

УДК 533.6.011.72

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

А. Л. Адрианов

(СибГАУ им. академика М. Ф. Решетнева,
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск)

Моделируется процесс взаимодействия скачка уплотнения со сдвиговым слоем в вязкой и невязкой постановках задачи. Скачок схематизируется криволинейной поверхностью сильного газодинамического разрыва, на которой выполняются обобщенные асимптотические соотношения нулевого и первого порядков, учитывающие вязкость и теплопроводность. Получено стационарное аналитическое решение задачи. Проведено сравнение одного из частных решений с соответствующим численным решением полных уравнений Навье—Стокса. Показано, что учет в явном виде фактора вязкости-теплопроводности в дифференциальной модели при расчете возмущенного течения в слое может привести к неверному конечному результату. Изучается влияние краевого эффекта на действие фактора вязкости-теплопроводности.

Ключевые слова: криволинейный скачок уплотнения (СУ), вязкий теплопроводный совершенный газ, сдвиговый слой, схематизация скачка поверхностью сильного газодинамического разрыва, обобщенные дифференциальные соотношения (условия) на криволинейном СУ, уравнения Навье—Стокса, число Рейнольдса, асимптотический подход, краевой эффект, дополнительная дифференциальная связь, вихревая модель, невязкое решение, аналитическое решение.

Введение

Исследованию задачи, родственной той, что рассматривается в настоящей работе, а именно задачи о взаимодействии скачка уплотнения (СУ) с пограничным слоем (ПС), а также изучению вопроса о необходимости учета в соотношениях на *схематизируемых* поверхностях разрыва в диссипативных средах дополнительных членов посвящена обширная литература, в частности [1–5]. Задача о взаимодействии СУ с ПС исследуется методами физического и вычислительного эксперимента сравнительно давно и стала уже пробной для вычислительных методик на основе полных нестационарных уравнений Навье—Стокса (УНС)¹, а также асимптотических методов расчета, например [6–14].

В случае взаимодействия СУ со сдвиговым слоем (СС) задача остается актуальной, поскольку часто встречается в реальных и моделируемых течениях. С математической точки зрения она привлекательна еще и потому, что вышеуказанное взаимодействие в пределе — в рамках стационарной газовой динамики — может рассматриваться как более простая задача [15, 16] о взаимодействии СУ и тангенциального разрыва. Исследованию устойчивости самого тангенциального разрыва в различных средах посвящены, например, работы [17–20].

Случай конечных, но больших чисел Рейнольдса (Re_∞) интересен сам по себе, поскольку толщины взаимодействующих элементов — СУ и СС — по-разному зависят от Re_∞ и могут значительно

¹Другое, возможно, более правильное название этих уравнений — уравнения вязкого теплопроводного сжимаемого газа.

отличаться. Основными физическими факторами, определяющими решение этой задачи, являются неравномерность газодинамических параметров в слое, начальная интенсивность падающего скачка, собственно фактор *вязкости-теплопроводности* (ВТ). Неучет уже непосредственно в задаче взаимодействия последнего фактора и, следовательно, взятие за основу не УНС, а уравнений Эйлера (УЭ) приводит к *вихревой модели взаимодействия* (ВМВ) [21]. Однако поскольку в процессе формирования невозмущенного СС фактор ВТ играет основную роль, определяя главное — поперечные масштабы СС и компоненту скорости (см., например, [14]), то неявно, как параметр, ВТ все равно попадает в окончательный результат. По этой причине используемое далее в тексте настоящей работы словосочетание *невязкий случай* имеет, как правило, условный смысл, подразумевая использование *невязких уравнений* непосредственно лишь при расчете взаимодействия СУ и СС, ранее сформировавшегося под действием ВТ.

В настоящей работе продолжены исследования [21–28] взаимодействия СУ и СС на основе оригинальной *стационарной математической модели*, учитывающей действие фактора ВТ асимптотически ($Re_\infty \rightarrow \infty$); газодинамические члены уравнений при этом учитываются точно. Существенно, что данная модель и вычислительный алгоритм предполагают явное выделение, точнее *схематизацию* СУ.

Схематично для невязкого случая процесс проникновения СУ в непрерывный вихревой СС (взята сверхзвуковая часть ПС) в физической плоскости представлен на рис. 1, а. Здесь 1–3 — основные элементы рефракции скачка; 4 — *догоняющие возмущения* [29], несущие *краевой эффект* (КЭ); τ и $\hat{\tau}$ — одна и та же линия тока до и за СУ соответственно, являющаяся вырожденным тангенциальным разрывом: его интенсивность обратно пропорциональна количеству разбиений непрерывного профиля скорости. На рис. 1, б с большей степенью схематизации (исключен КЭ 4) представлена динамика этого процесса в плоскости *ударно-волновых поляр* [15, 30, 31] в координатах $(\beta, \Lambda = \ln J)$, где β — угол преломления вектора скорости на СУ, а $J = \hat{p}/p$ — его интенсивность. Поляры 1, 2 на рис. 1, б соответствуют двум соседним линиям тока (см. рис. 1, а) невозмущенного течения с малым различием чисел Маха, а поляра 3 — линии тока за падающим СУ (с числом Маха \hat{M}).

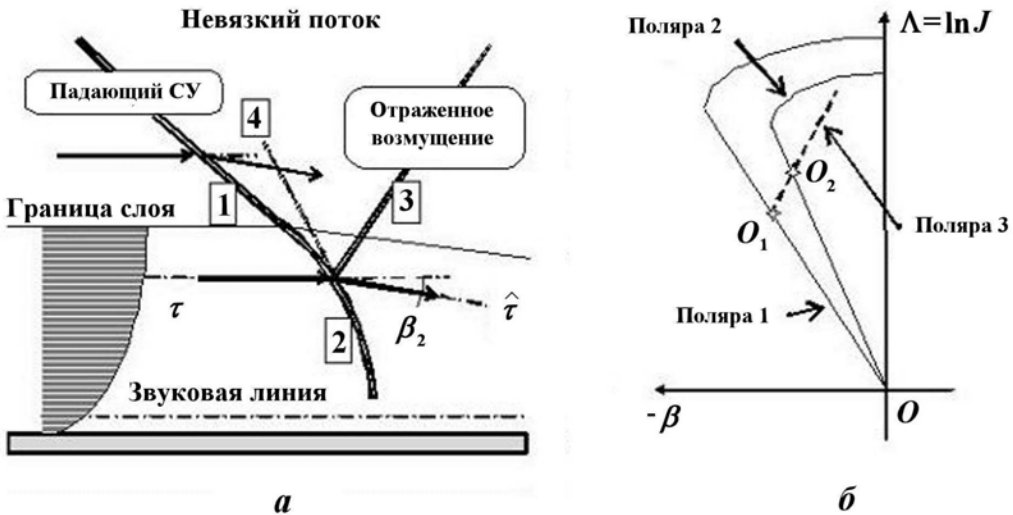


Рис. 1. Схема взаимодействия СУ и СС в невязкой (вихревой) плоской постановке: а — физическая плоскость; б — плоскость поляр

1. Основные допущения

Приведем допущения, используемые в настоящей работе:

Д1. Газ считается совершенным, а сдвиговое течение по обе стороны СУ — двумерным (плоская или осевая симметрия) стационарным сверхзвуковым ламинарным при больших числах Рей-

нольдса ($Re_\infty \geq 10^3$, $Pr \sim 1$).

- Д2. СУ схематизируется поверхностью сильного газодинамического разрыва.
- Д3. Справедливо *погранслоиное* соотношение масштабов производных в гладких подобластях (вне СУ из Д2) сдвигового течения.
- Д4. Невозмущенный сверхзвуковой СС рассматривается как источник: отсутствует распространение возмущений вверх по потоку, в частности, с помощью механизма теплопроводности.
- Д5. Реальный КЭ за СУ (элемент 4 на рис. 1, а) посредством дифференциальной связи заменяется *модельным*, в частности, исключается вовсе.

Из перечисленных допущений в обосновании нуждаются лишь два последних; Д2 и Д3 обоснованы в работе [23] (см. также [32—42]). Д4 основывается на многочисленных физических и вычислительных экспериментах и позволяет при схематизации СУ (Д2) геометрически разделить всю решаемую задачу на невозмущенную (источник) и возмущенную части. Заметим, что в рамках УНС обосновать это непросто, поскольку параболический характер данных уравнений не позволяет формально исключить из расчета какую-либо часть расчетной области. При этом аккуратный проведенный анализ представляющих интерес численных решений УНС приводит к мысли о том, что данное допущение имеет под собой фактическую основу. Обоснованию Д5 посвящена работа [21], где, в частности, доказано, что в невязком случае исключение КЭ, являющееся частным случаем Д5, эквивалентно рефракционной (трехэлементной — см. рис. 1) схеме взаимодействия СУ и СС.

Необходимо констатировать, что применение высокоточного и вполне адекватного невязкой постановке задачи *метода выделения разрывов* (см., например, [39—43, 29, 30]) для моделирования течений вязкого теплопроводного газа, содержащего скачки, несмотря на имеющийся отдельный опыт, не является общепринятым.

Покажем, что *метод схематизации скачка* может эффективно применяться для моделирования стационарных ударно-волновых течений вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса и хорошо сочетается с использованием аналитического подхода.

Перейдем к описанию математического аппарата. Заметим, что фактическая выполнимость обычных *условий на косом СУ* [30, 23] означает, что при больших числах Re_∞ фактор ВТ может справедливо не учитываться в локальных соотношениях на *сильном разрыве* [15, 29, 30]. С другой стороны, последний термин является чисто формальным, и уже интуитивно ясно, что при значительной неравномерности СС и средних числах Re_∞ влияние фактора ВТ должно корректно учитываться математической моделью. ВМВ [21], несмотря на высокое качество разрешения окрестности СУ за счет его явного выделения, к сожалению, никак не учитывает указанного фактора. Отказ от схематизации СУ (см., например, [36—38]) и переход на *сквозной счет* в рамках полных УНС или их параболизированного варианта — ПУНС (см., например, [6—10]) с целью учета фактора ВТ представляется неоправданным, поскольку резко понижает разрешающую способность и эффективность вычислительного алгоритма, одновременно увеличивая и его насыщенность [44]. И наоборот, сделанные допущения позволяют, как и в случае ВМВ [21], рассматривать фронт СУ, проникающий в слой вязкого теплопроводного газа, как траекторию материальной частицы в подходе Лагранжа и произвести редукцию исходной начально-краевой задачи для УНС в частных производных к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При такой постановке задачи газодинамические параметры определяются только на криволинейной поверхности СУ и в ближайшей ее окрестности.

Представляется, что наиболее правильным решением-выходом в этой ситуации будет доработка аккуратной ВМВ [21] на случай больших (но конечных) чисел Re_∞ [24—28]. Для построения такой модели взаимодействия воспользуемся полученными в [22, 23] *обобщенными дифференциальными соотношениями на СУ* (ОДСС)². В отличие от своего "невязкого предшественника" — *дифференциальных соотношений* (ДС) [45, 30, 31] — ОДСС являются приближенными асимптотическими выражениями при $Re_\infty \rightarrow \infty$ и в пределе совпадают с ДС.

²Иначе: ОДСС — обобщенные соотношения первого порядка.

2. Обобщенные дифференциальные соотношения на скачке уплотнения

Приведем из [23] постановку задачи и окончательную форму записи ОДСС.

Рассматривается сверхзвуковое движение вязкого теплопроводного ($\text{Pr} \sim 1$) газа (Д1) с образованием в поле течения СУ и СС. Известно [8], что толщины этих образований после соответствующего обезразмеривания величин имеют разный асимптотический масштаб при $\text{Re}_\infty \rightarrow \infty$: толщина СС $\delta_\tau \sim \varepsilon = (\text{Re}_\infty)^{-1/2}$ — малый параметр, толщина СУ $\delta_s \sim \varepsilon^2$ — обратное число Рейнольдса. Таким образом, в задаче присутствуют три линейно независимых масштаба: 1, ε , ε^2 , причем $1 \gg \varepsilon \gg \varepsilon^2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где единица соответствует характерному размеру задачи. Учитывая данную "вилку" масштабов, исключим наименьший из них (Д2). Приведем ОДСС [23], выполняющиеся на криволинейной поверхности *схематизированного* СУ:

$$a_{i,j} \left(\widehat{\Phi}_j \right)_{\widehat{n}} + b_i K_w + c_{i,j} (\Phi_j)_n + d_i \frac{\delta}{y} + \varepsilon^2 \left[e_{i,j} \left(\widehat{\Phi}_j \right)_{\widehat{n}\widehat{n}} + f_i K'_w + g_{i,j} (\Phi_j)_{nn} + N_i \right] = 0, \quad (1)$$

$$\Phi = (W, \theta, p, h)^T, \quad i, j = 1, \dots, 4,$$

где

$$\delta = 0 \ (\delta = 1); \quad \varepsilon^2 = (\text{Re}_\infty)^{-1}; \quad N_i = N_i \left(\left(\widehat{\Phi}_j \right)_{\widehat{n}}, (\Phi_j)_n, \widehat{\Phi}_j, \Phi_j, K_w \right).$$

В (1) применено суммирование по повторяющемуся индексу j ; величины K_w и K'_w представляют собой соответственно продольную кривизну СУ (в отличие от радиальной кривизны $1/y$ в осесимметричном случае) и производную от нее; вектор \mathbf{N} явно объединяет нелинейные слагаемые. Заметим, что в невязком случае ($\varepsilon^2 = 0$ в обобщенных соотношениях нулевого и первого (ОДСС) порядков; ОДСС \rightarrow ДС [23]) уравнения (1) будут линейными относительно первых производных, что позволяет после замыкания ДС найти для производных явные аналитические зависимости. Все производные записаны в локальной естественной системе координат (s, n) (за СУ — $(\widehat{s}, \widehat{n})$, рис. 2; величины за СУ в (1) также помечены надстрочным символом " $\widehat{}$ "). Функциональные матрицы (векторы) коэффициентов A, \dots, G сложным образом зависят от газодинамических величин по обе стороны СУ. В невязком случае A, \dots, D в (1) после соответствующих допустимых преобразований в точности приводятся к матрицам в [45]. В (1) p — давление; ρ — плотность; W — модуль скорости; $h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$ — энтальпия; $\gamma = c_p/c_v$ — показатель изэнтропы; θ и $\widehat{\theta}$ — углы наклона соответствующих линий тока (s и \widehat{s}) к оси OX декартовой системы координат XOY (см. рис. 2). Ось OX либо является осью симметрии ($\delta = 1$), либо лежит в плоскости симметрии течения ($\delta = 0$). На том же рис. 2 острый угол σ между вектором скорости \vec{W} и СУ (между \vec{s} и $\vec{\tau}_s$) определяет интенсивность СУ: $|\sigma| \geq \alpha_M$, где $\alpha_M = \arcsin(1/M)$ — угол Маха, а знак χ угла σ определяет семейство, к которому принадлежит скачок (характеристика при $\sigma = \chi \alpha_M$) в предельном невязком случае. Предполагается, что все величины обезразмерены [23].

Проанализируем ОДСС (1), полагая, что коэффициенты A, \dots, G на данный момент, т. е. в данной точке СУ, уже вычислены и газодинамические параметры по обе стороны СУ удовлетворяют соотношениям нулевого порядка [23]. Газодинамический процесс в касательном к СУ направлении считается гладким. Тогда (1) содержит 10 неизвестных величин: 8 нормальных производных первого-второго порядка от величин за СУ, его кривизну и производную от нее. Производные от тех же величин в невозмущенном СС полагаем известными (Д4) [21–28].

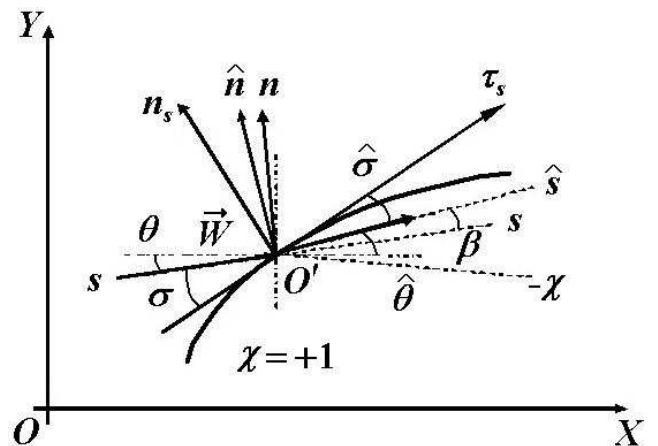


Рис. 2. Собственные системы координат, связанные с СУ и линией тока

Напомним [23], что *вязкие слагаемые* в (1) возникли по двум причинам — из-за учета фактора ВТ:

- а) в первообразных соотношениях на СУ;
- б) в дифференциальных законах сохранения в гладкой окрестности СУ.

Следовательно, при моделировании ударных процессов на основе ОДСС (1) для выявления вклада указанных отдельных *вязких компонентов* целесообразно рассматривать как совместное, так и раздельное их влияние на конечный результат вычислений (см. разд. 6).

Заметим, что даже при полной определенности всех параметров и производных по обе стороны СУ и всех производных в течении до него превратить ОДСС в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, выполняющихся вдоль его фронта, возможно лишь после замыкания (1). Недостающие уравнения, связывающие неизвестные производные за СУ, удастся получить, заменив реальный КЭ модельным (Д5).

3. Исключение или замена реального КЭ модельным

Сначала рассмотрим случай исключения КЭ в рамках модели невязкого и нетеплопроводного газа. Известно (см., например, [15, 29, 45, 30]), что в отличие от *слабого разрыва* СУ требует для своей определенности задания одного дополнительного параметра, в частности, наклона СУ к втекающей в него линии тока ($\text{tg } \sigma$, см. рис. 2). Тогда все параметры за СУ определяются однозначно. Такая задача согласно классификации [31, 30] является *задачей нулевого порядка*. Для расчета кривизны СУ и производных от газодинамических функций за ним должна решаться следующая по рангу *задача первого порядка*. ДС [31, 30] (или, что то же, ОДСС (1) при $\varepsilon^2 = 0$) оказывается недостаточной: для замыкания ДС необходимо задать либо саму кривизну СУ, либо какую-нибудь из производных за ним, либо их комбинацию. В качестве таковой может быть использована дополнительная *дифференциальная связь* [46], исключающая КЭ за СУ [21]. Система (1) при этом делается однозначно разрешимой относительно производных в любой расчетной точке СУ и может быть проинтегрирована по ходу его эволюции.

При внешней схожести задач нулевого и первого порядков между ними есть существенное отличие: при решении задачи нулевого порядка не задавать параметр, определяющий наклон СУ, нельзя, а при решении задачи первого порядка явно не задавать ту или иную производную, определяющую кривизну СУ, можно. Как доказано в [21], всегда существует нетривиальная комбинация производных за ним, используя которую удастся корректно замкнуть задачу первого порядка. Наиболее универсальным и правильным из такого рода дополнительных условий за СУ является условие [21]

$$\widehat{p}_{\widehat{s}} + \widehat{m}^{-\chi} \widehat{p}_{\widehat{n}} = 0, \quad \widehat{m}^{-\chi} = \frac{-\chi}{\sqrt{\widehat{M}^2 - 1}} = -\chi \text{tg}(\widehat{\alpha}_M), \quad (2)$$

в физическом смысле означающее исключение КЭ за СУ, приносимого догоняющими возмущениями (элемент 4 на рис. 1, а). Коэффициент $\widehat{m}^{-\chi}$ в (2) фиксирует в $(\widehat{s}, \widehat{n})$ -координатах наклон характеристики противоположного скачку семейства (отраженная характеристика $-\chi$ за СУ на рис. 2); \widehat{M} , $\widehat{\alpha}_M$ — число и угол Маха за СУ. Следовательно, (2) означает, что направление $\widehat{m}^{-\chi}$ является изобарическим для точек на задней поверхности СУ. Таким образом, без явного задания самих производных за СУ тем не менее жестко фиксируется локальный наклон изобары за СУ. Из практических расчетов на основе УЭ [21, 30] замечено, что в ряде газодинамических течений (исключая, например, задачи сверхзвукового обтекания) (2) с достаточной точностью выполняется само по себе, и поэтому явное "навязывание" его же в качестве дополнительной дифференциальной связи (Д5) не вредит решению исходной задачи. Из расчетов по предлагаемой в настоящей работе модели также следует, что вариация коэффициента $\widehat{m}^{-\chi}$ в (2) приводит к малому изменению соответствующего решения, чем удобно воспользоваться при оценке влияния КЭ на действие фактора ВТ.

Применение исключаящего условия (2) в некотором смысле уподобляет СУ конечной интенсивности — характеристике, за которой, как известно [29, 30], не требуется ничего задавать для определения ее формы (кривизны). Вместе с тем очевидно, что такой СУ должен рассматриваться

уже как модельный, а соответствующая ему кривизна, определенная из ОДСС (1) с учетом (2), получила название *рефракционной* [21], поскольку соответствует физическому процессу рефракции фронта СУ. Догоняющие возмущения 4 (см. рис. 1, а) в этом случае отсутствуют. Следует отметить, что термин *рефракция* одинаково применим как к электромагнитным, так и к акустическим волновым фронтам, несмотря на их различную физическую природу. Применительно к СУ (ударным волнам) данный термин использовался, например, в [16, 30, 31]. Для газодинамических задач с непрерывным профилем параметров в слое, на который падает СУ, локальное дискретное представление процесса взаимодействия в виде *рефракционной схемы* (рис. 1, а без элемента 4) является всего лишь возможной моделью (отсюда и термин — *модельная кривизна* СУ [21]).

В настоящей работе условие (2) применяется уже к *вязкой задаче*, следовательно, от (2) должно браться еще его *дифференциальное следствие* [25, 26], которое с физической точки зрения означает более гладкое касание изобарой характеристики, выходящей из СУ.

С использованием УЭ условие (2), как и его следствие, может быть переписано в терминах чисто нормальных производных [21]:

$$\frac{\partial \ln \hat{p}}{\partial \hat{n}} + \chi \Gamma(\hat{M}) \left(\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{n}} + \frac{\delta}{y} \sin \hat{\theta} \right) = 0, \quad \Gamma(\hat{M}) = \frac{\gamma \hat{M}^2}{\sqrt{\hat{M}^2 - 1}}, \quad (3)$$

где комплекс $\Gamma(\hat{M})$, введенный в [31, 30], имеет, как и $\hat{m}^{-\chi}$ в (2), ясный физический смысл и представляет собой модуль наклона ударной поляры 3, изображенной на рис. 1, б, в начале ее системы координат — точке O_1 . Следовательно, если множитель перед скобкой в (3) имеет значение, отличное от $\chi \Gamma(\hat{M})$, то имеет место тот или иной КЭ и, следовательно, такое условие не будет исключаяющим.

Правомерность использования (2), (3) в вязкой задаче можно обосновать тем, что данное условие применяется в полубласти за СУ, где с достаточной точностью выполняются УЭ: вязкие члены в УНС или ПУНС в масштабе СС имеют порядок $O(\varepsilon)$ и выше при $Re_\infty \rightarrow \infty$ (см., например, [14]). Если все же при переходе от (2) к (3) вместо УЭ использовать ПУНС, то последнее условие будет содержать уже и вязкие члены, однако из расчетов следует, что при больших Re_∞ их роль незначительна. Следует обратить внимание на то, что форма записи (3) исключаяющего условия содержит в случае осевой симметрии ($\delta = 1$) введифференциальный источниковый член.

Следующим шагом, расширяющим возможные способы задания КЭ, является рассмотрение (2) или (3) как комбинации производных с произвольными (имеются ограничения) весовыми коэффициентами. Предполагается также и замена нуля в правой части равенства некоторой величиной типа отмеченного выше источникового члена. Такое расширение (2) делает возможным явное задание в том числе и реального КЭ за СУ, если таковой известен, без решения исходной начально-краевой задачи. Очевидно, что данная возможность должна рассматриваться как существенное достоинство настоящего подхода.

Подстановка функциональных выражений для $\hat{p}_{\hat{n}}$, $\hat{p}_{\hat{n}\hat{n}}$ из (2) и его дифференциального следствия в (1) приводит к изменению части коэффициентов в (1). Условимся, если это не вредит смыслу задачи, обозначения преобразованных и исходных коэффициентов в (1), равно как формы записи исключаяющего условия (2) или (3), в дальнейшем не различать.

4. Вычислительный алгоритм для частного случая — интегрирования *невязки* уравнений

Рассмотрим сначала более простой случай, когда при расчете взаимодействия СУ и СС используется модель невязкого нетеплопроводного газа — ВМВ. СС в этом случае следует рассматривать просто как вихревой слой. При сделанных допущениях задача определения неизвестного вектора производных $\mathbf{X} = \left(\widehat{W}_{\hat{n}}, \widehat{\theta}_{\hat{n}}, K_w, \widehat{h}_{\hat{n}} \right)^T$ из линейных относительно его компонент ДС легко разрешима, поскольку функциональная матрица коэффициентов $A = (a_{i,j=1,2}, b_i, a_{i,4})_{i=1,\dots,4}$ не содержит вязких членов и хорошо обусловлена в любой точке СУ. Таким образом, единожды разрешив в

общем виде предварительно замкнутую систему (1) с $\varepsilon^2 = 0$, получим явные формульные выражения для всех компонент \mathbf{X} . Далее при нахождении решения вдоль СУ можно поступить двумя различными способами.

Первый способ [21] предполагает повторное интегрирование только третьей компоненты вектора \mathbf{X} — разрешенного в явном виде формульного выражения для кривизны СУ $K_w \equiv X_3$, зависящего от текущих параметров источника (Д4) и интенсивности СУ J (или углов σ , Ω — наклона СУ к оси OX — и т. п.). Таким образом, добавив известные геометрические соотношения, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dw} &= K_w(w, \Omega(w)); & \frac{dx}{dw} &= \cos \Omega(w); & \frac{dy}{dw} &= \sin \Omega(w); \\ K_w &= y'' [1 + (y')^2]^{-3/2} = y'' \cos^3 \Omega; & y' &\equiv \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Последовательным интегрированием выражения для K_w могут быть получены наклон и координаты СУ в новой расчетной точке (x_{s+1}, y_{s+1}) по ходу его эволюции:

$$\Omega(w_{s+1}) = \Omega_s + \int_{w_s}^{w_{s+1}} K_w(w, \Omega(w)) dw; \quad \Omega_{s+1} = \Omega_s + \frac{\Delta w}{2} (K_w(w_s, \Omega_s) + K_w(w_{s+1}, \bar{\Omega}_{s+1})) \quad (5)$$

(для декартовых координат точек СУ аналогично; они нужны еще и с целью поточечной интерполяции параметров и производных в источнике, который задан на подробной сетке в декартовой системе координат XOY). При получении правого выражения (5), приближенного сеточного аналога интегрального тождества, использован *метод Эйлера с пересчетом*³ на основе квадратурной формулы трапеций; приращения индексов $s \rightarrow s+1$, $n \rightarrow n+1$ (меняется линия тока — меняется нормаль к ней, рис. 3) соответствуют элементарному сдвигу вдоль СУ. При этом в предыдущей точке СУ (x_s, y_s) , равно как и в начальной точке (x_0, y_0) падения его на СС, все предполагается известным.

Легко видеть, что таким образом решается и вся задача в целом, поскольку все газодинамические параметры за СУ в каждой новой его точке (x_{s+1}, y_{s+1}) рассчитываются по известным параметрам в источнике (Д4) перед ним через соотношения нулевого порядка (обычные условия на косом СУ): из (5) известен угол наклона СУ к оси OX $\Omega_{s+1} = \sigma_{s+1} + \theta(x_{s+1}, y_{s+1})$ (см. рис. 2), а следовательно, и σ_{s+1} .

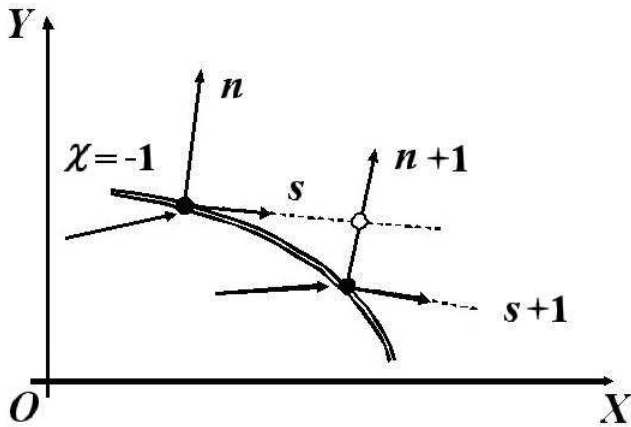


Рис. 3. Переход к новой расчетной точке вдоль СУ. Разностная аппроксимация старших производных за СУ

Существенно, что в первом способе нахождения решения делается отказ от использования трех других компонент \mathbf{X} — формульных выражений для производных $\widehat{W}_{\hat{n}}$, $\hat{\theta}_{\hat{n}}$, $\hat{h}_{\hat{n}}$ — с использованием вместо этого первообразных соотношений нулевого порядка.

Второй способ нахождения решения вдоль СУ состоит в следующем. Определив из (1) заодно с кривизной K_w и другие производные $\widehat{W}_{\hat{n}}$, $\hat{\theta}_{\hat{n}}$, $\hat{p}_{\hat{n}}$, $\hat{h}_{\hat{n}}$ ($\hat{p}_{\hat{n}}$ определяется через (2)), а следовательно, через УЭ в гладкой части течения [23] и производные $\widehat{W}_{\hat{s}}$, $\hat{\theta}_{\hat{s}}$, $\hat{p}_{\hat{s}}$, $\hat{h}_{\hat{s}}$, вдоль СУ можем записать

$$\frac{d\hat{\Phi}}{dw} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{s}} \cos \hat{\sigma} + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \hat{n}} \sin \hat{\sigma}, \quad \hat{\Phi} = \{\widehat{W}, \hat{\theta}, \hat{p}, \hat{h}\};$$

$$\hat{\sigma} = \sigma - \beta, \quad \sigma = \Omega - \theta, \quad \beta = \hat{\theta} - \theta.$$

³Иначе схема *предиктор-корректор*.

Для определения всех параметров за СУ в новой расчетной точке дополнительно к (4), (5) будем иметь

$$\widehat{\Phi}(w_{s+1}) = \widehat{\Phi}_s + \int_{w_s}^{w_{s+1}} \frac{d\widehat{\Phi}(w, \Omega(w))}{dw} dw; \quad \widehat{\Phi}_{s+1} = \widehat{\Phi}_s + \frac{\Delta w}{2} \left(\frac{d\widehat{\Phi}(w_s, \Omega_s)}{dw} + \frac{d\widehat{\Phi}(w_{s+1}, \overline{\Omega}_{s+1})}{dw} \right).$$

Таким образом, второй способ позволяет все параметры в новой расчетной точке по ходу эволюции СУ рассчитывать единообразно как результат интегрирования (1), без привлечения первообразных условий на СУ.

Аналогично, но проще: производные до СУ не зависят от параметра Ω , определяются газодинамические параметры перед СУ в каждой его расчетной точке.

Заметим, что возможен и комбинированный способ нахождения решения вдоль СУ, когда параметры по обе его стороны определяются двумя различными способами.

5. Вычислительный алгоритм для общего случая — интегрирования *вязких* уравнений

В случае использования модели вязкого теплопроводного газа существуют по крайней мере два подхода к интегрированию системы (1) с $\varepsilon^2 \neq 0$, предварительно замкнутой дифференциальной связью и ее следствием. Первый, нестандартный подход, без нормализации ОДСС (1), использует тот факт, что малый параметр ε^2 в (1) является малым по существу и, следовательно, невязкое приближение решения может быть взято за основу в каждой расчетной точке СУ. Второй подход — приведение (1) к нормальному виду, когда вторые производные входят в уравнения линейно, и использование стандартных вычислительных методик для численного интегрирования полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако первое из уравнений системы (1) — закон сохранения массы — как правило, не содержит старших производных, в связи с чем прямое, без дополнительных математических ухищрений, применение данного подхода невозможно; кроме того, он лишен смысла при $\text{Re}_\infty \rightarrow \infty$ ($\varepsilon^2 = 0$). По этим причинам в дальнейших исследованиях используется первый подход, не предполагающий проведения нормализации. Дадим краткое его описание.

Как и ранее, предполагаем, что величины $\widehat{p}_{\widehat{n}}$, $\widehat{p}_{\widehat{n}\widehat{n}}$ уже исключены из (1). Рассматривая большие числа Рейнольдса (Д1), когда $\varepsilon^2 = (\text{Re}_\infty)^{-1}$ — по существу малый параметр при старших производных и нелинейностях, выделим в (1) невязкое приближение \mathbf{X}^0 неизвестного вектора производных $\mathbf{X} = (\widehat{W}_{\widehat{n}}, \widehat{\theta}_{\widehat{n}}, K_w, \widehat{h}_{\widehat{n}})^T$:

$$\mathbf{X}^0 = A^{-1} \mathbf{b}^0, \quad A = (a_{i,j=1,2}, b_i, a_{i,4})_{i=1,\dots,4}, \quad \mathbf{b}^0 = - \left(c_{i,j} (\Phi_j)_n + d_i \frac{\delta}{y} \right)_{i=1,\dots,4}^T; \quad \varepsilon^2 = 0,$$

где A — матрица при линейной части (1) после преобразования ее подстановкой (3); \mathbf{b}^0 — постоянный в итерационном процессе вектор. Далее, взяв \mathbf{X}^0 за основу в каждой новой расчетной точке СУ, организуем простые итерации по схеме

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^0 - \varepsilon^2 A^{-1} \left(e_{i,j} (\widehat{\Phi}_j)_{\widehat{n}\widehat{n}}^k + f_i (K'_W)^k + g_{i,j} (\Phi_j)_{nn} + N_i^k \right)_{i=1,\dots,4}^T, \quad k = 0, 1, \dots, K; \quad \varepsilon^2 \neq 0, \quad (6)$$

где k — итерационный индекс; $N_i^k = N_i(\mathbf{X}^k)$ — нелинейные члены. Математическое выражение разностного оператора, аппроксимирующего вторые производные от величин за СУ (см. рис. 3) можно найти, например, в [25].

В отличие от рассмотренного выше невязкого случая в итерационном процессе (6), уточняющем значение \mathbf{X} , уже нет удобной "развязки" отдельных его компонент: их итерирование производится согласованно.

Очевидным недостатком рассмотренного итерационного процесса является то, что матрица A никак не учитывает фактор ВТ, и поэтому уже при средних числах Re_∞ обнаруживается крайне медленная сходимость. По этой причине итерационный процесс имеет смысл сразу записать в форме численного метода Ньютона в приращениях, без обращения матрицы Якоби:

$$J^k \Delta \mathbf{X} = -\mathbf{F}^k, \quad \Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k, \quad J(\mathbf{X}) = \frac{D\mathbf{F}(\mathbf{X})}{D\mathbf{X}}, \quad k = 0, 1, \dots, K,$$

для чего необходимо предварительно получить аналитические выражения для компонент как вектора правых частей $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, представляющего собой невязку в замкнутых ОДСС (1), так и матрицы Якоби $J(\mathbf{X})$ при подстановке в них произвольного вектора \mathbf{X} . Заметим, что эти компоненты будут включать уже и вязкие слагаемые. В данном итерационном процессе представляется разумным в качестве начального \mathbf{X}^0 в каждой расчетной точке СУ брать не невязкое приближение вектора неизвестных, как делалось выше, а найденное в предыдущей точке СУ значение \mathbf{X} с учетом фактора ВТ.

По завершении итерационного процесса по нелинейности нахождения вектора производных \mathbf{X} в новой расчетной точке $(s + 1, n + 1)$ СУ пересчитываются форма и положение СУ по формулам (4), (5) и определяются газодинамические параметры перед и за ним либо первым, либо вторым способом, с тем лишь различием, что вместо УЭ (см. разд. 4) должны браться ПУНС в гладкой части течения. Далее весь процесс определения формы СУ повторяется до достижения сходимости.

Остановимся на вопросе нахождения решения вдоль СУ в вязком случае двумя различными способами, рассмотренными в разд. 4. В идеале эти решения должны совпадать, поскольку ОДСС (1) являются следствием исходных первообразных условий на СУ и дифференциальных законов в его гладкой окрестности. Однако в ходе проведения многочисленных расчетов на основе вязкой модели с конкретным предварительно рассчитанным источником (Д4) было замечено, что в общем случае полного совпадения этих решений не наблюдается. Полное совпадение имеет место лишь в случае, когда газодинамические параметры перед СУ определяются единообразно, например, вторым способом, а фактор ВТ на СУ не учитывается. Незначительное отличие решений, имеющее место в остальных случаях, объясняется двумя причинами:

- 1) не совсем полной адекватностью математической модели течения в гладкой окрестности СУ используемому источнику и прежде всего тем, учитывается или нет в законах сохранения в гладкой окрестности СУ фактор ВТ (см. разд. 6);
- 2) применением асимптотических упрощений при выводе ОДСС (1), в результате которых вязкие члены порядка $O(\varepsilon)$ и выше отброшены.

Следовательно, в том случае, когда решения, найденные различными способами, должны совпадать, имеется надежное дополнительное средство внутреннего пошагового контроля точности вычислений.

6. Проведение расчетов и результаты моделирования

Проведение настоящих расчетов преследовало следующие цели:

- 1) выявить роль фактора ВТ в задаче проникновения СУ в СС в рамках стационарной модели на основе ОДСС;
- 2) сравнить полученные решения с решениями полных нестационарных УНС с учетом КЭ, а также с решениями по простой вихревой модели [43], построенной в плоскости ударно-волнового поля [30];
- 3) оценить влияние КЭ на действие фактора ВТ в рамках стационарной модели на основе ОДСС.

В качестве модели невозмущенного СС бралась сверхзвуковая часть ПС на теплоизолированной пластине: $\delta = 0$; $Pr = 1$; показатель степени в законе вязкости [23] $\omega = 1$; $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$; $W|_{y=0} = 0$; $\frac{\partial h}{\partial n}|_{y=0} = 0$ [45, 47, 48]. Поскольку в задаче о течении в ПС в роли характерного размера

выступает величина x — текущая продольная координата с момента образования ПС, то вместо Re_∞ использовалась величина $Re_x = \rho_\infty W_\infty x / \mu_\infty$ со значением $\sim 1,3 \cdot 10^3$ в начальной точке падения СУ на слой.

Профили невозмущенных параметров внутри сжимаемого ПС формировались из базового разностного расчета соответствующего погранслойного течения на основе полных УНС. С этой целью, а также для последующего расчета возмущенного течения использовался однородный неявный конечно-разностный алгоритм [49] второго порядка точности по пространству (сетка 401×401) и по времени. Для формирования невозмущенного СС из разностного расчета, в сечении, куда падает СУ, извлекалось определенное количество узлов, включающее ПС и соответствующее формально определенной условной толщине ПС. Далее производились сплайн-интерполяция⁴ разностного СС в поперечном (по y) и многочленная интерполяция⁵ — в продольном (по x) направлениях. Различие типов используемых интерполянтов объясняется Д3.

При численной реализации стационарной модели на основе ОДСС использовалось разбиение по пространству (поперек СС) в 1000 узлов, что в сочетании со вторым порядком аппроксимации разностной схемы предиктор-корректор (см. разд. 4) обеспечивало достаточную точность вычислений и гарантировало практическую сходимость. Контролировалось также качество разностной аппроксимации за СУ путем использования тех же разностных формул в течении перед СУ в каждой его точке и сравнением рассчитанных значений производных от газодинамических величин с их известными значениями в источнике (Д4). Кроме того, в ходе расчетов поточно контролировалась невязка газодинамических параметров за СУ, которые определялись двумя способами (см. разд. 4, 5) в тех случаях, когда должно иметь место совпадение (см. выше).

Расчет возмущенного течения в обеих методиках начинался с момента "выстреливания" в заданную точку x слоя СУ с начальной интенсивностью J_∞ . В стационарной методике расчет останавливался при достижении скачком звуковой интенсивности J_s ($\hat{M}|_{J=J_s} = 1$ [30]), в нестационарной — по окончании формирования проходящего в слой СУ, до момента подхода к нему вторичных возмущений, распространяющихся вверх по потоку в дозвуковой части ПС. Величина J_∞ задавалась в $t\%$ — процентах от J_s : $J_\infty(t\%) = J_s^{t\%/100\%}$.

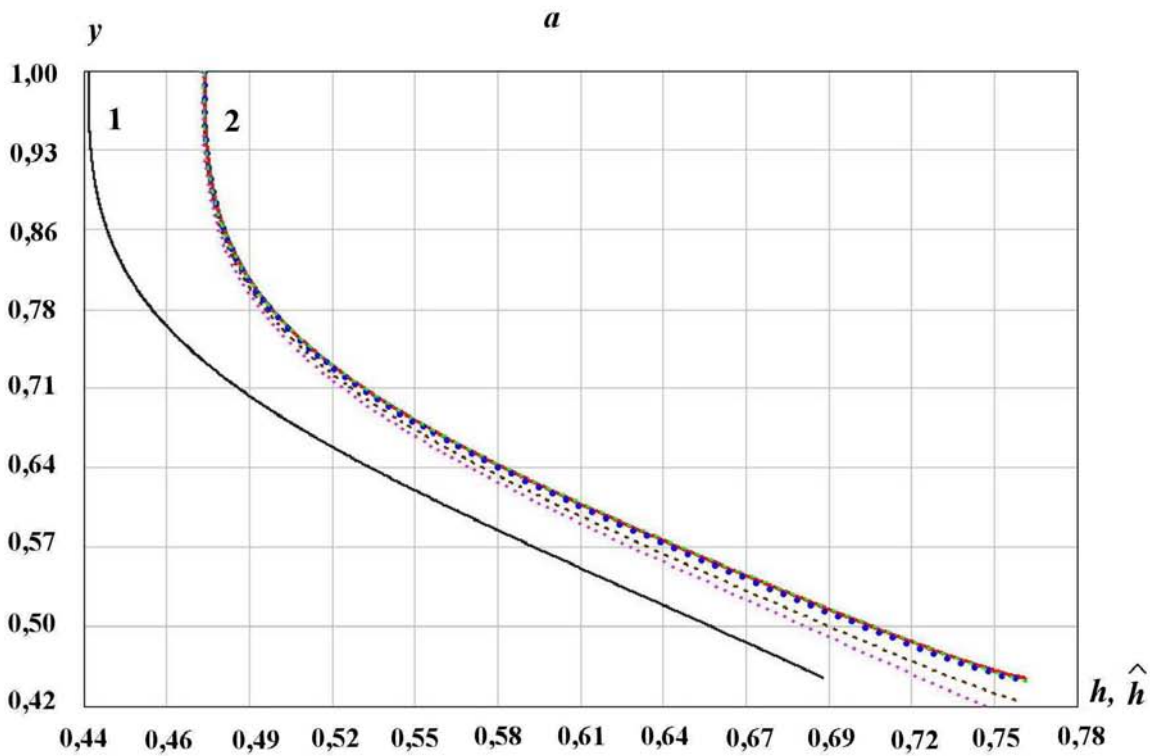
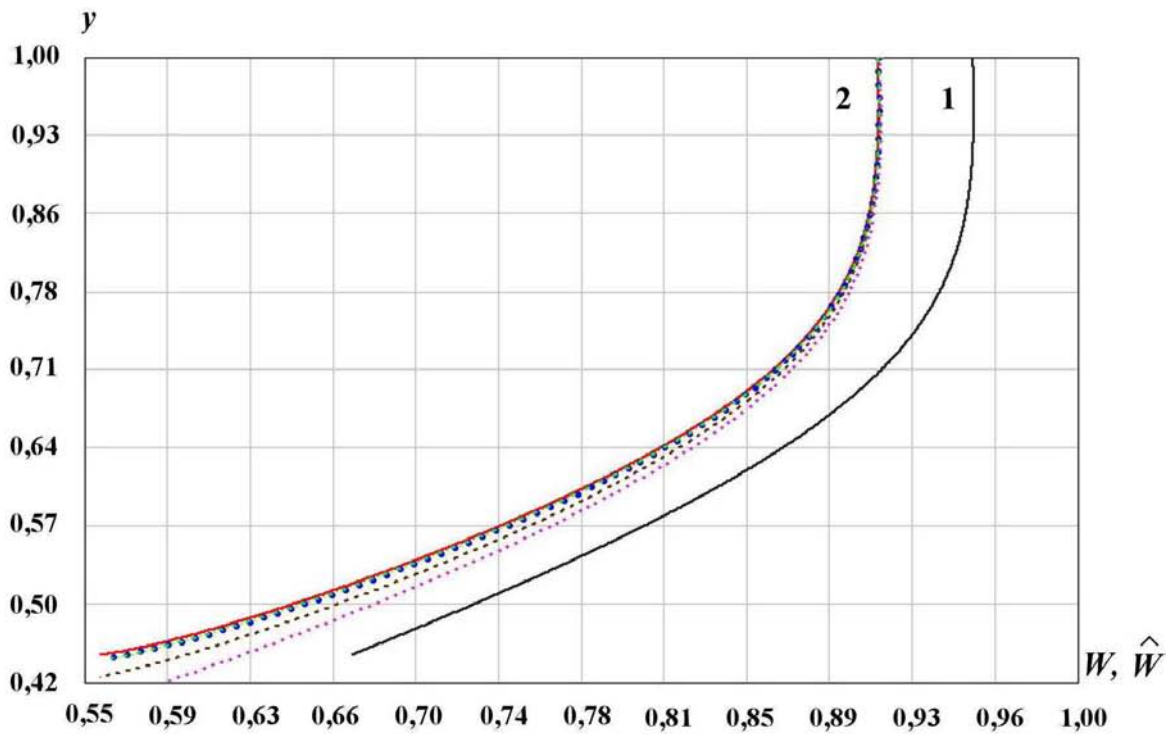
На рис. 4—8 (см. также цветную вкладку) представлены результаты сравнительных расчетов возмущенной задачи, причем рис. 4—7 соответствуют $J_\infty(t\% = 20\%)$, а рис. 8 — $J_\infty(t\% = 63,7\%)$. При построении графиков применялось преобразование вычислительных координат: x (вдоль плоскости симметрии) и y (поперек СС) относились к условной толщине ПС. Таким образом, в новых выводимых координатах ПС в точке падения на него СУ всегда имел единичную толщину.

Конкретные значения безразмерных газодинамических параметров внешнего потока и на плоскости симметрии, совместно определяющие невозмущенный СС, были следующими: $\gamma = 1,4$; $M_\infty = 2,5$; $\rho_\infty = 1$; $W_\infty = 1$ при $y = 1$ и $W_{y=0} = \theta_{y=0} = 0$ при $y = 0$, однако непосредственно в начальной точке падения СУ на слой текущие M_∞ , ρ_∞ и W_∞ несколько отличались от указанных из-за интерполяции этих величин в предварительно рассчитанном источнике (Д4).

На рис. 4—7 (см. также цветную вкладку) показаны профили возмущенных параметров. Стационарное решение, соответствующее частично учтенному фактору ВТ — фактор "выключен" лишь на фронте СУ (см. разд. 2, пп. а, б), определено как *невязкое*. На тех же рисунках показано *вязкое* решение, с полностью учтенным фактором, и *полностью невязкое* решение, полученное на основе ВМВ [21], использующей невязкие ДС без какого-либо учета фактора ВТ. Дополнительно на рис. 4—7 показано *простое невязкое* решение, полученное по *простой* ВМВ [43]. Во всех этих случаях КЭ отсутствует и все указанные решения располагаются близко друг к другу; на рис. 4—6 они вообще едва различимы. Однако полностью невязкое решение должно быть отбраковано: ему соответствуют неправильно определенные параметры перед СУ, в частности, погрешность по давлению в конечной точке промежутка интегрирования в сравнении с источником (Д4) составляет $\sim 10\%$. Следовательно, давление $\hat{p} = pJ$ и другие параметры за СУ определяются при этом также неверно (см. разд. 5), хотя на представленных рисунках данная ошибка не заметна. Причина возникновения

⁴Использовался кусочно-кубический сплайн.

⁵Использовался многочлен Лагранжа второй степени.



б

Рис. 4. Сравнительные профили скоростей (*а*) и энтальпий (*б*): 1 — невозмущенный; 2 — возмущенные: — — невязкое решение; • — вязкое решение; - - - — полностью невязкое решение; ··· — простое невязкое решение; +++ — подогнанное вязкое решение

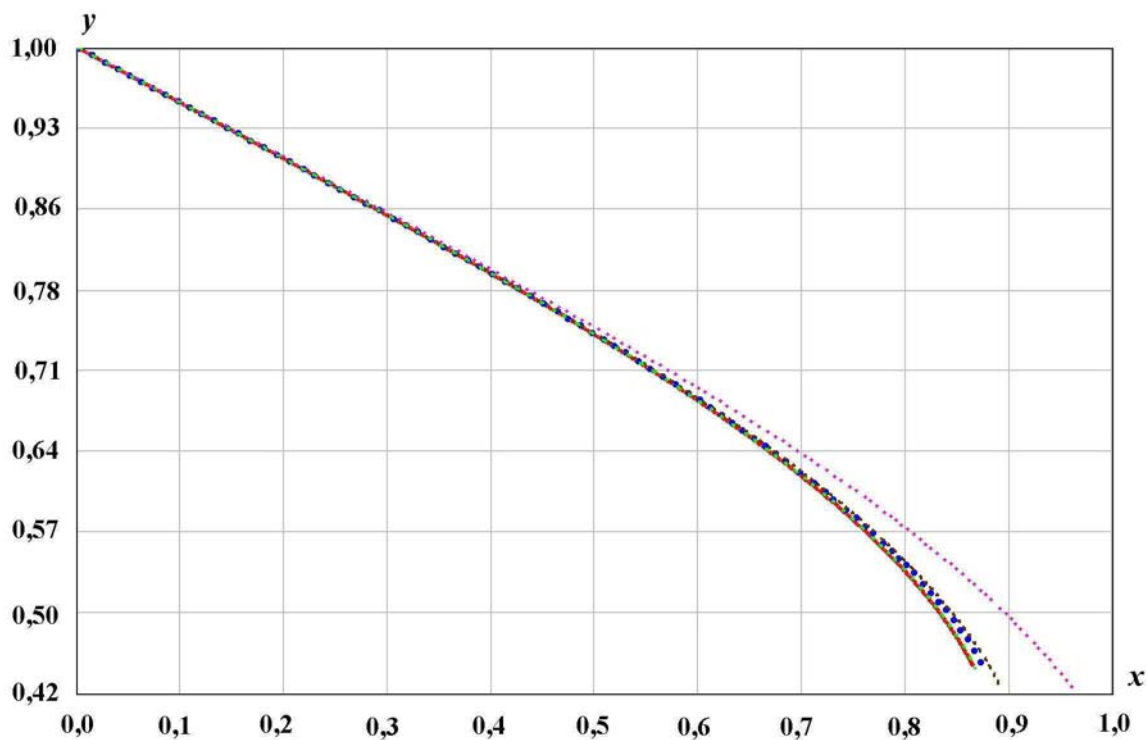


Рис. 5. Сравнительные траектории СУ: — — невязкое решение; • — вязкое решение; - - - — полностью невязкое решение; ··· — простое невязкое решение; +++ — подогнанное вязкое решение

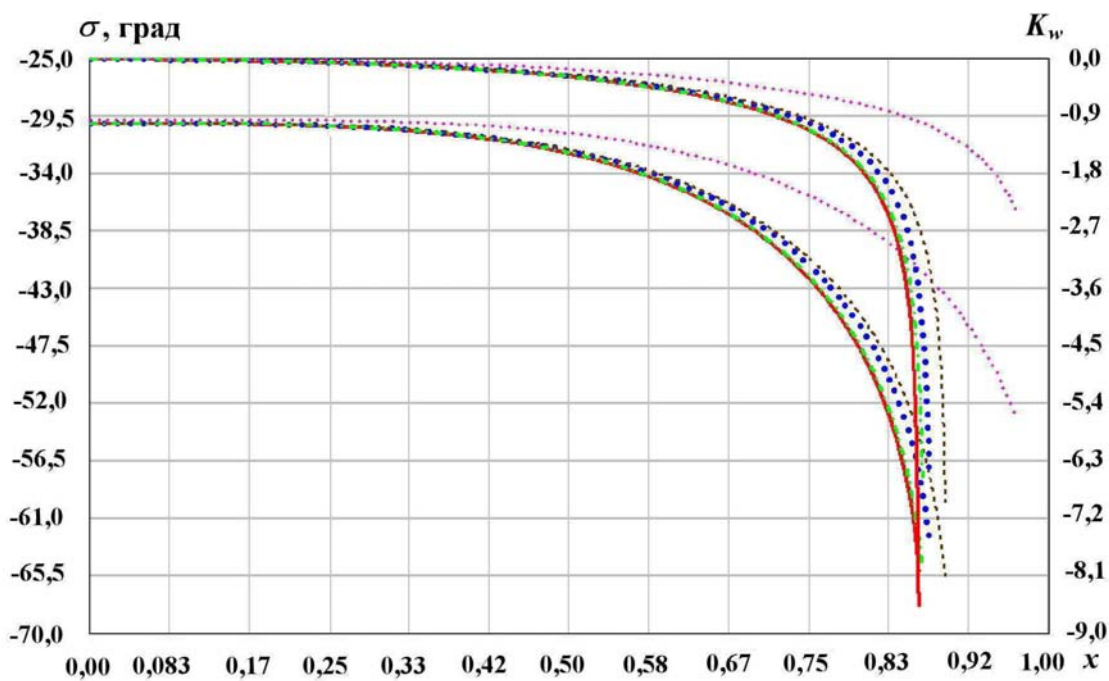


Рис. 6. Сравнительные зависимости угла σ наклона СУ к линии тока (внизу) и кривизны СУ K_w , умноженной на условную толщину ПС (вверху); — — невязкое решение; • — вязкое решение; - - - — полностью невязкое решение; ··· — простое невязкое решение; +++ — подогнанное вязкое решение

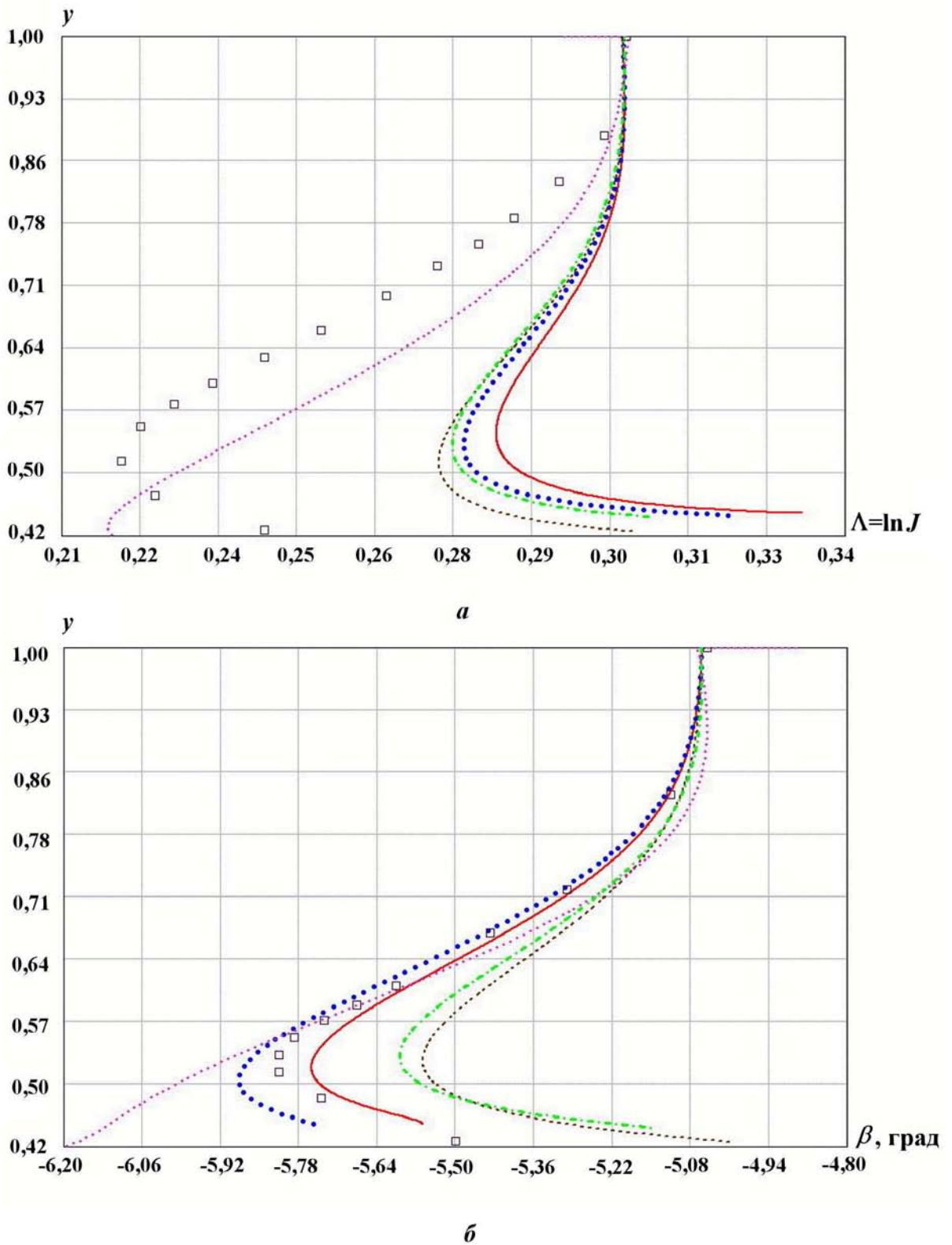


Рис. 7. Сравнительные профили логарифмов интенсивностей СУ (а) и углов преломления линии тока на СУ (б): — — невязкое решение; • — вязкое решение; - - - — полностью невязкое решение; - · - — простое невязкое решение; + + + — подогнанное вязкое решение; □ — разностное решение

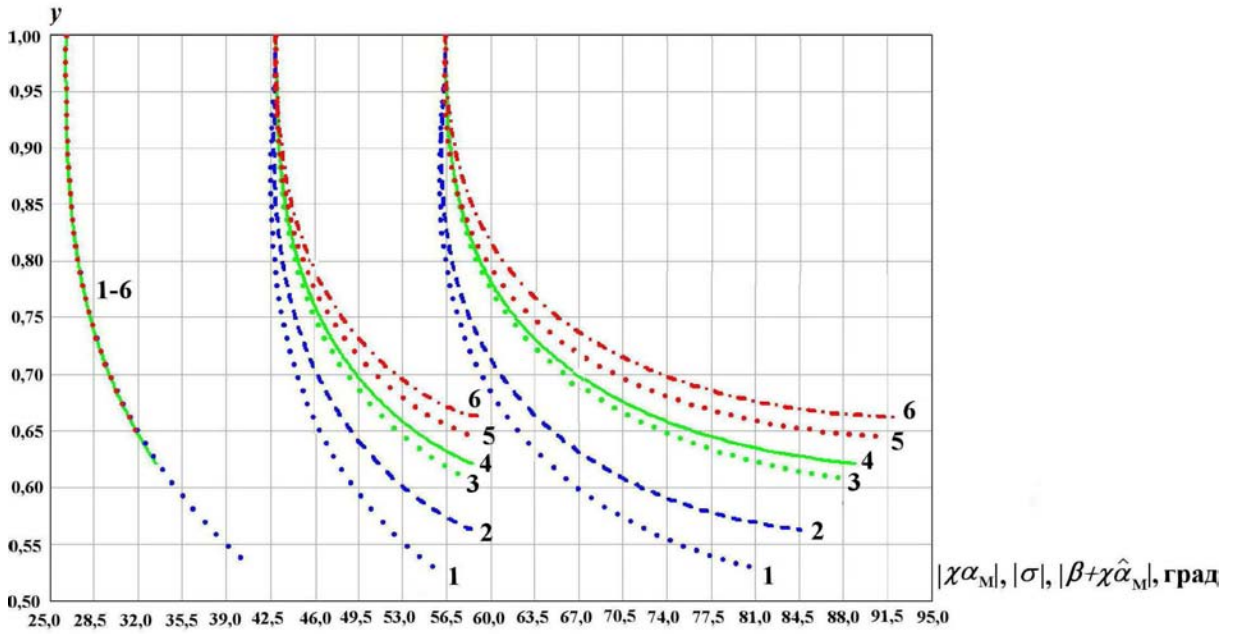


Рис. 8. Характеристический коридор: слева — перед СУ; в центре — на СУ; справа — за СУ; 1 — вязкое решение при КЭ, ослабляющем СУ; 2 — невязкое решение при КЭ, ослабляющем СУ; 3 — вязкое решение без КЭ; 4 — невязкое решение без КЭ; 5 — вязкое решение при КЭ, усиливающим СУ; 6 — невязкое решение при КЭ, усиливающим СУ

такой ошибки в том, что течению, имеющему вязкую предысторию, жестко навязывается не совсем адекватная идеальная модель на основе УЭ.

Для скорости (W) и энтальпии (h) также показаны *невозмущенные профили* (см. рис. 4, а, б), они заметно отстоят от возмущенных.

На рис. 7 а, б представлены профили величин $\Lambda = \ln J$ и углов преломления β , а также *разностное* решение, полученное по УНС. Показанное на рис. 4—7 *подогнанное вязкое* решение получено по стационарной модели с учетом подобранного искусственным путем КЭ, так, чтобы на рис. 7 а, б такое решение располагалось ближе к разностному. Существенно, что для такой подгонки, имеющей целью воспроизвести разностное решение по полным УНС в рамках стационарной модели, понадобилось более чем в два раза увеличить роль фактора ВТ. Отсутствие хорошего совпадения с решением по УНС можно объяснить значительной конечной толщиной СУ из-за его схемной "размазанности", наличием КЭ в разностном расчете, а также изначальным различием моделей.

В ходе многочисленных расчетов, где использовалась стационарная модель на основе ОДСС, было замечено: если имеет место КЭ, ослабляющий или усиливающий СУ, то влияние фактора ВТ на процесс проникновения скачка в слой больше и кривые, соответствующие вязким и невязким решениям, расходятся сильнее. Это вполне объяснимо, так как исключение КЭ (фактически разглаживание течения за СУ) уменьшает влияние фактора ВТ: градиенты газодинамических параметров входят в величины вязких напряжений и теплового потока. С целью демонстрации данного факта на рис. 8 показан *характеристический коридор* для вязких и невязких решений с КЭ и без такового для J_∞ ($t_\% = 63,7\%$). Характеристический коридор представляет в каждой расчетной точке значения величин $|\chi\alpha_M|$ (перед СУ), $|\sigma|$ (на СУ), $|\beta + \chi\hat{\alpha}_M|$ (за СУ) — модулей углов наклона СУ и характеристик одного с ним семейства по обе стороны скачка к текущей линии тока в невозмущенном течении.

Очевидно, что при полном вырождении СУ за счет КЭ или (и) ВТ все три однотипные кривые из различных семейств (см. рис. 8), соответствующие конкретному решению, должны пересечься в одной точке внизу: коридор "схлопывается". Из рис. 8 видно, что вне зависимости от того, является КЭ ослабляющим или усиливающим, всегда имеет место частичное сужение характеристического

коридора за счет ослабляющего действия фактора ВТ на СУ. Таким образом, если имеет место КЭ, ослабляющий СУ, то в результате суммарного однонаправленного действия обоих факторов сужение коридора оказывается более значительным.

Заключение

Предложена эффективная математическая модель взаимодействия СУ и СС, обобщающая вихревую модель [21]. Существенно, что в предлагаемой модели фактор ВТ присутствует явно и поэтому частично, а в ряде случаев значительно, определяет возмущенное решение.

Показана неадекватность ВМВ на основе невязких ДС в случае высокоградиентного, имеющего вязкую предысторию течения перед СУ. Эта модель уже при средних числах Рейнольдса неверно описывает происходящий физический процесс, поскольку игнорирует фактор ВТ в дифференциальных законах сохранения в гладкой части течения вне СУ, что неизбежно приводит к ошибке в ходе интегрирования. По этой же причине простая вихревая модель [43] дает хорошее согласие в плоском случае с вязкой моделью на основе ОДСС, поскольку не использует дифференциальных законов сохранения в гладкой окрестности скачка. К сожалению, применимость данной простой модели ограничена классом невозмущенных течений, близких к плоскопараллельным, с вырожденными профилями давления и поперечной компоненты скорости.

Получено (согласно классификации, принятой в [46]) аналитическое решение стационарной задачи о проникновении СУ в СС. Исходная начально-краевая задача для УНС сведена к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложены эффективные методы решения полученной нелинейной системы уравнений, не требующие нормализации уравнений.

Для практики важно, что рассмотренная в настоящей работе модель позволяет в рамках единого вычислительного алгоритма проходить "насквозь" от газодинамической до диффузионной стадии эволюции скачка в слое, чем достигается значительная экономия вычислительного ресурса: счет на ПЭВМ вместо многих часов (УНС) занимает минуты или даже секунды. Существенно, что в данной постановке задачи сохраняется естественный (бесконечный в отсутствие других возмущений) порядок гладкости решения в касательном к скачку направлении, что и явилось основным мотивом для применения аналитического подхода.

Другие выводы были сформулированы в ходе изложения материала статьи.

Автор глубоко благодарен профессору И. Д. Софронову и профессору В. Н. Емельянову за обсуждение вычислительных аспектов данной работы в период ее становления, а также выражает благодарность профессору В. К. Андрееву за внимание к работе и ценные замечания и профессору В. Н. Ускову за приобщение автора к ударно-волновой тематике в период обучения в институте и аспирантуре, постоянное внимание к проводимым исследованиям и научное руководство.

Список литературы

1. Петров Г. И., Лихущин В. Я., Некрасов И. П., Соркин Л. И. Влияние вязкости на сверхзвуковой поток со скачками уплотнения // Труды ЦИАМ. 1952. № 224; Газовая динамика. Избранное. Т. 1. / Под ред. А. Н. Крайко. М.: Физматлит, 2005. С. 105—131.
2. Чёрный Г. Г. Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва // Изв. АН СССР. ОТН. 1954. № 12. С. 38—67.
3. Баренблатт Г. И., Чёрный Г. Г. О моментных соотношениях на поверхностях разрыва в диссипативных средах // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 784—793.
4. Седов Л. И., Михайлова М. П., Чёрный Г. Г. Влияние вязкости и теплопроводности на течение за сильно искривленной ударной волной // Вестник МГУ. Механика. 1953. № 3. С. 95—100.
5. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.

6. Браиловская И. Ю. Расчет обтекания угла потоком вязкого сжимаемого газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 3. С. 82—91.
7. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984.
8. Тимошенко В. И. Сверхзвуковые течения вязкого газа. Киев: Наук. думка, 1987.
9. Карлин В. А., Русанов В. В., Теряев С. Е. Метод установления для численного решения задачи о пространственном сверхзвуковом обтекании затупленных тел вязким теплопроводным газом: Препринт № 20. М.: АН СССР / ИПМ им. М. В. Келдыша, 1988.
10. Ковеня В. М., Тарнавский Г. А., Чёрный С. Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990.
11. Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Калугин В. Т. Аэродинамика отрывных течений / Под ред. Н. Ф. Краснова. М.: Высшая школа, 1988.
12. Нейланд В. Я. Асимптотическая теория взаимодействия и отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Механика и научно-технический прогресс. Т. 2. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. С. 128—145.
13. Липатов И. И., Нейланд В. Я. К теории нестационарного отрыва и взаимодействия ламинарного пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Учен. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18, № 1. С. 36—49.
14. Бондарев Е. Н., Дубасов В. Т., Рыжов Ю. А. и др. Аэрогидромеханика. М.: Машиностроение, 1993.
15. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковые течения и ударные волны. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
16. Полачек Х., Зигер Р. И. Взаимодействие ударных волн // Основы газовой динамики / Под ред. Г. Эммонса. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 446—489.
17. Ландау Л. Д. Об устойчивости тангенциального разрыва в сжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1944. Т. 64, № 4. С. 151.
18. Софронов И. Д. К задаче о движении тангенциального разрыва в идеальной несжимаемой жидкости // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1962. Т. 2, № 3. С. 494—499.
19. Бахрах С. М., Жидов И. Г., Рогачёв В. Г., Янилкин Ю. В. Численное исследование неустойчивости тангенциального разрыва скорости в сжимаемых газах // Механика жидкости и газа. 1983. № 2. С. 146.
20. Василенко А. М., Буряков О. В., Куропатенко В. Ф. и др. Экспериментальное исследование гравитационной неустойчивости и турбулизации течения на границе разделения благородных газов: Препринт № 56. М.: АН СССР / ФИАН. 1990. С. 32—51.
21. Адрианов А. Л. О модельной кривизне скачка уплотнения в неравномерном потоке // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 6. С. 3—14.
22. Адрианов А. Л. Дифференциальные соотношения на скачке уплотнения в вязком газе при больших числах Рейнольдса // Тр. семинара "Мат. моделирование в механике" ВЦК СО РАН. Красноярск, 1996.
23. Адрианов А. Л. Обобщенные дифференциальные соотношения на скачке уплотнения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 4. С. 22—30.
24. Адрианов А. Л. Асимптотическая модель взаимодействия скачка со сдвиговым слоем // Вестник Сиб. гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М. Ф. Решетнева. 2002. Вып. 3. С. 22—34.
25. Адрианов А. Л. Дифференциальная модель проникновения скачка в сдвиговый слой // Вестник Красноярского гос. ун-та. Физ.-мат. науки. 2004. № 5/2. С. 22—39.
26. Адрианов А. Л. Аналитический подход в задаче проникновения скачка в сдвиговый слой // Вестник Сиб. гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М. Ф. Решетнева. 2004. Вып. 5. С. 5—22.

27. Адрианов А. Л. Выделение разрывов в двумерных течениях невязкого и вязкого теплопроводного газа // Вестник Сиб. гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М. Ф. Решетнева. 2005. Вып. 7. С. 11–17.
28. Адрианов А. Л. Другой подход к математическому моделированию течений вязкого теплопроводного газа с ударными волнами // Наука и технологии. Т. 1. Труды XXVI Российской школы. М.: РАН, 2006. С. 108–122.
29. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
30. Адрианов А. Л., Старых А. Л., Усков В. Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука, 1995.
31. Усков В. Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов // Сверхзвуковые газовые струи. Новосибирск: Наука, 1983. С. 22–46.
32. Уэрл М., Ватса В. Новый метод расчета отрыва сверхзвуковых пограничных слоев // Ракетная техника и космонавтика. 1974. Т. 12, № 11. С. 45–53.
33. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1994.
34. Гриффитс У. Ударные волны // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы / Под ред. Дж. Бэтчелора и Г. Моффата. М.: Мир, 1984.
35. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
36. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47 (89). Вып. 3. С. 271–306.
37. Куропатенко В. Ф. Об одном разностном методе расчета ударных волн // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1963. Т. 3, № 1. С. 201–204.
38. Адрианов А. Л., Безруков А. А., Гапоненко Ю. А. Численное исследование взаимодействия сверхзвуковой струи газа с плоской преградой // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4. С. 106–111.
39. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
40. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М.: Наука, 1964.
41. Алалыкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Л., Плинер Л. А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1970.
42. Адрианов А. Л. Выделение множества разрывов на несогласованной сетке в двумерных стационарных сверхзвуковых течениях // Моделирование в механике. Сер. Струйные течения. 1988. Т. 2 (19), № 6. С. 3–9.
43. Усков В. Н., Цымбалова Е. Н. Скачки уплотнения в течении со сдвигом // Специальные вопросы аэрогазодинамики летательных аппаратов: межвуз. сб. 1974. Вып. 173. С. 104–111.
44. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
45. Бай Ши-и. Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
46. Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
47. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. Ч. 1. М.: Наука, 1991.
48. Гинзбург И. П. Аэрогазодинамика. М.: Высшая школа, 1966.
49. Бондарев А. Е. Численное исследование обтекания плоского обратного уступа сверхзвуковым потоком вязкого сжимаемого газа: Препринт № 16. М.: АН СССР / ИПМ им. М. В. Келдыша, 1988.