D = 100$ ); внизу —  $t = 0,8$  ( $M_D = 1000$ )

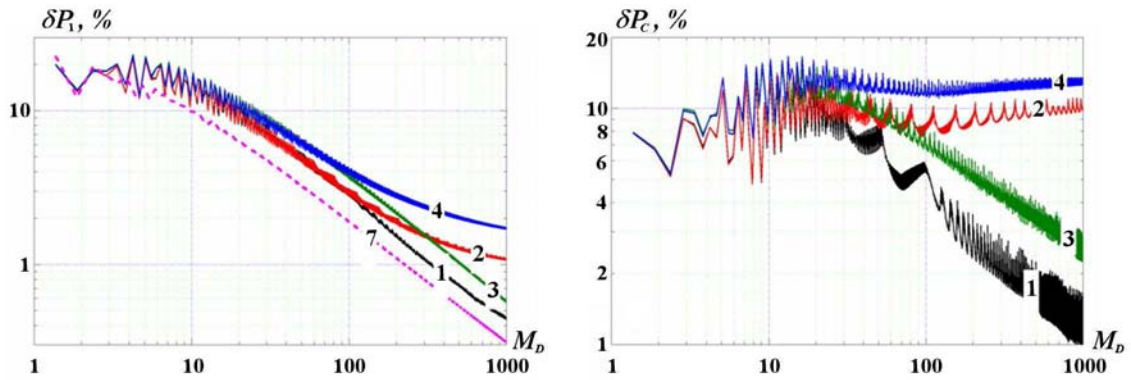


Рис. 2. Нормы относительных погрешностей давления  $\delta P_1$  (слева) и  $\delta P_C$  (справа); цифры на кривых — номера расчетов

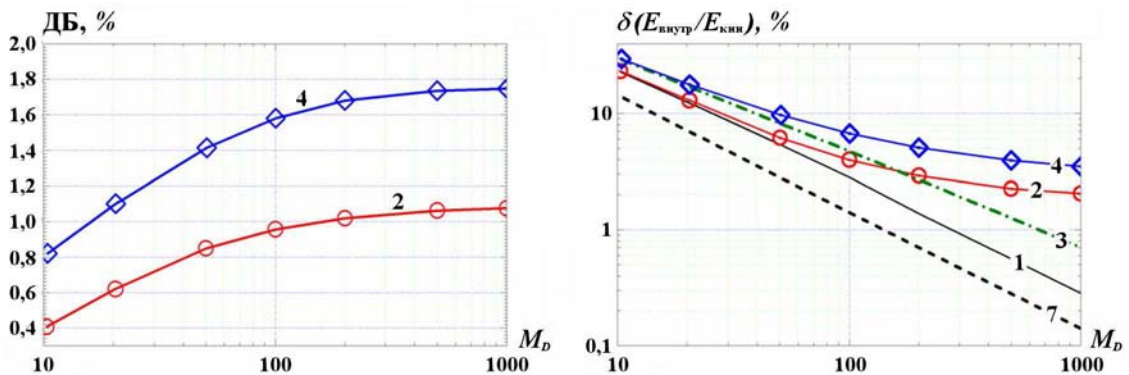


Рис. 3. Зависимости энергетических погрешностей от времени: слева — дисбаланс полной энергии в неконсервативных расчетах; справа — погрешности отношения внутренней энергии к кинетической; цифры на кривых — номера расчетов

**Влияние несохранения полной энергии на точность.** Наличие отрицательного дисбаланса полной энергии (в неконсервативных методах пересчета) можно трактовать как уменьшение калорийности ВВ на соответствующую величину:

$$Q_{эф} = (1 - \delta_E) Q_0. \quad (5)$$

В то же время массовая скорость движения фронта волны энергосвечения при использовании метода контроля остается равной заданной массовой скорости Жуге

$$\sigma_{Жуге} = \rho_0 D_{Жуге} = \rho_0 [2(\gamma^2 - 1) Q_0]^{1/2}, \quad (6)$$

что больше скорости Жуге, согласованной с уменьшенной калорийностью  $Q_{эф}$ . Уравнения Ренкина—Гюгонно для этих условий имеют вид

$$P_{фронт} = (\sigma_{Жуге})^2 \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_{фронт}} \right);$$

$$E_{фронт} = \frac{1}{2} P_{фронт} \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_{фронт}} \right) + Q_{эф}.$$

Отсюда с учетом уравнения состояния и формул (5), (6), (1) и (2) получаем (для любого  $\gamma > 1$ )

$$\frac{P_{фронт}}{P_{Жуге}} = 1 - (\delta_E)^{1/2}. \quad (7)$$

Явный вид автомодельного решения при сниженном навязанном энерговыделении (5) для давления вместо (3) имеет вид

$$P^{\text{ДВ}}(t, x) = \begin{cases} 0, & \frac{x}{D_{\text{Журег}}t} > 1; \\ P_{\text{фронт}} = P_{\text{Журег}}(1 - \sqrt{\delta_E}), & \xi_1 \leq \frac{x}{D_{\text{Журег}}t} \leq 1; \\ P_{\text{разреж}}(t, x), & \xi_2 \leq \frac{x}{D_{\text{Журег}}t} \leq \xi_1; \\ P_{\text{покой}}, & 0 \leq \frac{x}{D_{\text{Журег}}t} \leq \xi_2; \end{cases} \quad (8)$$

$$\xi_1 = 1 - \sqrt{\delta_E} \frac{\sqrt{1 + \gamma^{-1}\sqrt{\delta_E}}}{\sqrt{1 + \gamma^{-1}\sqrt{\delta_E} + \sqrt{1 - \sqrt{\delta_E}}}} \approx 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\delta_E} - \frac{\gamma + 1}{8\gamma}\delta_E;$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{\delta_E}{\left(\sqrt{1 + \gamma^{-1}\sqrt{\delta_E}} + \sqrt{1 - \sqrt{\delta_E}}\right)^2} \approx \frac{1}{2} - \frac{\gamma + 1}{8\gamma}\delta_E;$$

$$P_{\text{разреж}}(t, x) = P_{\text{Журег}}(1 - \sqrt{\delta_E}) \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\xi_1 - \frac{x}{D_{\text{Журег}}t}}{\sqrt{(1 + \gamma^{-1}\sqrt{\delta_E})(1 - \sqrt{\delta_E})}} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \approx$$

$$\approx P_{\text{Журег}} \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( 1 - \frac{x}{D_{\text{Журег}}t} \right) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \left[ 1 - \frac{\frac{\gamma + 1}{2\gamma^2} \left( 1 - \frac{x}{D_{\text{Журег}}t} \right) \delta_E}{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( 1 - \frac{x}{D_{\text{Журег}}t} \right)} \right];$$

$$P_{\text{покой}} = P_{\text{Журег}}(1 - \sqrt{\delta_E}) \left( 1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{\delta_E}}}{\sqrt{1 + \gamma^{-1}\sqrt{\delta_E}}} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \approx P_{\text{Журег}} \left( \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \left( 1 - \frac{\gamma + 1}{2\gamma}\delta_E \right).$$

Из (7) получаем, что в расчете 2 с дисбалансом полной энергии на конечный момент времени  $\delta_E \approx 0,0107$  ошибка давления на фронте составляет примерно 10%, а в расчете 4 с дисбалансом полной энергии  $\delta_E \approx 0,0175$  — примерно 13%. Это идеально соответствует результатам указанных расчетов на самой подробной сетке (см. рис. 1).

Отношение внутренней энергии системы к кинетической энергии на мелкой сетке также зависит от несохранения полной энергии. Для решения (8) это отношение равно

$$\frac{E_{\text{внутр}}}{E_{\text{кин}}} \approx \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} + \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}{\frac{1}{2} - \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}} \left\{ 1 + \frac{\frac{(3\gamma-1)(\gamma+1)}{8\gamma(\gamma-1)} \left[ 1 + \frac{\gamma-3}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right]}{\left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} + \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right] \left[ \frac{1}{2} - \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right]} \delta_E \left( 1 + O(\sqrt{\delta_E}) \right) \right\}.$$

Поэтому в расчетах по неконсервативной методике с постоянным дисбалансом для  $\gamma = 3,0$  в пределе бесконечно мелкой сетки погрешность (4) оценивается снизу следующим образом:

$$\delta \left( \frac{E_{\text{внутр}}}{E_{\text{кин}}} \right) \geq \delta^{\text{ДВ}} \left( \frac{E_{\text{внутр}}}{E_{\text{кин}}} \right) (t) \approx \frac{1944}{1067} \delta_E. \quad (9)$$

Как видно из рис. 3 справа, предельные (для самого большого времени и тем самым для самой мелкой сетки) погрешности отношения внутренней энергии к кинетической в неконсервативных расчетах 2 и 4 хорошо согласуются с (9).

**Сравнение точности и экономичности счета детонации разными методами.** Обсудим влияние разных способов счета детонации на экономичность.

Во-первых, переход от лагранжева счета к эйлерову с консервативным методом пересчета второго порядка аппроксимации требует для достижения прежней точности счета увеличить число точек сетки примерно в два раза. Этот вывод справедлив только в том случае, когда в лагранжевом расчете специальными мерами обеспечено отсутствие перескока на аномальное решение [1].

Во-вторых, переход в эйлеровом счете с пересчета второго порядка аппроксимации к пересчету первого порядка аппроксимации (оба консервативные) для сохранения точности требует уменьшения размеров ячеек также примерно в два раза.

Напомним [5], что возможность укрупнения сетки в два раза при сохранении точности позволяет надеяться, что одномерный расчет можно "удешевить" примерно в 4 раза, двумерный расчет — примерно в 8 раз, а трехмерный — примерно в 16 раз.

В-третьих, для неконсервативного метода пересчета мало полезны расчеты с числом точек сетки в основном направлении больше 100—150, так как при дальнейшем измельчении сетки погрешности уменьшаются очень слабо, что видно, например, из рис. 2 и 3. Поэтому при значении  $\delta_E$  дисбаланса полной энергии не стоит брать в расчетах полное число точек сетки в направлении движения фронта больше, чем  $M_\delta \sim 2/\delta_E$ .

### Заключение

Как ожидалось, в расчетах на эйлеровой сетке отсутствует перескок численного решения с решения Чепмена—Жуге на аномальное решение, который был обнаружен в [1] в расчетах на лагранжевых сетках. При использовании консервативных методов пересчета с ростом времени (что в силу автомодельности тестовой задачи эквивалентно измельчению сетки в расчетах на сходимость) численное решение сходится к точному решению типа Чепмена—Жуге.

В расчетах на эйлеровых сетках наблюдается заметное влияние на точность счета небольших дисбалансов полной энергии, возникающих вблизи фронта. Например, дисбаланс полной энергии в 1% приводит к уменьшению давления на фронте волны (на самой мелкой сетке) на 10%, дисбаланс в 0,1% — к уменьшению давления на 3%. В неконсервативных расчетах дисбаланс полной энергии стабилизируется на некотором значении, которое не уменьшается при измельчении сетки. В результате нормы погрешностей, достигнув некоторого предельного значения, зависящего от дисбаланса, также не уменьшаются при дальнейшем измельчении сетки (наблюдается численная сходимость к неправильному решению).

Построено автомодельное решение, описывающее результаты неконсервативных расчетов на мелкой сетке. Основные особенности поведения погрешностей, полученных в неконсервативных расчетах, согласуются со свойствами этого автомодельного решения.

Сравнение счетных погрешностей расчетов, проведенных разными способами, подтвердило хорошо известный факт, что использование более точных методов позволяет существенно экономить вычисления при достижении одинаковой точности.

### Список литературы

1. Бондаренко Ю. А. Свойства решений при счете нормальной детонации навязыванием энерговыделения с заданной скоростью фронта // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 1. С. 3—18.
2. Бондаренко Ю. А. Влияние вязкости и дисперсии на допустимость скачков разрежения, возникающих на фронте энерговыделения, бегущего с заданной массовой скоростью // Там же. 2009. Вып. 2. С. 3—20.
3. Бондаренко Ю. А. Консервативное расщепление уравнения энергии в разностных схемах типа "крест" для лагранжевой газодинамики // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 8. С. 1020—1023.
4. Сучков В. А., Шнитко А. С., Жилина Р. А., Исламова Л. Р. Газодинамическое моделирование движения детонационных волн: Препринт № 210. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2004.

5. *Бондаренко Ю. А.* Порядок аппроксимации, порядок численной сходимости и экономичность счета многомерной газовой динамики в переменных Эйлера на примере расчетов задачи "blast waves" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 51–61.
6. *Bondarenko Yu. A., Zmushko V. V., Stenin A. M.* Local and nonlocal stability conditions of difference schemes for calculating gas-dynamics problems in Lagrangian coordinates // Numerical Methods in Fluid Dynamics / Ed. N. N. Yanenko and Yu. I. Shokin. M.: Mir, 1984. P. 245–264.

Статья поступила в редакцию 10.04.10.

---