

УДК 519.6

О РЕГУЛЯРНОМ АЛГОРИТМЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Т. И. Серёжникова
(ИММ УрО РАН, г. Екатеринбург)

Обсуждается методика и описываются численные эксперименты по восстановлению решений (одномерных) интегральных уравнений Фредгольма первого рода, возникающих при продолжении геофизических полей и синтезе антенн.

Построенный регулярный алгоритм основан на тихоновской регуляризации с применением в качестве стабилизатора нормы пространства Липшица, дополнительном привлечении грех-метода и субградиентных процессов для решения задач негладкой минимизации.

С помощью методики можно успешно восстанавливать как гладкие (непрерывные) решения, так и решения, имеющие изломы, разрывы, близкие максимумы.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма, негладкое решение, тихоновская регуляризация, проксимальный метод, субградиентный процесс.

Известно [1], что в процессе математического моделирования разнообразных прикладных задач геофизики, оптимизации управления, синтеза автоматических систем, обработки показаний различных приборов и др. возникает необходимость решения некорректных задач, что по определению означает неустойчивость решения этих задач к малым изменениям входных данных и даже несуществование решения в классическом смысле.

Некорректные задачи часто сравнительно просто сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода, естественным обобщением которых является операторное уравнение первого рода

$$Au = f, \quad (1)$$

где A — линейный оператор, действующий на паре нормированных пространств U, F .

Для задач такого вида известны методы регуляризации по Тихонову, когда для устойчивой аппроксимации решения операторное уравнение (1) сводится к решению задачи минимизации

$$\min \{ \|Au - f\|^2 + \alpha \Omega(u) : u \in U \}, \quad (2)$$

где функционал $\Omega(u)$ играет роль стабилизатора.

В работе [2] был предложен параметрический класс недифференцируемых стабилизирующих функционалов на основе нормы пространства Липшица и обоснована равномерная сходимость тихоновских аппроксимаций к непрерывному, не обязательно дифференцируемому решению исходного уравнения. Оказалось, что при подходящем выборе управляющих параметров регулярные алгоритмы, построенные в рамках упомянутой регуляризации с привлечением грех-метода, вполне пригодны также для восстановления негладких (разрывных) решений интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Полное исследование и обоснование всех этапов алгоритма проведено В. В. Васинным (см. [2]).

В настоящей статье дано лишь краткое изложение используемых теоретических результатов; основное внимание уделяется рассмотрению численных экспериментов для решения интегральных

уравнений Фредгольма первого рода, возникающих при продолжении геофизических полей и синтезе антенн. Приведены достаточно успешные результаты модельных расчетов для восстановления как гладких (непрерывных) решений, так и решений, имеющих изломы, разрывы, близкие максимумы, и даны рекомендации для практического выбора основных параметров метода.

Расчеты проводились на многопроцессорном вычислительном комплексе, что позволило использовать визуализацию в режиме реального времени для отслеживания устойчивости и достигнутой точности приближенных решений и на основании наблюдений подбирать те или иные параметры каждого конкретного расчета.

Численные эксперименты показывают, что для (одномерных) интегральных уравнений Фредгольма первого рода предлагаемая методика позволяет вполне успешно восстанавливать решения, обладающие различными особенностями (изломы, разрывы, близкие экстремумы).

Описание теорем сходимости приближенных решений

Пусть Π — компакт в R^n . Обозначим через $H^\mu = H^\mu[\Pi]$ множество функций, удовлетворяющих условию Липшица: $\exists d > 0, |u(x_1) - u(x_2)| \leq d|x_1 - x_2|^\mu, \forall x_1, x_2 \in \Pi$, где $|x_1 - x_2| = \left(\sum_{i=1}^n |x_{1i} - x_{2i}|^2\right)^{1/2}, 0 < \mu \leq 1$.

На множестве H^μ предлагается (см. [2]) использовать норму

$$\|u(x)\|_{H^\mu} = \max_{x \in \Pi} |u(x)| + \sup_{x_1, x_2 \in \Pi} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu}. \quad (3)$$

Рассмотрим линейное уравнение (1) с оператором A , действующим из пространства H^μ в пространство непрерывных функций $C(\Pi)$, и единственным решением $\hat{u} \in H^\mu$. Непрерывность обратного оператора A^{-1} не предполагается, поэтому задача о восстановлении решения относится к классу существенно некорректных задач. При приближенно заданной правой части $f_\delta, \|f - f_\delta\| \leq \delta$, для построения регуляризованного семейства приближенных решений используем метод Тихонова (2) в виде (см. [2])

$$\min \{ \|Au - f_\delta\|_{C[\Pi]} + \alpha \|u\|_{H^\mu} : u \in H^\mu[\Pi] \}. \quad (4)$$

Теорема 1 [2]. Пусть A — линейный непрерывный оператор в $C(\Pi)$,

$$\text{Ker}(A) = \{0\}, \quad \|f - f_\delta\| \leq \delta.$$

Тогда задача (4) имеет решение u^α , возможно неединственное, и при связи параметров $\alpha(\delta) \rightarrow 0, \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ имеет место равномерная сходимость $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u^{\alpha(\delta)} - \hat{u}\|_{C(\Pi)} = 0$, и $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u^{\alpha(\delta)}\|_{H^\mu} = \|\hat{u}\|_{H^\mu}$.

Обозначим через U_h конечномерное подпространство кусочно-линейных функций.

Теорема 2 [2]. Пусть выполнены предположения теоремы 1.

Тогда конечномерная задача

$$\min \left\{ \|Au - f_\delta\|_{C[\Pi]} + \alpha \left(\|u_h\|_{L_p[\Pi]}^2 + \|u_h\|_{H^\mu} \right) : u_h \in U_h \right\}$$

имеет единственное решение u_h^α , для которого выполнены соотношения

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h^\alpha - u^\alpha\|_{C[\Pi]} = 0; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h^\alpha\|_{H^\mu[\Pi]} = \|u^\alpha\|_{H^\mu[\Pi]},$$

где u^α — решение, полученное методом Тихонова со стабилизатором на основе нормы пространства Липшица.

Как показали численные эксперименты, для улучшения результатов вычисления приближенного решения оказалось полезным дополнительно привлечь прох-метод (итерированный вариант метода Тихонова). А именно для целевого функционала $\Phi^\alpha(u)$ из (4) итерационный процесс для аппроксимации u^α строится следующим образом ($\beta > 0$, $\|\bullet\|_H$ — некоторая гильбертова норма):

$$u^k = \operatorname{argmin} \left\{ \Phi^\alpha(u) + \beta \|u - u^{k-1}\|_H^2 : u \in U \right\}.$$

Функционал $\Phi^{\alpha,\beta} = \Phi^\alpha(u) + \beta \|u - v\|_H^2$ является сильно выпуклым, что гарантирует устойчивый счет при нахождении u^k субградиентным методом.

Алгоритм решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

Рассмотрим одномерное интегральное уравнение Фредгольма первого рода $Au \equiv \int_0^1 K(x, y)u(x)dx = f(y)$, $0 \leq y \leq 1$, с непрерывными по своим переменным функциями $K(x, y)$, $f(y)$.

Зададим равномерную сетку по x, y с шагом $h = 1/N$ и аппроксимируем интеграл по формуле прямоугольников. Введем обозначения: $u(u_j) = x_j$, $f_\delta(f_i) = t_i$. Тогда дискретный аналог регуляризованной задачи примет вид

$$\min_{u_i} \left\{ \max_{1 \leq j \leq N} \left| \sum_{j=1}^N h K(y_i, x_j) u_j - f_i \right| + \alpha \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N h |u_j|^2 + \max_{1 \leq j \leq N} |u_j| + \max_{i \neq j} \frac{|u_i - u_j|}{|x_i - x_j|^\mu} \right) : \{u_j\}_1^N \in R^N \right\}. \quad (5)$$

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Экстремальная задача (5) имеет единственное решение $\bar{u}^N = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N)$, и последовательность кусочно-линейных восполнений $\hat{u}^N(x)$, построенных по вектору \bar{u}^N , равномерно сходится к решению задачи*

$$\min \left\{ \|Au - f\|_C + \alpha \left(\frac{1}{2} \|u\|_{L_2}^2 + \|u\|_{H^\mu} \right) : u \in H^\mu \right\}.$$

Теперь дискретный аналог упомянутого выше прох-метода принимает форму

$$u^k = \operatorname{argmin} \left\{ \Phi_N^\alpha(u) + \beta \|u - u^{k-1}\|_{R^N}^2 : u \in R^N \right\} = \Phi_{N,k}^*, \quad (6)$$

где Φ_N^α — целевая функция в задаче (5).

Поскольку выпуклая функция субдифференцируема, то при фиксированном u^{k-1} для аппроксимации u^k применим субградиентный метод вида

$$u^{k,\nu+1} = u^{k,\nu} - \lambda_k \frac{v^{k,\nu}}{\|v^{k,\nu}\|}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n_k, \quad (7)$$

где $v^{k,\nu} \in \partial \Phi_{N,k}^{\alpha,\beta}(u^{k,\nu})$, $\Phi_{N,k}^{\alpha,\beta}$ — целевая функция в (6), $\partial \Phi$ обозначает субдифференциал функционала Φ .

Как известно, в общем случае для выпуклой функции при $\lambda_k > 0$, $\sum_{i=0}^\infty \lambda_k = \infty$, $\sum_{i=0}^\infty \lambda_k^2 < \infty$ установлена сходимость итераций по функционалу, но поскольку $\Phi_{N,k}^{\alpha,\beta}$ — сильно выпуклая функция, то имеет место сходимость по аргументу, т. е. $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|u^{k,\nu} - u^k\| = 0$.

Важно отметить, что итерации u^k прох-метода (6) могут вычисляться субградиентным методом (7) с некоторой погрешностью с сохранением сходимости. А именно справедлива следующая теорема.

Теорема 4 [3, 4]. *Пусть T — прох-отображение, т. е. $T : v \rightarrow \operatorname{argmin} \{ \Phi_N^\alpha(u) + \beta \|u - v\|^2 : u \in R^N \}$. Пусть $\|z^{k+1} - T(z^k)\| \leq \gamma_k$, $z^0 \in R^N$, $\sum_{i=0}^\infty \gamma_k < \infty$.*

Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k - \bar{u}^N\| = 0$, где \bar{u}^N — решение задачи (7).

**Модельные расчеты для задачи углового разрешения
близко расположенных источников сигналов**

Рассматривается решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода из [5]

$$Au \equiv \int_{-4}^4 \left\{ \frac{\sin [39,82 (\sin x - \sin y)]}{25 \sin \left[\frac{39,82}{25} (\sin x - \sin y) \right]} \right\}^2 u(x) ds = f(y), \quad -4 \leq x, y \leq 4,$$

которое является модельным в задачах углового разрешения близко расположенных источников сигналов (радио, акустических, световых и т. д.).

Вводится равномерная сетка, состоящая из 25 узлов с шагом $h = 8/24 \approx 0,33$. Задано точное гладкое решение, сеточный вариант которого имеет вид

$$u_i = \begin{cases} \varphi(x_i), & 1 \leq i \leq 13; \\ u_{26-i}, & 14 \leq i \leq 25, \end{cases}$$

где (см. [5]) $\varphi(x) = 72 \exp \left(- \left(\frac{x - 1,62}{0,84} \right)^2 \right) + 93 \exp \left(- \left(\frac{x - 6,14}{0,98} \right)^2 \right)$.

Для проведения расчетов предварительно были получены сеточные значения ядра интегрального уравнения и значения правой части (для приближенного вычисления интегралов применялась формула прямоугольников). Для проведения итераций использовалось нулевое начальное приближение. В формуле (3) для нормы Липшица полагалось $\mu = 0,001$. В формуле прох-метода задавалось $\beta = 15$, количество итераций назначалось равным 60. Для расчета вариантов использовалась величина $\alpha = 10^{-4}$.

На рис. 1, а приведены точное и приближенное решения для точной правой части f . На рис. 1, б приведены точное и приближенное решения для возмущенной правой части f_δ , возмущение полагалось $\frac{\|f - f_\delta\|_C}{\|f\|_C} = \delta \leq 0,02$.

В результате проведения ~ 9000 тыс. итераций в расчетах получены следующие погрешности восстановленного решения:

а) с точной правой частью:

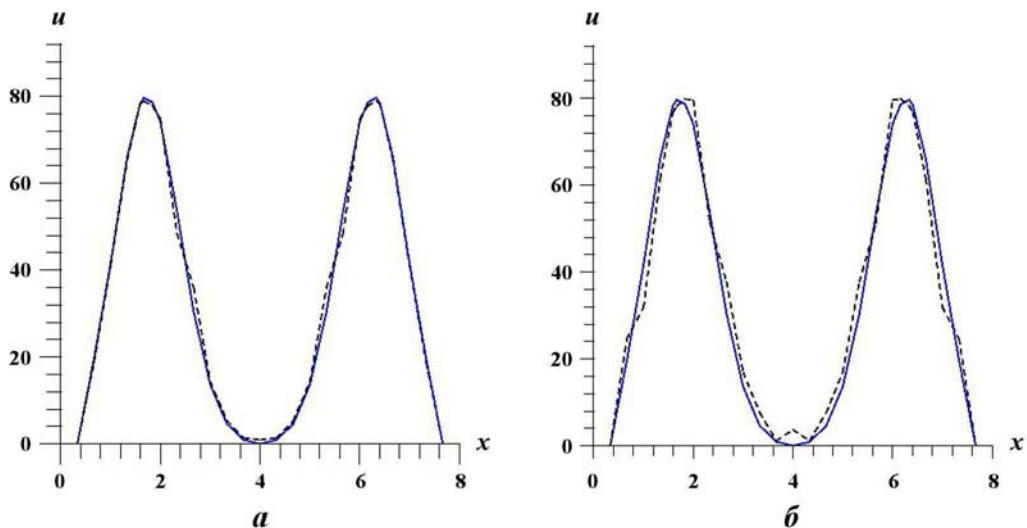


Рис. 1. Результаты расчетов для точной (а) и возмущенной (б) правой части интегрального уравнения Фредгольма первого рода: — — точное решение; - - - — восстановленное решение

- относительная погрешность по решению $\Delta_1 = \frac{\|u - \tilde{u}\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}} = 6,521 \cdot 10^{-3}$;
- относительная погрешность по невязке $\Delta_2 = \frac{\|A\tilde{u} - f\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}} = 8,508 \cdot 10^{-3}$;

б) с приближенной правой частью:

- относительная погрешность по решению $\Delta_1 = \frac{\|u - \tilde{u}\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}} = 1,955 \cdot 10^{-2}$;
- относительная погрешность по невязке $\Delta_2 = \frac{\|A\tilde{u} - f_\delta\|_{L_2}}{\|f_\delta\|_{L_2}} = 2,226 \cdot 10^{-2}$.

Из рис. 1 видно, что приближенные решения хорошо совпадают с точным решением, в узлах сетки относительная погрешность по решению $\Delta = \frac{\|u - \tilde{u}\|_C}{\|u\|_C} \leq 1\%$. Заметим, что в работе [5] отличие максимумов точного и приближенного решений (восстановленного по другому регуляризирующему алгоритму) достигает $\sim 20\%$.

Модельные расчеты для задачи о продолжении на глубину аномального гравитационного поля по данным измерений на поверхности

Рассматривается решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода [6]

$$Au \equiv \int_0^2 \frac{H}{H^2 + (x - y)^2} u(x) ds = f(y), \quad 0 < H \leq 2, \quad 0 \leq x, y \leq 2,$$

которое моделирует ситуацию, когда необходимо найти продолженное на глубину $x = H$ гравитационное поле $u(x)$ по данным $f(y)$ гравитационных измерений на земной поверхности (плоский случай).

Проведены расчеты по восстановлению трех модельных решений. Использовалось нулевое начальное приближение. В формуле для нормы Липшица полагалось $\mu = 0,001$. В формуле (6) задавалось $\beta = 300$. Количество итераций по формулам (7) назначалось равным 60.

Для каждой модели рассчитывались варианты с точной и возмущенной правой частью, возмущение полагалось $\|f - f_\delta\|_C = \delta \leq 0,0108$.

Для расчета вариантов с точной правой частью для задания параметра регуляризации использовались $\alpha = 10^{-4}$, $\alpha = 10^{-5}$, а для расчетов с возмущенной правой частью использовались $\alpha = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-4}$. Понятно, что с ростом параметра H , $0 < H \leq 2$, процесс восстановления приближенного решения рассматриваемой задачи усложняется, поскольку свойства матрицы ухудшаются. Для модели 1 и модели 2 полагалось $H = 2$, а для модели 3 $H = 1$.

Точная правая часть для каждой модели рассчитывалась подстановкой точного решения u в сеточный вариант операторного уравнения $Au = f$ на равномерной сетке.

Точное решение $u(x)$ ($0 \leq x, y \leq 2$) для каждой модели рассчитывалось на равномерной сетке по x , состоящей из 129 узлов с шагом $h = 2/128 \approx 0,016$, по следующим формулам:

– для модели 1

$$u_i = \begin{cases} \frac{1}{32}i, & i = 0, \dots, 64; \\ \frac{1}{32}(128 - i), & i = 65, \dots, 128; \end{cases}$$

– для модели 2

$$u_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \dots, 42; \\ 2, & i = 43, \dots, 85; \\ 0, & i = 86, \dots, 128; \end{cases}$$

— для модели 3

$$u_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \dots, 15; \\ \frac{1}{8}(i - 16), & i = 16, \dots, 32; \\ 2 - \frac{1}{32}(i - 32), & i = 33, \dots, 64; \\ u_{128-i}, & i = 65, \dots, 128. \end{cases}$$

В каждом варианте расчетов для полученного приближения вычислялась относительная погрешность по решению Δ_1 и относительная погрешность по невязке Δ_2 :

$$\Delta_1 = \frac{\|u - \tilde{u}\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}}; \quad \Delta_2 = \frac{\|A\tilde{u} - f\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}}.$$

Графики восстановленных решений как для точных, так и для возмущенных данных для трех моделей приведены на рис. 2. На каждом графике по горизонтальной оси отложены номера узлов i сетки $x_i = (2/128)i$, $i = 0, 2, \dots, 128$. Между каждыми двумя узлами, обозначенными на горизонтальной оси, и в расчетах, и в построении графиков участвуют еще девятнадцать узлов с равномерным шагом h , $h = 2/128 \approx 0,016$, по аргументу x . По вертикальной оси откладываются значения сеточной функции u_h , $0 \leq u_h \leq 2$.

Анализ численного моделирования показывает, что предложенный алгоритм достаточно хорошо восстанавливает решение с изломом (разрыв в производной) и разрывом первого рода самой функции, сохраняя структуру исходной модели. Несколько хуже алгоритм "работает" для более сложной модели 3; здесь острые углы заметно заглажены. По-видимому, в этом случае для повышения качества решения необходимо использовать вместо $u_0 \equiv 0$ начальное приближение, учитывающее некоторые особенности решения, а также более тщательно выбирать управляющие параметры α , β .

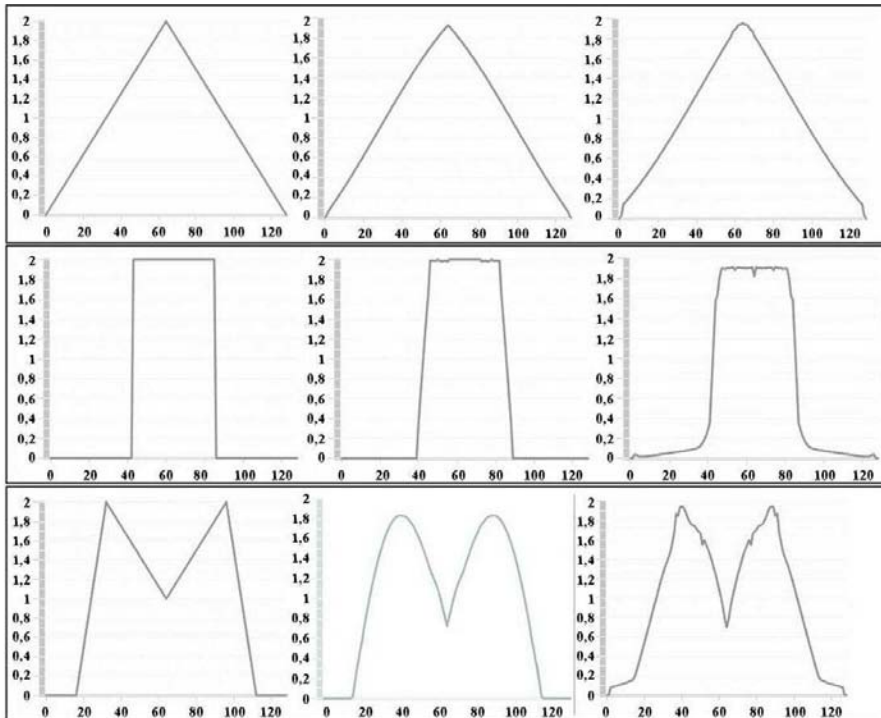


Рис. 2. Графики точных и восстановленных решений для моделей 1–3 (сверху вниз): слева — точное решение; в центре — приближенное решение для точной правой части; справа — приближенное решение для возмущенной правой части

Так, для пары значений параметров α , β , которой соответствует приближенное решение, изображенное на рис. 3 в левом верхнем углу, структура решения восстанавливается, возможно, лучше, чем для трех других тестируемых пар α и β .

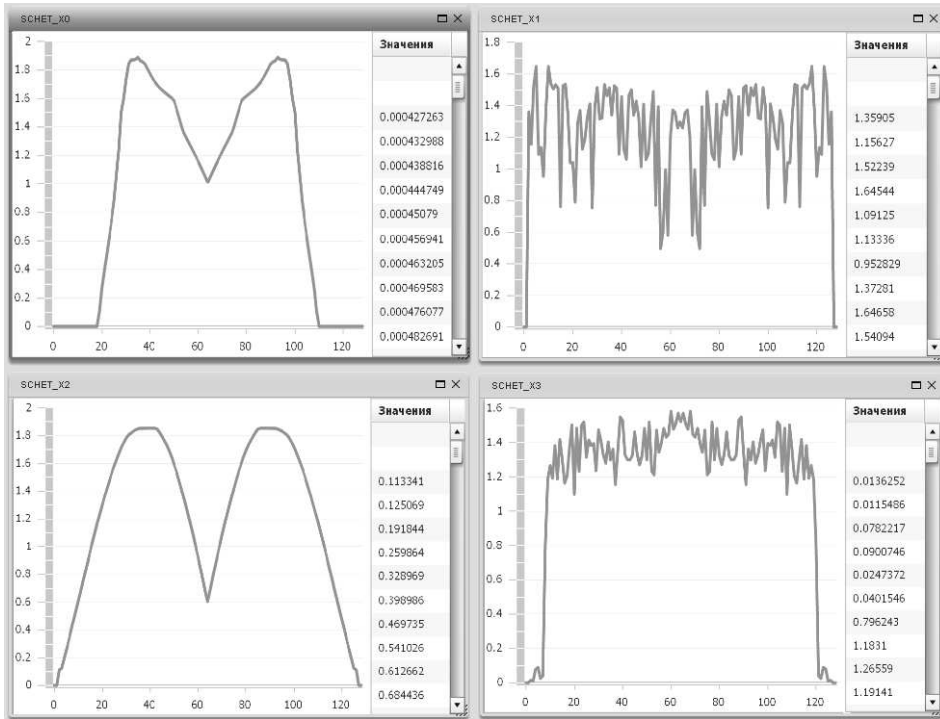


Рис. 3. Варианты (с четырех процессоров) приближенных решений для четырех одновременно тестируемых пар α и β

О выборе параметров и организации расчетов

Из теоретических рассуждений можно увидеть лишь то, что параметр α должен быть достаточно малым, а количество итераций — достаточно большим, чтобы регуляризованное решение было более или менее близким к точному решению. Рекомендации по остальным параметрам расчетов имеют примерно такую же степень неопределенности.

Исходя из опыта, полученного в процессе экспериментов, предлагается действовать следующим образом:

1. В процессе расчетов необходимо следить за тем, чтобы уменьшалась (возможно, немонотонно) относительная погрешность по невязке, в противном случае следует менять выбор параметров α и β . В расчетах погрешность уменьшалась, принимала некоторое наименьшее значение, а затем начинала возрастать. Это являлось сигналом для прекращения расчетов для выбранной пары параметров α и β .
2. Количество итераций в начале экспериментов не следует ограничивать конечным числом, чтобы не закончить текущий расчет неудачно рано. Сначала надо выполнить достаточное количество итераций, пока не проявится тенденция.
3. Значение параметра α можно приблизительно получить усреднением по предельно малому значению, оставляющему начальное приближение практически неизменным, и предельно большому, приводящему к неустойчивому поведению компонентов приближенного решения (появлению пилообразности сеточного приближения решения).
4. Если необходимо улучшить приближение, то можно попробовать уменьшить (если получено слишком гладкое решение) или увеличить (если налицо осцилляции) порядок уже выбранного параметра α на единицу.

5. Параметр β примерно обратно пропорционален шагу сетки. Например, в первой задаче при $h \approx 1/3$ $\beta = 15$; во второй задаче при $h \approx 1/64$ $\beta = 300$.
6. Шаг сетки (следовательно, и количество узлов сетки) можно подбирать, начиная примерно с 0,01. Заметим, что большой шаг сетки, равный 0,33, в расчетах углового разрешения объясняется, во-первых, гладкостью самого решения, а во-вторых, намерением сохранить возможность некоторого сравнения с результатами из [5], используя равномерную сетку с числом узлов из [5].
7. Для выбора более или менее удачной пары параметров α и β можно вначале протестировать, например, четыре пары параметров α и β , организовав параллельные вычисления на четырех процессорах. На рис. 3 приведено изображение на мониторе одновременно полученных графиков приближенных решений для четырех тестируемых пар α и β с четырех процессоров. Основываясь на изображениях, естественно, следует сразу отказаться от двух пар α и β , которым соответствуют верхний и нижний графики справа. Для двух графиков слева необходимо провести дополнительный анализ, например, сравнить соответствующие значения величин Δ_1 , Δ_2 , окончательно выбрать пару α и β и с этой парой продолжить расчеты приближенного решения.

Заключение

В работе предложен регулярный алгоритм, который позволяет восстанавливать как непрерывные, так и разрывные решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Алгоритм основан на тихоновской регуляризации с недифференцируемым стабилизатором (в форме нормы пространства Липшица) с привлечением прох-метода и субградиентных процессов для решения задачи негладкой минимизации. Численные эксперименты подтверждают, что использование прох-метода существенно повышает качество приближенного решения, поскольку дает возможность применять субградиентные процессы для сильно выпуклой функции, что обеспечивает устойчивость счета.

На основании результатов расчетов даны рекомендации по выбору параметров вычислений, организации расчетов и осуществлению контроля за точностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00053).

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. Васин В. В. Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 64—77.
3. Rockafellar R. T. Monotone operators and the proximal point algorithm // SIAM J. Control and Optimization. 1976. Vol. 14, No. 5. P. 871—898.
4. Васин В. В. Проксимальный алгоритм с проектированием в задачах выпуклого программирования: Препринт № 51(82). Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1982.
5. Бакушинский А. Б., Сизиков В. С. Некоторые нестандартные регуляризирующие алгоритмы и их численная реализация // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1982. Т. 22, № 3. С. 532—539.
6. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

Статья поступила в редакцию 28.12.09.