

ПРЯМОЕ ТРЕХМЕРНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СДВИГОВО-ГРАВИТАЦИОННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

О. Г. Синькова, В. П. Стаценко, Ю. В. Янилкин
РФЯЦ-ВНИИЭФ

С помощью 3D кода ТРЭК исследуется развитие в поле тяжести турбулентности на плоской границе раздела двух несжимаемых жидкостей (газов) с разнородностью $n = 3$ с начальным сдвигом скорости на этой границе. Рассматривается случай, когда ускорение имеет знак, соответствующий устойчивой стратификации. Результаты расчетов сравниваются с расчетами по феноменологической модели.

Рассматривается задача о турбулентном перемешивании на плоской границе раздела двух несжимаемых жидкостей (газов) под действием сдвига скоростей и ускорения, создающего устойчивую ситуацию. Подобное течение имеется, например, в верхней или нижней части начального участка плоской или круглой струи с иной плотностью, чем в окружающей струе.

Ранее мы отдельно исследовали простейшие течения с гравитационной [1] либо сдвиговой [2] неустойчивостью. Исследуемое в данной работе течение является более сложным и представляет самостоятельный интерес как в связи с тем, что подобные течения широко представлены в природе, так и в качестве теста для полуэмпирических моделей турбулентности.

Указанная задача исследовалась ранее в работах [3, 4] с помощью феноменологической модели турбулентности Никифорова В. В. и $k-\varepsilon$ модели. Результаты сводились лишь к зависимости от времени ширины зоны турбулентного перемешивания (ЗТП).

В статье рассматриваемая задача исследуется методом прямого трехмерного численного моделирования с помощью газодинамического 3D кода ТРЭК [5]. Варьируются счетная сетка и численный метод: при одном подходе вещества рассматриваются как различные, т. е. с разными концентрациями; при другом – как одно вещество, без выделения объемными концентрациями.

Кроме того, мы также исследуем данную задачу численно с помощью феноменологической $k-\varepsilon$ модели турбулентности [6]. Рассматривалась зависимость от времени не только ширины ЗТП, но и максимального значения турбулентной энергии в ЗТП.

Численные массивы гидродинамических величин из трехмерных расчетов используются для нахождения моментов этих величин (диагональные компоненты тензора Рейнольдса, турбулентные потоки, профили плотности и ее среднеквадратичной пульсации), а также для построения одноточечной функции плотности распределения вероятности (ФПВ) концентрации и

спектрального анализа пульсаций скорости и плотности.

Некоторые результаты 3D расчетов сравниваются с измерениями [7–9], а также с данными полуэмпирической теории турбулентности [10], учитывающей анизотропию тензора Рейнольдса.

Расчеты проводились с использованием распараллеливания на несколько десятков процессоров.

1. Постановка расчетов по методике ТРЭК

Задача ставится аналогично [1, 2] следующим образом: в начальный момент два полупространства, разделенных плоскостью $z = z_c = 0$, заполнены покоящимися идеальными газами с плотностями $\rho_1 = 1$ и $\rho_2 = n$ ($n = 3$, число Атвуда $A \equiv \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$) и нулевой молекулярной вязкостью. Начальная геометрия представлена на рис. 1.

Скорость $u_{y1} \equiv u_y(z > 0) = -0,5$ в верхней полуплоскости и $u_{y2} \equiv u_y(z < 0) = 0,5$ – в нижней. Ускорение тяжести $g_z = 0,2$ направлено от тяжелого вещества к легкому.

В начальный момент на границе раздела (в слое толщиной в одну ячейку) с помощью генератора случайных чисел задаются случайные возмущения плотности $\delta\rho = \pm\rho_1\delta$, где $\delta = 0,1$.

Решаются уравнения газодинамики для идеальной (с нулевой молекулярной вязкостью и теплопроводностью) двухкомпонентной среды.

Счетная область – параллелепипед с вертикальной стороной боковой грани $L_z = 1$. Его горизонтальная грань – квадрат со стороной $L_x = L_y = 1$.

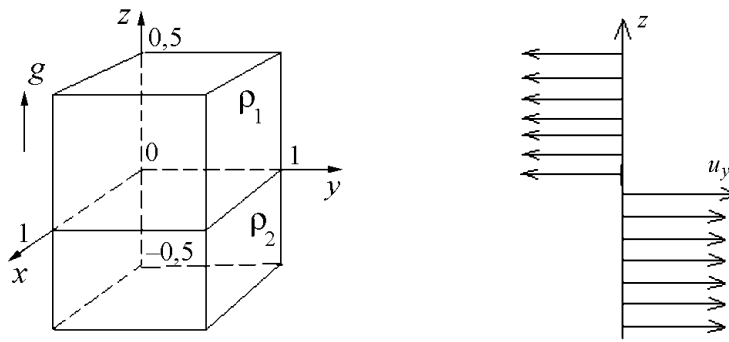


Рис. 1. Геометрия задачи

Начальный профиль давления задается, исходя из условия гидростатического равновесия

$$p(z) = p_0 - \int_{z_2}^z \rho(z)gz dz.$$

Здесь координата верхней грани $z_2 = 0,5$, координата нижней – $z_1 = -0,5$, $p_0 = 15,4$. Величина давления такова ($p \approx p_0$), что для данного турбулентного течения хорошо выполнялось условие несжимаемости $k = \xi L_t g \ll \gamma p / \rho$, где $\xi = \text{const} \ll 1$; $L_t < \Lambda$, L_t – ширина зоны турбулентного перемешивания (ЗТП); k – турбулентная энергия.

Уравнение состояния – идеальный газ с постоянной адиабатой $\gamma = 1,4$.

Счетная сетка – равномерная с числом ячеек $N_x = N_y = N_z$. Число ячеек изменялось от $N_x = 101$ до $N_x = 201$. Размер ячейки $h_x = h_y = h_z = 1/N_x$. С указан-

ными вариантами счетной сетки задача рассчитывалась с двумя концентрациями, т. е. оба газа разной плотности рассматривались как различные вещества.

На счетной сетке с $N_x = 101$ задача рассчитывалась также с одной концентрацией, т. е. оба газа разной плотности считались одним и тем же веществом.

На горизонтальных границах счетной области ставилось условие типа жесткая стенка, на вертикальных – условие периодичности.

2. Результаты трехмерных расчетов

2.1. Двумерные разрезы. Общее представление об эволюции течения в данной задаче дают растровые картины концентрации тяжелого вещества, полученные в 3D расчете на более грубой ($N_x = 101$) и более подробной ($N_x = 201$) сетках – см. рис. 2, на котором изображены продольные (вдоль течения) 2D сечения счетной области.

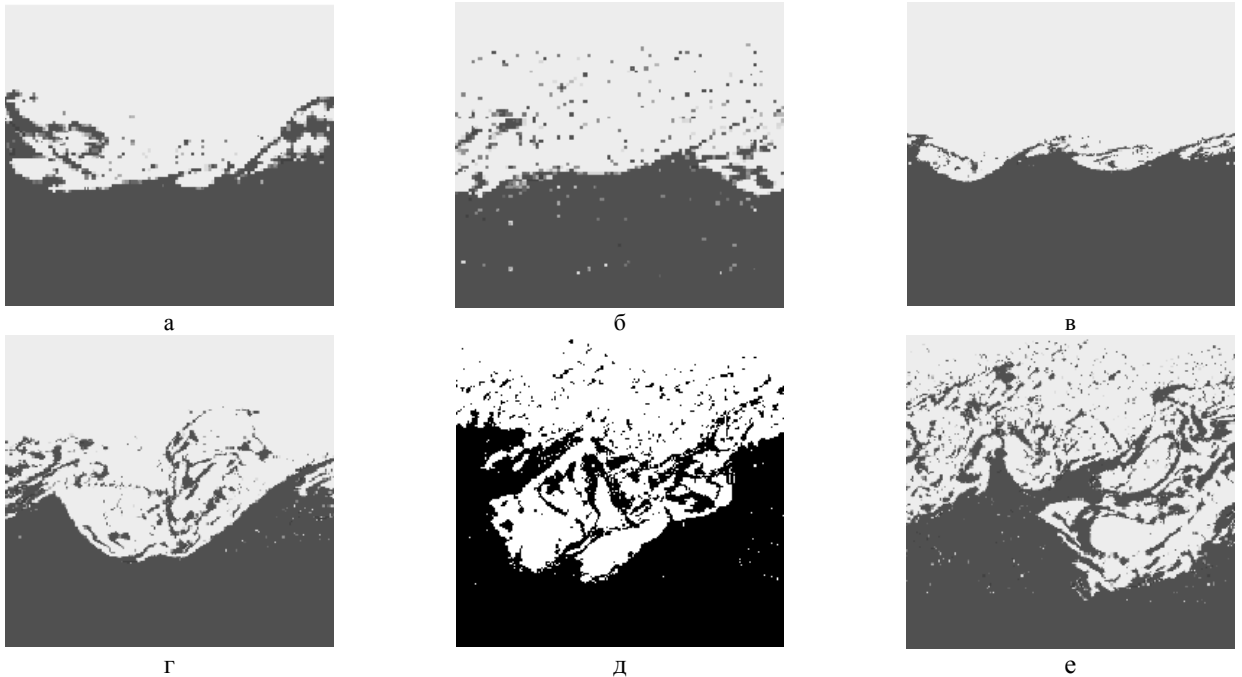


Рис. 2. Растровые картины концентрации тяжелого вещества: а – $\tau = 1$, $N_x = 101$; б – $\tau = 4$, $N_x = 101$; в – $\tau = 0,4$, $N_x = 201$; г – $\tau = 1$, $N_x = 201$; д – $\tau = 1,8$, $N_x = 201$; е – $\tau = 2,2$, $N_x = 201$

На первой стадии эволюции течения преобладает сдвиговая неустойчивость, наблюдается укрупнение со временем вихрей. Характерным для такого течения является закручивание вихрей, черпающих циркуляцию из усредненного течения со сдвигом скорости. На достаточно подробной сетке в конце указанной стадии должен происходить выход на соответствующий автомодельный режим.

На второй стадии начинает сказываться устойчивая стратификация данной задачи, подавляющая рост возмущений из-за сдвиговой неустойчивости, наблюдается стабилизация вихрей. Можно ввести характерный для этой стадии масштаб времени t_0 , пространственный масштаб L_0 , определяемые сдвигом скорости

$$\Delta u_y \equiv |u_{y1} - u_{y2}| \text{ и ускорением тяжести } g_z$$

$$t_0 = \Delta u_y / g_z; \quad L_0 = (\Delta u_y)^2 / g_z. \quad (2.1)$$

Таким образом, пока ширина L_t зоны турбулентного перемешивания (ЗТП) мала по сравнению с L_0 , влиянием ускорения тяжести можно пренебречь. Если размер счетной области L_z также мал по сравнению с L_0 , получаем задачу о чисто сдвиговом перемешивании. В противоположном случае ($L_z \gg L_0$) на ЗТП приходится слишком мало счетных ячеек. В наших расчетах $\Delta u_y = 1$, поэтому выбор оптимального для данной задачи значения L_0 производился вариацией значения g_z .

В указанных расчетах $g_z = 0,2$, поэтому приведенные графики охватывают обе стадии.

2.2. Зона перемешивания. На первой (неустойчивой) стадии должен происходить выход на автомодельный режим. Он характеризуется линейной зависимостью ширины ЗТП от времени

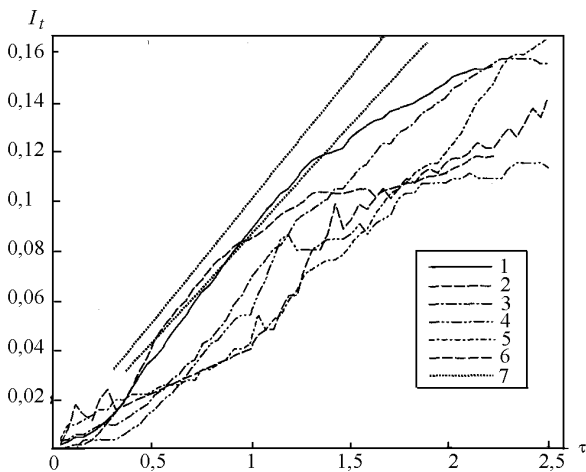


Рис. 3,а. Зависимость ширины ЗТП от времени. $l_t^{(u)}$: 1 – 3D расчет с $N_x=201$, 3 – 3D расчет с $N_x=101$, 5 – 3D расчет с $N_x=101$ с одним веществом, $l_t^{(c)}$: 2, 4, 6 – в соответствующих вариантах; 7 – аппроксимация экспериментальных данных [7–9]

$$L_t = L^{(0)} + \alpha \Delta u_y t. \quad (2.2)$$

Здесь

$$L_t \equiv z_2 - z_1 \quad (2.3) -$$

ширина ЗТП по направлению z , определяемая по точкам z_1, z_2 , в которых достигается достаточно малое значение ε возмущения усредненной гидродинамической величины, например концентрации c тяжелого вещества либо скорости u_y . В первом случае полагаем, что

$$c_2(z_1) = \varepsilon; \quad c_2(z_2) = 1 - \varepsilon, \quad (2.4)$$

где c_2 – массовая доля вещества, имевшего в начальный момент плотность $\rho_2 = n$, полученное значение L_t обозначим $L_t^{(c)}$. Во втором случае полагаем, что

$$|2u_y(z_2) + \Delta u_y| = \varepsilon, \quad |2u_y(z_1) + \Delta u_y| = \varepsilon; \quad (2.5)$$

ширину ЗТП обозначим $L_t^{(u)}$.

Очевидно, с учетом предыдущего раздела приведенная ширина ЗТП

$$l_t \equiv \frac{L_t}{L_0} = l^{(0)} + \alpha \tau, \quad (2.6)$$

где $\tau \equiv t/t_0$.

Таким образом, автомодельная зависимость (2.6) при достаточно малой величине $l^{(0)}$ должна иметь универсальный вид и на последующей стадии, т. е. не зависеть от значений $\Delta u_y, g_z$. Именно это можно видеть на рис. 3,а, б, на котором приведена зависимость $l_t(\tau)$.

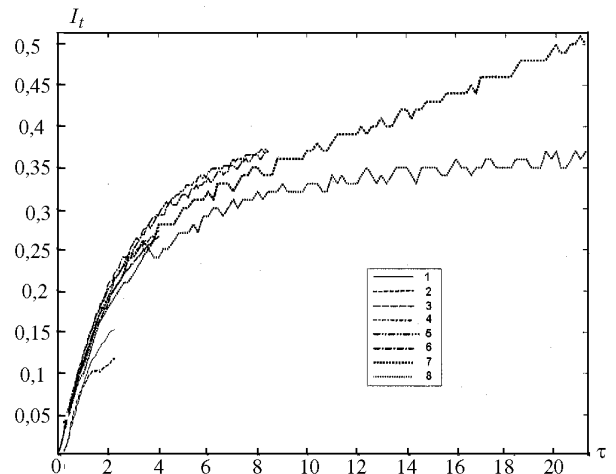


Рис. 3,б. Зависимость ширины ЗТП от времени. $l_t^{(u)}$: 1 – 3D расчет с $N_x = 201$; 3, 5, 7 – 1D расчеты с $g = 0,2, g = 0,4, g = 1$ соответственно. 2, 4, 6, 8 – $l_t^{(c)}$ в соответствующих вариантах

Отметим, что в варианте 3D расчета с $N_x = 101$ с двумя веществами при $\tau > 2,5$ начинает сказываться влияние границ счетной области.

На рис. 3,а, б приведены прямые, наклон которых соответствует максимальной и минимальной скоростям роста ширины ЗТП на автомодельной стадии сдвигового течения среди наиболее вероятных значений этой величины, измеренной в [7, 8], а также в различных опытах, приведенных в обзоре [9].

Видно, что на начальной стадии 3D расчетов с двумя веществами ($\tau \lesssim 1$) происходит выход $l_t(\tau)$ на линейные зависимости, характеризующиеся наклонами, близкими к экспериментальным, при этом $l_t^{(u)} \approx l_t^{(c)}$. На более поздней стадии ($\tau \gtrsim 1$) наклон кривых $l_t(\tau)$ начинает уменьшаться, а величина $l_t^{(u)}$ становится заметно больше $l_t^{(c)}$. Варианты на разных сетках в целом близки, отличие в основном сводится к небольшому запаздыванию (сдвигу по времени) в расчете на более грубой сетке.

В 3D расчете с одним веществом еще заметнее запаздывание (сдвиг по времени), кроме того, на поздней стадии по-прежнему величины $l_t^{(u)}$ и $l_t^{(c)}$ в целом близки.

Отметим, что при $t > 2,5 \div 3$ начинает сказываться влияние границы счетной области со стороны легкого вещества.

2.3. Изменение во времени пульсационных характеристик. Для первой стадии данной задачи автомодельный режим выражается также в выходе на стационарное значение величины

$$k_m(t) \equiv \max(k) \quad (2.7)$$

максимального по ширине ЗТП значения турбулентной энергии, где

$$k(z) = k_{ii}; \quad (2.8)$$

$$k_{ik}(z) = \frac{\langle u_i u_k \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_k \rangle}{2}; \quad (2.9)$$

усреднение (обозначаемое знаком $\langle \rangle$) производится по всему горизонтальному сечению $z = \text{const}$.

Как видно из рис. 4, в расчете на подробной сетке к моменту $\tau \approx 0,5$ величина $k_m(t)$ близка к измеренным в опытах [7, 8]. При $\tau > 1$ она убывает. В расчете на более грубой сетке поведение $k_m(t)$ в целом близкое, отличие в основном сводится к небольшому запаздыванию (сдвигу по времени).

То же самое наблюдается и в 3D расчете с одним веществом, здесь запаздывание (сдвиг по времени) еще больше.

На рис. 5 показана зависимость от времени значения анизотропии пульсаций скорости

$$E_{ij}(t) \equiv \max k_{ii} / \max k_{jj}, \quad (2.10)$$

где фигурируют максимальные по ширине ЗТП значения диагональных компонент k_{ii} (суммирование по i здесь нет), тензора k_{ik} (в выражении (2.10) суммирование по индексам i, j нет).

Как видно из рис. 5, в трехмерных расчетах явно проявляется анизотропия тензора Рейнольдса, причем в расчетах с двумя веществами "продольная" компонента k_{yy} диагональной части тензора k_{ij} в зоне перемешивания больше "поперечных".

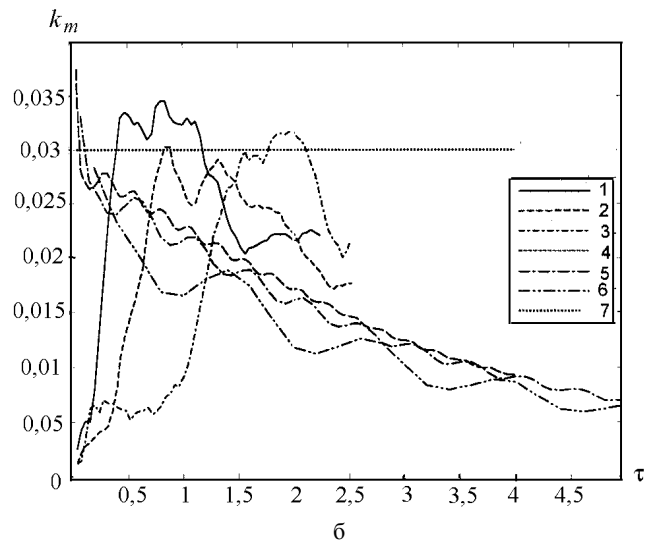
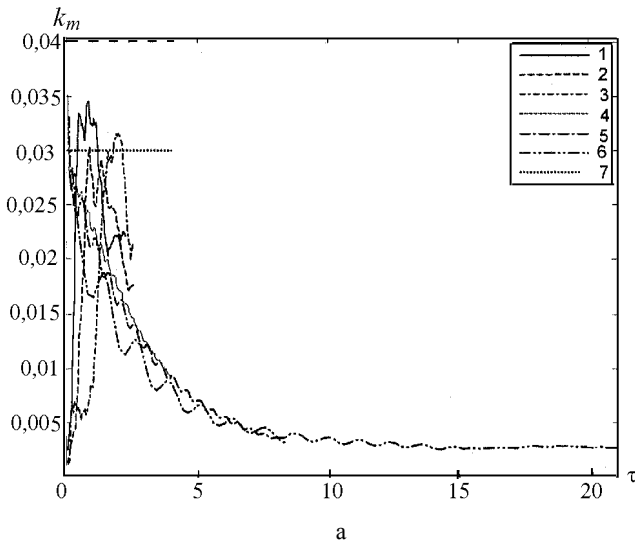


Рис. 4. Зависимость от времени максимального по ЗТП значения турбулентной энергии. 3D расчеты: 1 – с $N_x = 201$, 2 – с $N_x = 101$, 3 – с $N_x = 101$ с одним веществом; 1D расчеты: 4–6 с $g = 0,2, 0,4, 1$ соответственно; 7 – аппроксимация экспериментальных данных [7, 8]: а и б отличаются масштабом по τ

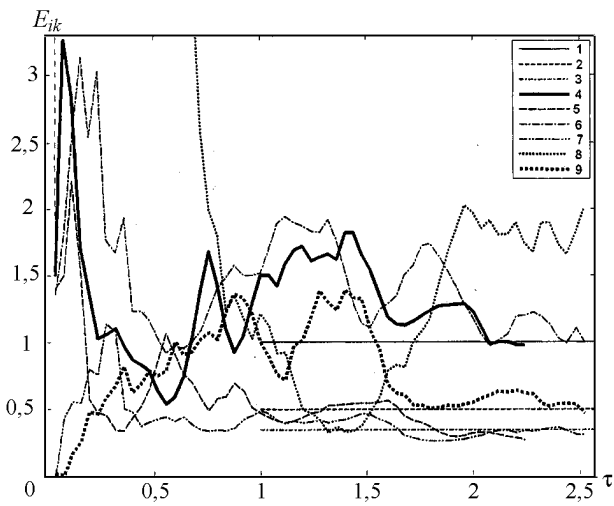


Рис. 5. Зависимость от времени анизотропии пульсаций скорости. 3D расчеты с $N_x = 201$ (4, 5), с $N_x = 101$ (6, 7), с $N_x = 101$ с одним веществом (8, 9): 4, 6, 8 – E_{xz} , 5, 7, 9 – E_{zy} . Решение [10] для начальной стадии: 1 – E_{xz} , 2 – E_{zy} , $b = 0,085$; 3 – E_{zy} , $b = 0,13$

Согласно модели турбулентности [10], учитывающей анизотропию тензора Рейнольдса, для начальной стадии следуют соотношения:

$$E_{zy} \equiv \frac{k_{zz}}{k_{yy}} = \frac{1/3 - b}{1/3 + 2b}; \quad (2.11)$$

$$E_{xz} \equiv \frac{k_{xx}}{k_{zz}} = 1. \quad (2.12)$$

Величина E_{zy} приводится на рис. 5 для двух значений $b = 0,13$ и $b = 0,085$ – эти значения лучше всего описывают ранее исследованное течение [1].

Как видно из рис. 5, результаты для E_{ik} в целом с точностью до пульсаций согласуются с формулой (2.11) как в вариантах с двумя веществами, так и в расчете с одним веществом (в этом случае с некоторым запаздыванием).

На рис. 6 показана зависимость от времени максимального в ЗТП значения квадрата пульсаций плотности R_m

$$R_m \equiv \max(\langle \rho'^2 \rangle). \quad (2.13)$$

Как следует из этого рисунка, на первой стадии эволюции течения максимальные в ЗТП значения квадрата пульсаций плотности в 3D расчетах с одной концентрацией заметно меньше, чем с двумя концентрациями.

На последующей стадии эволюции течения в одножидкостном расчете максимальные в ЗТП значения R_m квадрата пульсаций плотности заметно падают. В двухжидкостном 3D расчете эти значения остаются практически постоянными – ситуация аналогична случаю знакопеременного ускорения, рассмотренного в [11].

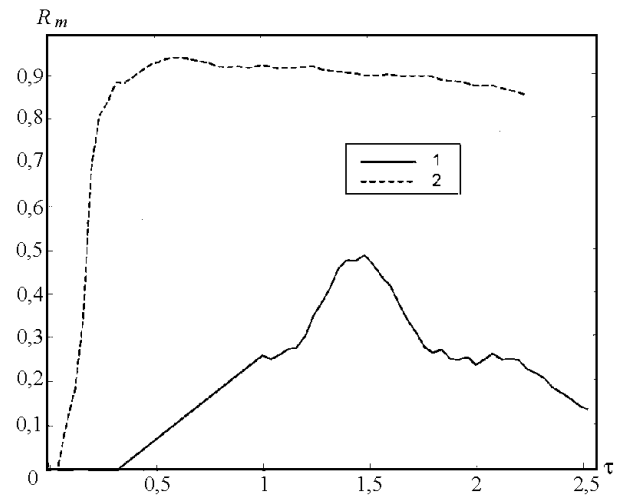


Рис. 6. Зависимость от времени максимального в ЗТП значения квадрата пульсаций плотности в 3D расчетах: 1 – $N_x = 101$ с одним веществом; 2 – $N_x = 201$ с двумя веществами

На рис. 7 показана зависимость от времени максимального (по модулю) в ЗТП значения турбулентного потока массы

$$R_{zm} \equiv \begin{cases} \max(R_z), & R_z > 0, \\ -\max(-R_z), & R_z < 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

где

$$R_z \equiv \langle \rho' u'_z \rangle. \quad (2.15)$$

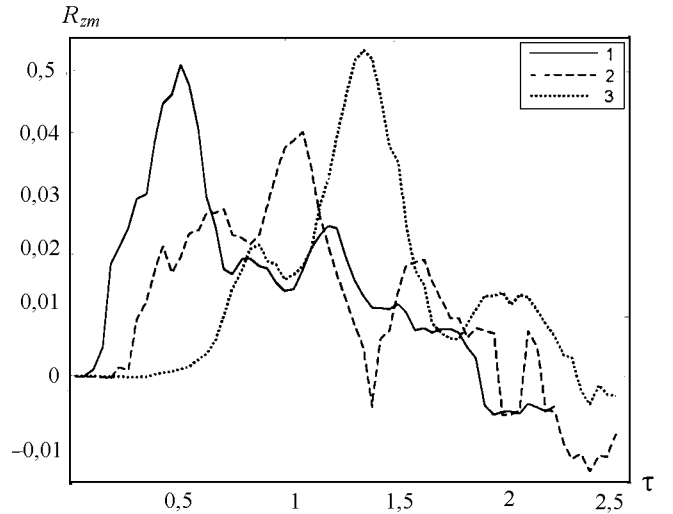


Рис. 7. Зависимость от времени максимального (по модулю) турбулентного потока массы в 3D расчетах: 1 – $N_x = 201$; 2 – $N_x = 101$; 3 – $N_x = 101$ с одним веществом

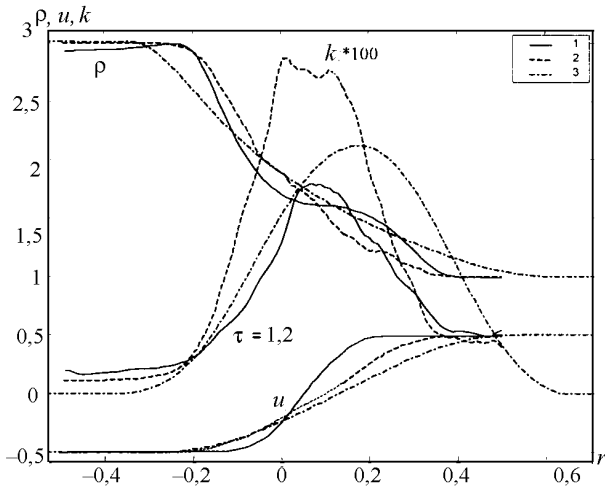
Как и для величины k_m , из рис. 7 следует, что в конце первой стадии величины R_{zm} выходят на близкое во всех вариантах значение. На последующей стадии положительный турбулентный поток резко умень-

шается, появляется отрицательный поток – при этом наблюдаются большие пульсации. В целом поведение $R_{zm}(t)$ во всех вариантах близко, если не считать уже упоминавшегося сдвига по времени.

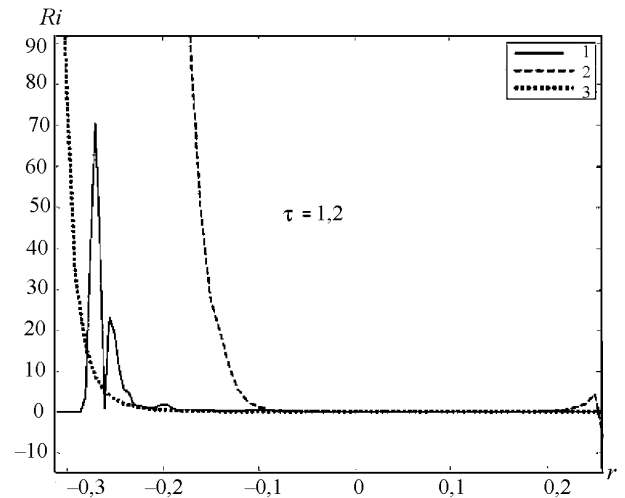
2.4. Профили величин. На рис. 8,а, 9,а, 10,а показаны профили скорости, плотности, турбулентной энергии, полученные в 3D расчетах как с одним веществом, так и с двумя веществами, на рис. 8,б, 9,б, 10,б – профили числа Ричардсона $Ri \equiv g_z \frac{\partial \rho}{\partial z} / \left(\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right)$.

$$Ri \equiv g_z \frac{\partial \rho}{\partial z} / \left(\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right)$$

Профили скорости и плотности, как видно из этих рисунков, на первой стадии близки по форме и положению, принимая во внимание сдвиг по времени в расчете с одним веществом. Однако при $\tau > 1,4$ в указанном расчете, в отличие от расчета с двумя веществами, образуется уступ в профиле плотности. Соответственно максимум турбулентной энергии, располагающийся в области уступа, оказывается больше по величине. Этого следовало ожидать, учитывая, что профили скорости в обоих вариантах при этом близки.

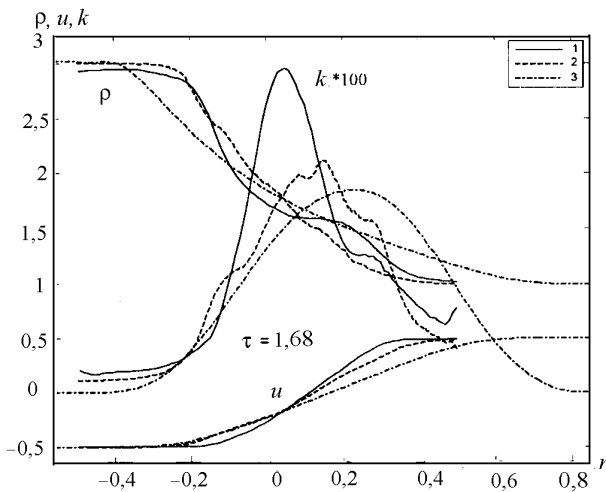


а

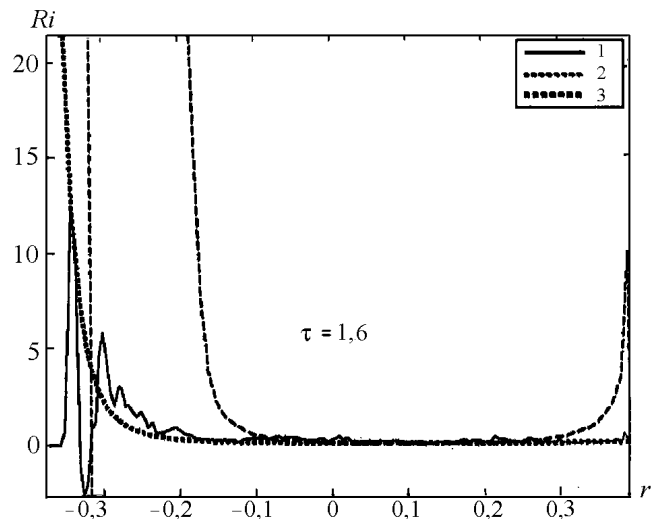


б

Рис. 8. $\tau = 1,2$: а – профили скорости (u), плотности (ρ), турбулентной энергии (k); 3D расчеты: 1 – $N_x = 100$ с одним веществом; 2 – $N_x = 200$ с двумя веществами; 3 – $k - \varepsilon$ модель; б – профили числа Ri



а



б

Рис. 9. $\tau = 1,68$: а – профили скорости (u), плотности (ρ), турбулентной энергии (k); 3D расчеты: 1 – $N_x = 100$ с одним веществом; 2 – $N_x = 200$ с двумя веществами; 3 – $k - \varepsilon$ модель; б – профили числа Ri

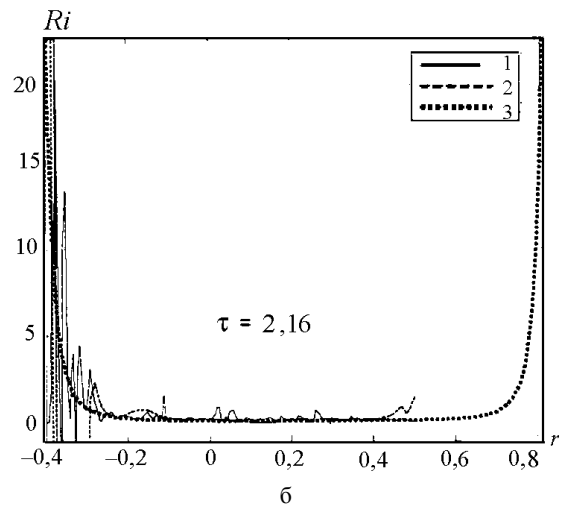
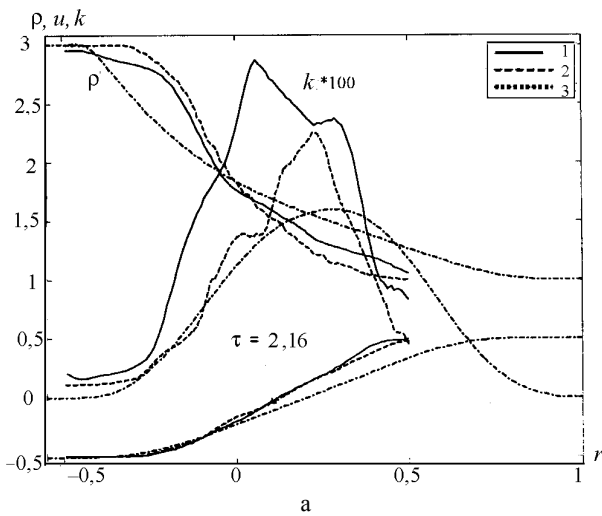


Рис. 10. $\tau = 2,16$: а – профили скорости (u), плотности (ρ), турбулентной энергии (k); 3D расчеты: 1 – $N_x = 100$ с одним веществом; 2 – $N_x = 200$ с двумя веществами; 3 – $k - \varepsilon$ модель; б – профили числа Ri

Профили числа Ричардсона, как видно из рис. 8,б, 9,б, 10,б, в конце первой стадии имеют качественное сходство, а именно: в области тяжелого вещества они образуют "барьер", подавляющий турбулентность и препятствующий проникновению вещества и завихренности в эту область (напомним, что критическое значение числа Ричардсона составляет 0,5). Это объясняет преимущественное расширение профилей скорости и плотности в сторону легкого вещества – получающаяся асимметрия гораздо больше, чем для неустойчивой стратификации.

2.5. Функция плотности распределения вероятности концентрации. По данным численного расчета определялась одноточечная функция плотности распределения вероятности массовой концентрации тяжелого вещества

$$F(c_2, z, t) = \frac{N(c_2^{(ik)}(z) \geq (c_2 + \Delta c)) - N(c_2^{(ik)}(z) \geq c_2)}{N_0 \Delta c} \quad (2.16)$$

Здесь $N(c_2^{(ik)}(z) \geq c_2)$ – количество точек в данной горизонтальной плоскости z , текущая концентрация $c_2^{(ik)}$ в которых превышает величину c_2 , $N_0(z)$ – полное число точек в этой плоскости. Величина c_2 пробегает ряд значений из M чисел

$$c_2 = (0, 1, 2, \dots, M-1)\Delta c,$$

где $M\Delta c = 1$; в наших расчетах $M = 100$.

На рис. 11 показаны функции $F(c_2, z, t)$, рассчитанные по исходному (без усреднения) массиву концентраций c_2 для области ЗТП, близкой к легкому веществу, на моменты времени $\tau = 1$ (конец первой стадии) и $\tau = 2$ (заметное подавление турбулентности), в варианте расчета с двумя веществами, выполненного на подробной сетке ($N_x = 200$). На рисунке приведено значение вертикальной координаты z (отсчитываемой от контактной границы), отнесенное к ширине L_t ЗТП,

т. е. $\eta \equiv \frac{z - z_c}{L_t}$. Поскольку кривые для $\tau = 1$ и $\tau = 2$ берутся при одном и том же значении z , соответствующие величины η_1 и η_2 оказываются разными. Можно видеть, что максимальные значения $F(c_2, z, t)$ функции достигаются в основном вблизи $c \approx 1$ и $c \approx 0$, т. е. $F(c_2, z, t)$ сосредоточена (имеет вид δ -функции) в крайних точках интервала концентраций. В основном же интервале значений c_2 она мала по величине ($F(c_2, z, t) < 0,1 - 0,2$) – с физической точки зрения это близко к несмешивающимся жидкостям, что характерно при описании задачи с помощью 3D расчетов с двумя концентрациями (см. также [11]).

Далее, перед нахождением $F(c_2, z, t)$ усредним массив концентраций по формуле

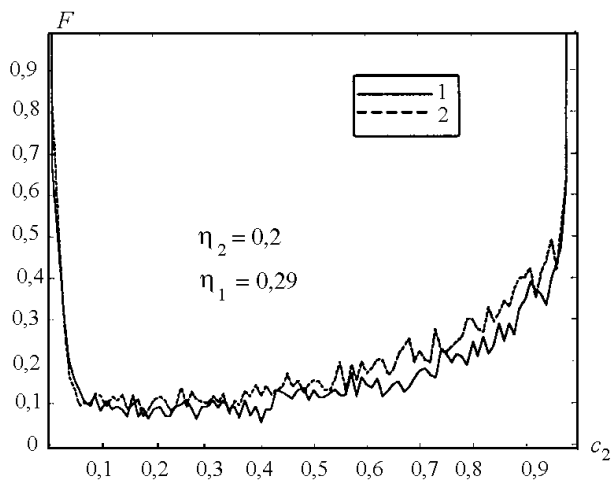
$$c_2^{(n)}(l, x, y, z) = \langle c_2 \rangle_{l,x,y,z}; \quad n = 1, 2, \dots, N_z,$$

где $l = rh$, $r = 2$. На самом деле, при $r \geq 2$ (но $r \ll \ll \min(N_x, N_y)$) получающиеся затем функции $F(c_2, z, t)$ отличаются незначительно, в то время как при $r = 1$ отличие радикальное: как мы видели, $F(c_2, z, t)$ близка к двум δ -функциям, $\delta(0)$ и $\delta(1)$.

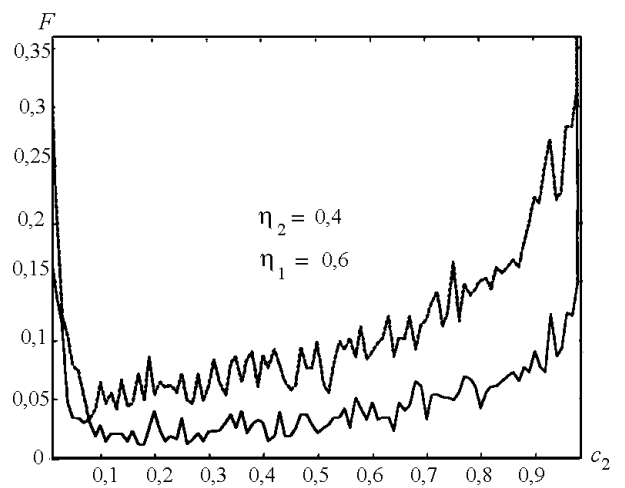
Найдем теперь $F(c_2, z, t)$ с усреднением исходного массива концентраций, полагая $r = 2$.

На рис. 12, 13 найденные таким образом функции $F(c_2, z, t)$ сравниваются для моментов времени $\tau = 1$ и $\tau = 2$, для двух вариантов расчета: с одним и двумя веществами последний выполнен на подробной сетке ($N_x = 200$).

Из рис. 12 видно, что в области ЗТП, прилегающей к тяжелому веществу ($\eta \lesssim -0,2$), максимальные значения $F(c_2, z, t)$ достигаются ближе к $c_2 \approx 1$, т. е. наиболее вероятны частицы тяжелого вещества. Близкое поведение $F(c_2, z, t)$ и в варианте с двумя веществами.

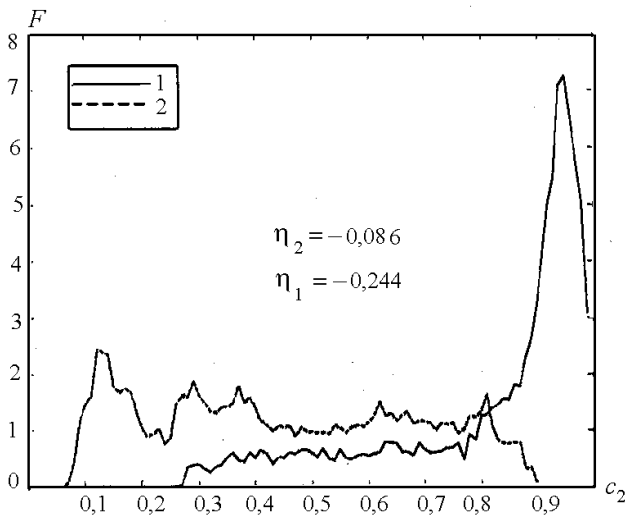


а

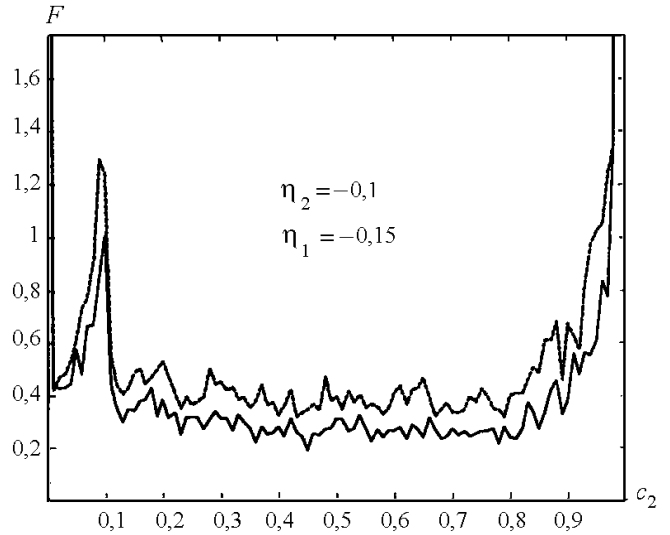


б

Рис. 11. Функция плотности распределения вероятности массовой концентрации тяжелого вещества в 3D расчете (без усреднения исходного массива концентраций) на сетке $N_x = 200$, с двумя веществами: 1 – $\tau = 1$; 2 – $\tau = 2$

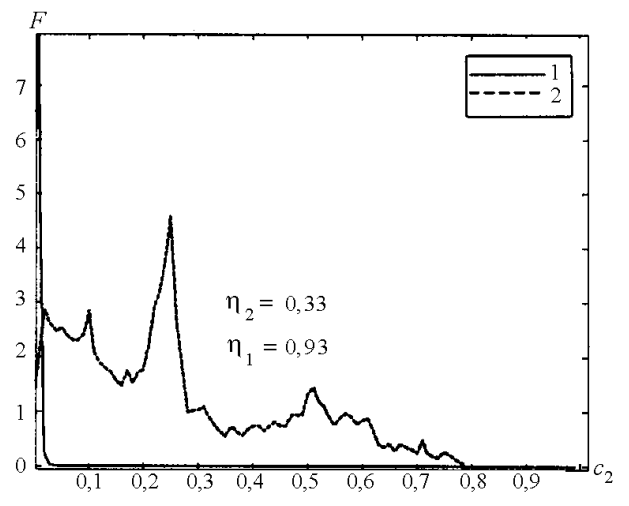
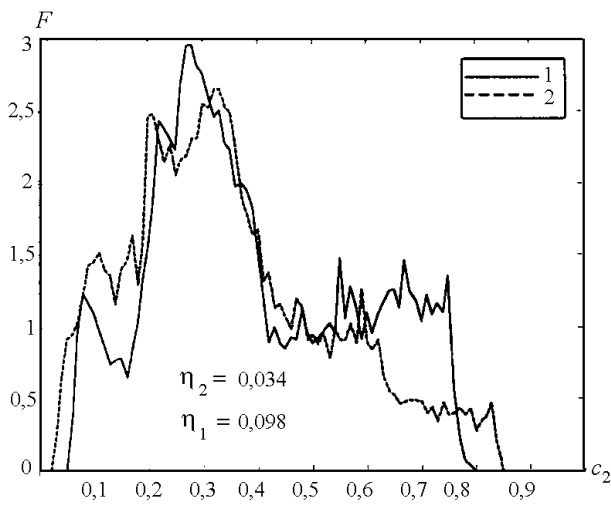


а

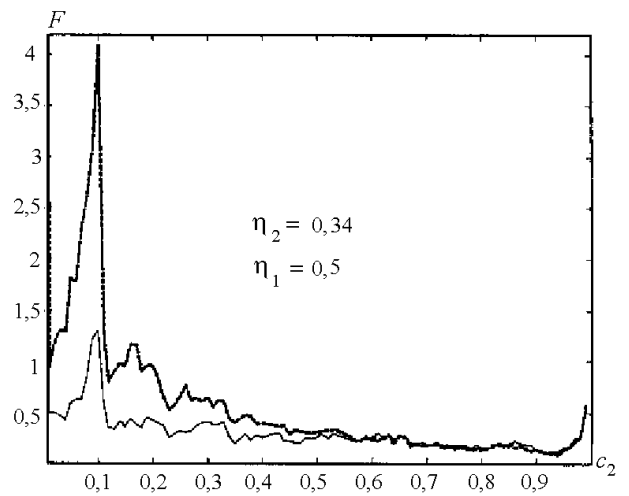
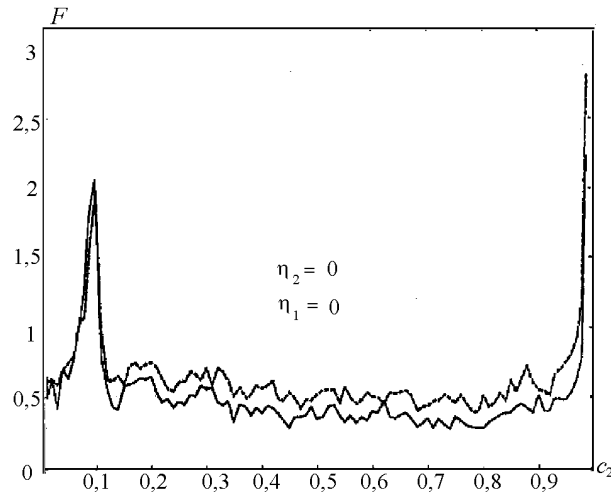


б

Рис. 12. Функция плотности распределения вероятности массовой концентрации тяжелого вещества в 3D расчетах (с усреднением исходного массива концентраций, $r = 2$): а – сетка $N_x = 100$, с одним веществом; б – сетка $N_x = 200$, с двумя веществами. 1 – $\tau = 1$, 2 – $\tau = 2$



а



б

Рис. 13. Функция плотности распределения вероятности массовой концентрации тяжелого вещества в 3D расчетах (с усреднением исходного массива концентраций, $r = 2$): а – сетка $N_x = 100$, с одним веществом;

б – $N_x = 200$, с двумя веществами. 1 – $\tau = 1$, 2 – $\tau = 2$

Заметное расхождение указанных вариантов начинается в центральной части ЗТП и в области, прилегающей к легкому веществу: в варианте с одним веществом максимальное значение $F(c_2, z, t)$ достигается в середине интервала значений c_2 , в варианте с двумя концентрациями $F(c_2, z, t)$ оказывается в большей степени сосредоточенной вблизи краев интервала c_2 , хотя и не столь существенно, как при $r = 1$ – характерное значение внутри интервала: $c_2 \approx 0,5$.

Наконец, в области ЗТП, прилегающей к легкому веществу ($\eta > 0,2 \div 0,3$), максимальные значения $F(c_2, z, t)$ достигаются в обоих вариантах расчета ближе к $c_2 \approx 0$, т. е. наиболее вероятны частицы легкого вещества.

2.6. Спектры пульсаций скорости и плотности. Как известно [12], среднее значение квадрата пульсаций i -й компоненты скорости $\overline{u_i'^2}$ связано с соответ-

ствующей одномерной спектральной плотностью $\tilde{E}_i(k)$ соотношением

$$\overline{u_i'^2} = \int_0^{\infty} \tilde{E}_i(k') dk'. \quad (2.17)$$

Отметим, что в нашем случае усреднение по ансамблю соответствует усреднению в горизонтальной плоскости X, Y . Следовательно, $\overline{u_i'^2}$ есть функция z .

Следуя [12], сопоставим любому фиксированному значению k разбиение энергии $\overline{u_i'^2}$ на две части

$$\overline{u_i'^2} = \int_0^k \tilde{E}_i(k') dk' + \int_k^{\infty} \tilde{E}_i(k') dk'. \quad (2.18)$$

Такому разбиению соответствует разбиение поля мгновенных значений u_i на макрокомпоненту \bar{u}_i (с энергией, равной $\int_0^k \tilde{E}_i(k') dk'$) и микрокомпоненту \underline{u}_i (с

энергией $E_i(k) = \int_k^\infty \tilde{E}_i(k') dk'$ – см. [12]. Величина

$\tilde{E}_i(k')$ в [12] называется просто спектром – подразумевается одномерная спектральная плотность поля u_i , соответствующая корреляционной функции этого поля. В инерционном интервале турбулентности реализуется колмогоровский спектр: $\tilde{E}_i(k') \sim (k')^{-5/3}$.

Более прозрачный физический смысл имеет, на наш взгляд, величина $E_i(k)$, которая определяет удвоенную удельную кинетическую энергию пульсаций i -й компоненты скорости с длиной волны $\lambda \leq \frac{2\pi}{k}$. Колмогоровскому спектру для $\tilde{E}_i(k')$, а также для суммарной энергии всех компонент $E(k) \equiv \sum_i E_i(k) : k^{-2/3}$ соответствует, очевидно, зависимость $E(k) : E_i(k) : k^{-2/3}$, ее мы также будем называть колмогоровским спектром турбулентной энергии $E(k)$, а также ее компонент $E_i(k)$.

На основе расчетных данных был исследован спектр турбулентной энергии и ее компонент в соответствии с формулой

$$E_i^{(n)}(l, x, y, z) = \langle u_i^2 \rangle_{l, x, y, z} - \langle u_i \rangle_{l, x, y, z}^2; \quad n = 1, 2 \dots N_z;$$

$$E_i(l, z) = \langle E_i^{(n)}(l, x, y, z) \rangle; \quad l = rh, \quad r = 2, 3 \dots N_x. \quad (2.19)$$

Здесь усреднение $\langle \rangle_{l, x, y, z}$ делается в n -м слое (по z) в квадрате со стороной l ($l = rh$, h – размер счетной ячейки), центр которого имеет координаты x, y, z и далее усреднение ($\langle \rangle$) по всем возможным значениям x, y квадратов с данным значением l, z во всем n -м слое. Суммирование по i в (2.19) нет. Далее

$$E(l, z) = \sum_{i=1}^3 E_i(l, z). \quad (2.20)$$

Результаты расчета для нескольких моментов времени в расчете на сетке $N_x = 201$ приведены на рис. 14, 15 в виде зависимости $\lg E_i(\lg k)$, $\lg E(\lg k)$ (где $k = 2\pi/l$) для различных значений приведенной координаты $\zeta \equiv \frac{z - z_c}{L_t}$.

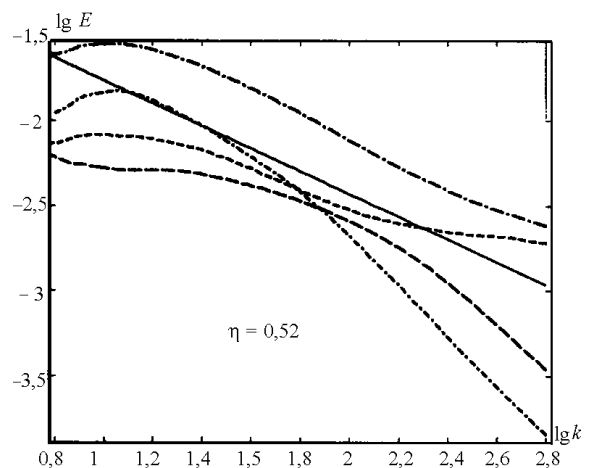
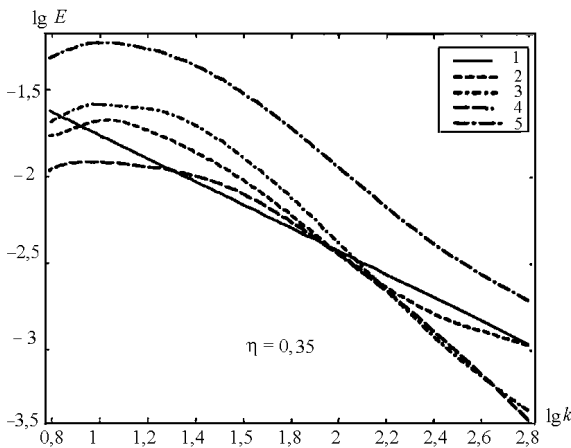
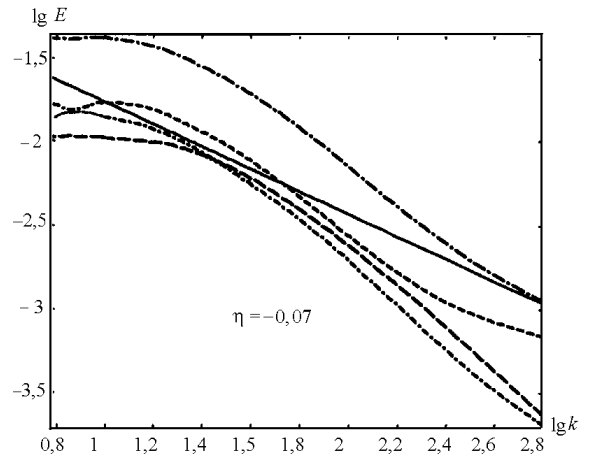
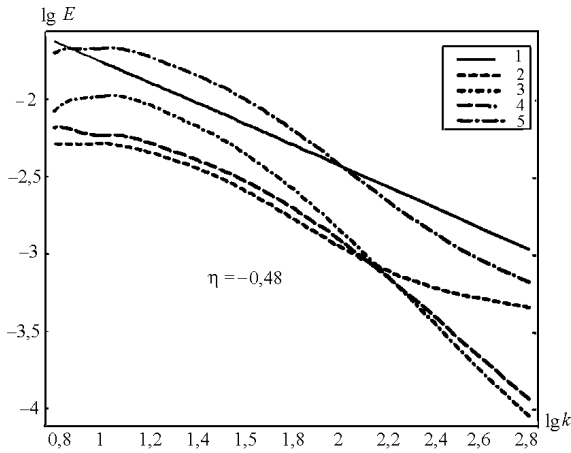


Рис. 14. Спектр турбулентной энергии и ее компонент в расчете на сетке $N_x = 201$, $\tau = 1, 2$; 2 – E_x ; 3 – E_y ; 4 – E_z ; 5 – E ; 1 – колмогоровский спектр

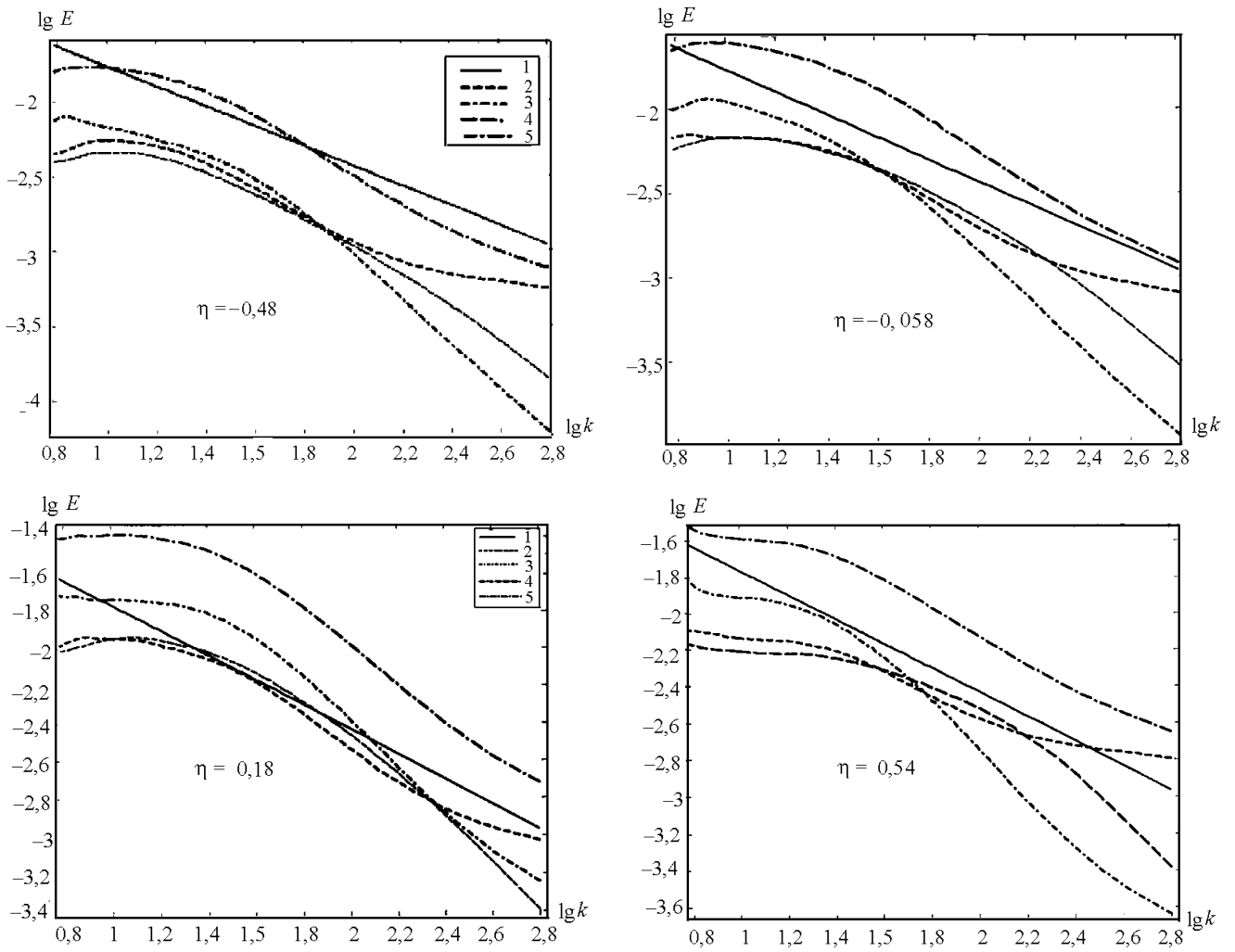


Рис. 15. Спектр турбулентной энергии $E(k)$ и ее компонент $E_i(k)$, в расчете на сетке $N_x = 201$, $\tau = 1,8$; 2 – E_x ; 3 – E_y ; 4 – E_z ; 5 – E ; 1 – колмогоровский спектр

На тех же рисунках приведен колмогоровский спектр турбулентной энергии

$$\lg E = -\frac{2}{3} \lg k + \text{const}. \quad (2.21)$$

Как видно, внутри ЗТП ($0,4 > \zeta > -0,4$) имеются интервалы волновых чисел K , на которых спектр полной энергии E в целом приближается к трехмерному колмогоровскому спектру. В то же время для отдельных компонент отличие от колмогоровской зависимости заметно больше. Отметим, что на больших пространственных масштабах (малые K) преобладает E_y , как и должно быть для сдвигового течения, согласно феноменологической модели [10] и измерениям [7, 8]. Однако на малых масштабах (большие K) почти во всех точках ЗТП преобладает E_x . Наиболее очевидной причиной этого является действие схемной вязкости, которая заметна именно на малых масштабах и подавляет в наибольшей степени как раз компоненты E_y, E_z , поскольку основное направление скорости на больших масштабах, порождающее анизотропную схемную вязкость на малых масштабах, как раз y и z . Отметим, что

анизотропия, как видно из рис. 14, 15, возрастает от центра ЗТП к ее краям, поскольку возрастает и модуль скорости, определяющий схемную вязкость. Более детально аналогичный эффект схемной вязкости разобран в докладе [13].

Аналогичная спектральная величина рассчитывается для квадрата пульсаций плотности

$$R_l^n(x, y) = \langle \rho^2 \rangle_{l,x,y,z} - \langle \rho \rangle_{l,x,y,z}^2; \quad n = 1, 2, \dots, N_z; \\ R_l(z) \equiv \langle R_l^n(x, y) \rangle; \quad l = rh; \quad r = 2, 3, \dots, N_x, \quad (2.22)$$

она показана на рис. 16–18. Там же приведен колмогоровский спектр квадрата пульсаций плотности (см. также [12])

$$\lg R_l = -\frac{2}{3} \lg k + \text{const}. \quad (2.23)$$

Как видно из рис. 16, на первой стадии ($\tau = 0,6$), когда перемешивание в основном носит характер сдвигового, в 3D расчетах спектр плотности на малых масштабах приближается к колмогоровскому. Лучшее согласие наблюдается при отрицательных значениях приведенной координаты ζ , т. е. в области тяжелого вещества – в области легкого становится заметным отклонение от колмогоровского спектра.

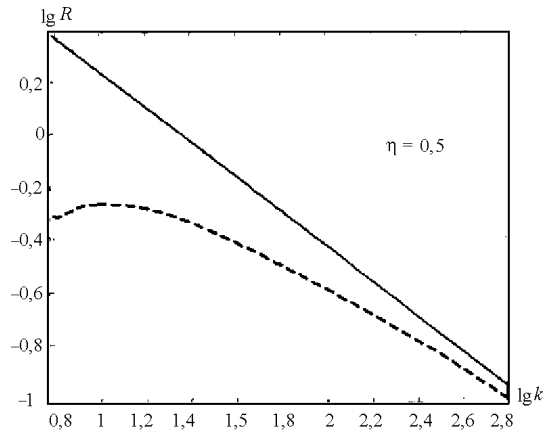
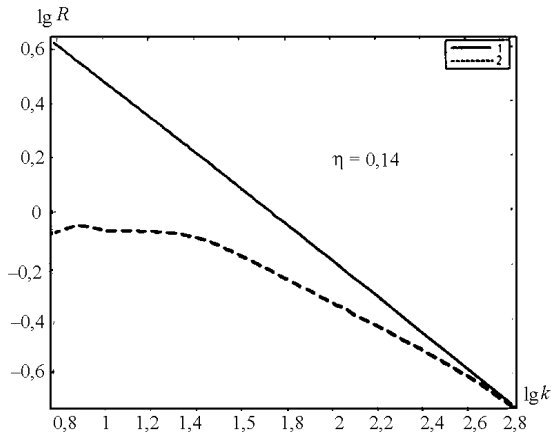
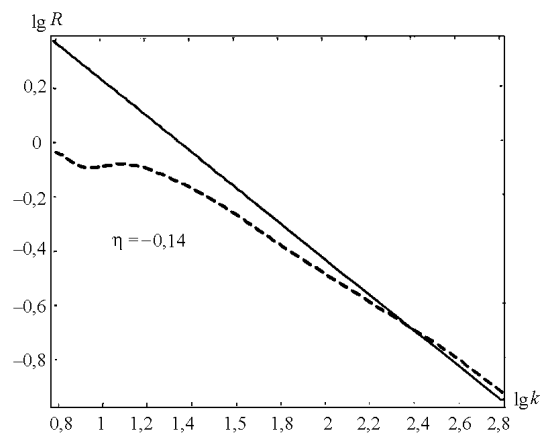
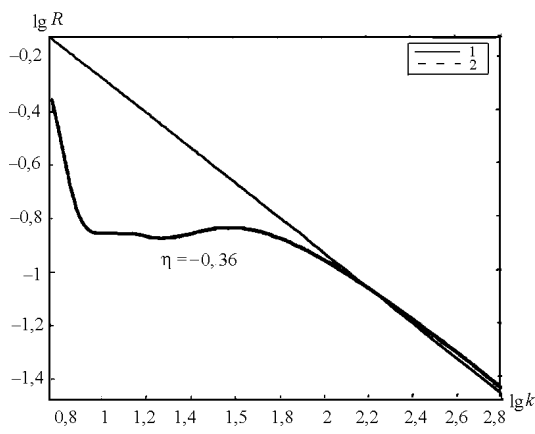


Рис. 16. Спектр пульсаций плотности R_l в 3D расчете на сетке $N_x = 201$, $\tau = 0,6$; 1 – колмогоровский спектр; 2 – расчет

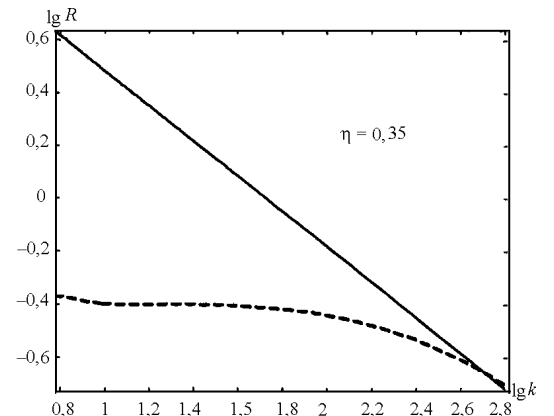
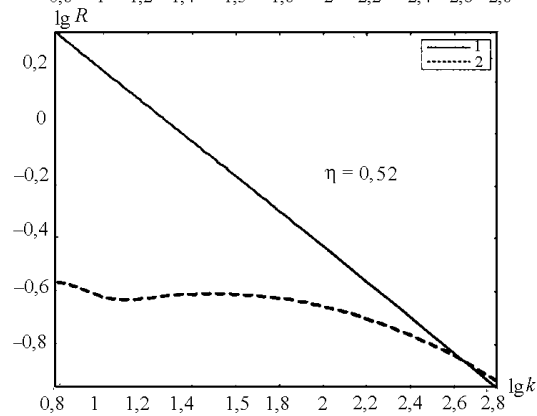
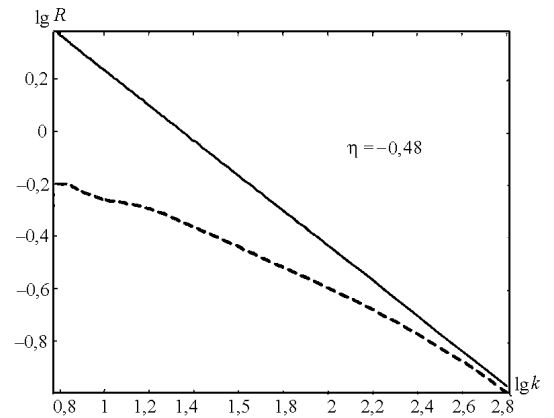
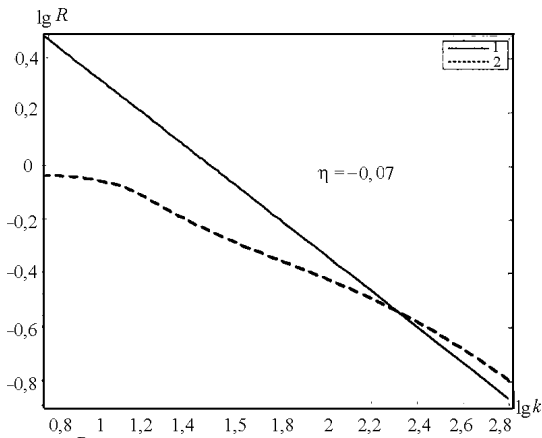


Рис. 17. Спектр пульсаций плотности R_l в 3D расчете на сетке $N_x = 201$, $\tau = 1,2$; 1 – колмогоровский спектр; 2 – расчет

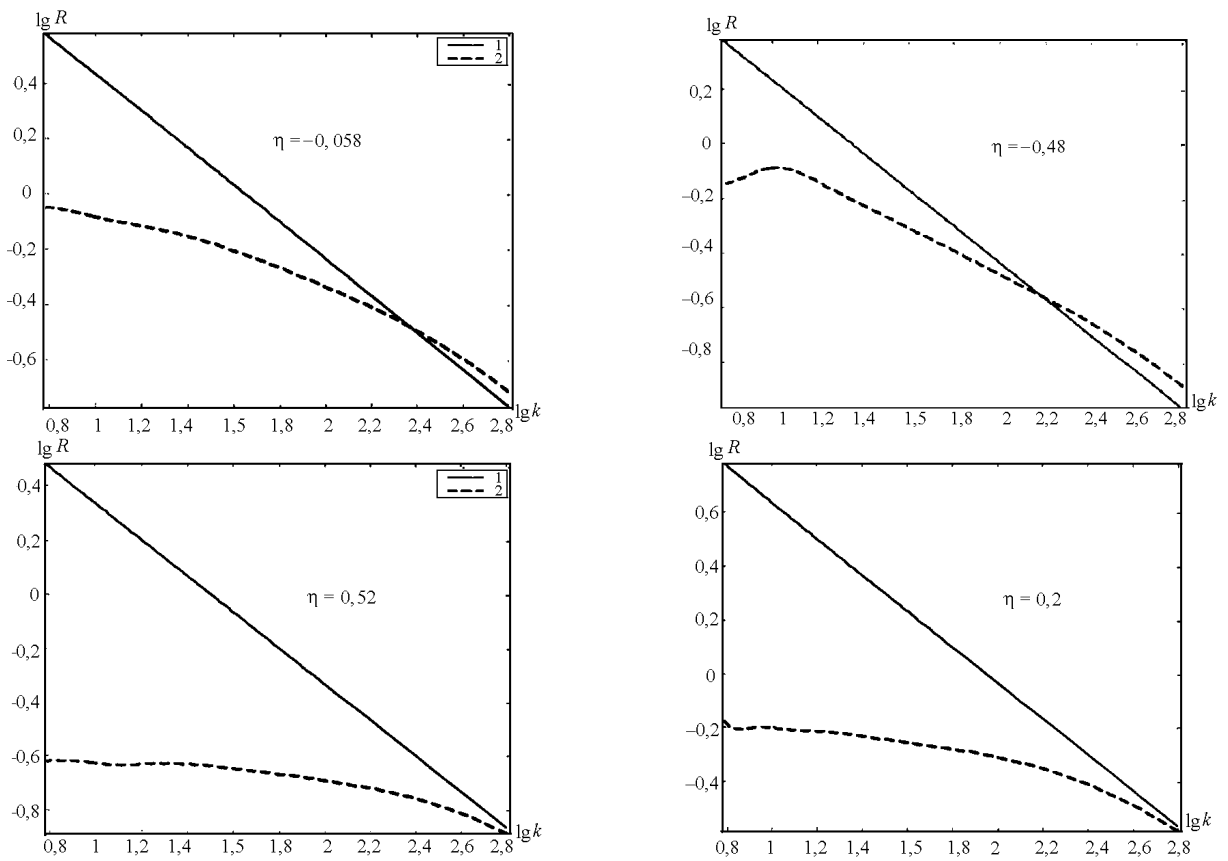


Рис. 18. Спектр пульсаций плотности R_l в 3D расчете на сетке $N_x = 201$, $\tau = 1,8$; 1 – колмогоровский спектр; 2 – расчет

На последующей стадии ($\tau = 1,2$), когда сдвиговое перемешивание начинает подавляться за счет устойчивой стратификации, спектр плотности, как видно из рис. 17, начинает более заметно отличаться от колмогоровского – причем также в большей степени в области легкого вещества. Еще большее отличие спектра от колмогоровского наблюдается для более поздней стадии ($\tau = 1,8$), показанной на рис. 18.

Это согласуется с представлениями работы [12] о поведении спектра плотности для несмешивающихся жидкостей при наличии устойчивой стратификации, приводящей к изменению знака турбулентного потока массы.

3. Результаты расчетов по $k - \epsilon$ модели

На рис. 3,а, б показана полученная в 1D расчетах по $k - \epsilon$ модели зависимость ширины ЗТП от времени для нескольких значений $g_z = 0,2; 0,4; 1$. Как и должно было следовать из заключений подраздела 2.2, все кривые приведенных величин $l_t(\tau)$ для этих значений близки, т. е. имеют универсальный вид, не зависящий от g_z .

На начальной стадии ($\tau < 1-1,5$) наклон этих кривых близок как к 3D расчетам, так и к соответствующим экспериментальным данным, а также к данным [3, 4].

В последующие моменты времени указанный наклон уменьшается, как и в 3D расчетах, но, в отличие от них, в расчетах по $k - \epsilon$ модели влияние границы отсутствует. В наиболее продвинутом по τ варианте с $g = 1$ $l_t^{(c)}$ практически прекращает расти, а $l_t^{(u)}$ выходит на линейную зависимость от τ . При этом, однако, угол наклона $l_t^{(u)}(\tau)$ намного меньше (почти на порядок), чем на первой стадии. Максимальные значения $l_t^{(c)} \approx 0,36$, $l_t^{(u)} \approx 0,5$, что согласуется с данными [3, 4] – $l_t \approx 0,45$.

Поведение во времени величины максимального по ширине ЗТП значения турбулентной энергии $k_m(t)$ в расчетах по $k - \epsilon$ модели и в 3D расчетах весьма близкое (рис. 4), если принять во внимание запаздывание (сдвиг по времени) в последних. В наиболее продвинутом по τ варианте с $g = 1$ $k_m(t)$ выходит практически на постоянное значение, величина которого приблизительно на порядок меньше, чем на первой стадии.

На рис. 8,а, 9,а, 10,а показаны профили скорости, плотности, турбулентной энергии, полученные в расчетах по $k - \epsilon$ модели, на рис. 8,б, 9,б, 10,б – профили числа Ричардсона (Ri). Профили скорости и плотности, как видно из этих рисунков, на первой стадии близки по форме и положению к полученным в 3D расчетах, принимая во внимание сдвиг по времени. При $\tau > 1,5$ профили турбулентной энергии в расчете по $k - \epsilon$

модели ближе к 3D расчету на подробной сетке, хотя и несколько шире его, что частично связано со сдвигом по времени в последнем. Профили числа Ричардсона, как видно из рис. 8,б, 9,б, 10,б, также имеют большее сходство с 3D расчетом на подробной сетке, в частности, в области тяжелого вещества, где они образуют "барьер", подавляющий турбулентность (см. подраздел 2.4).

Выводы

Проведенное с помощью комплекса ТРЭК прямое 3D численное моделирование турбулентного сдвигово-гравитационного перемешивания с устойчивой стратификацией дало следующие результаты.

Поведение ширины ЗТП на первой (неустойчивой) стадии перемешивания, когда преобладает сдвиговая генерация турбулентности, близко во всех расчетах и согласуется с соответствующими экспериментальными данными [7–9], а также данными расчетов [3, 4] по феноменологической модели.

Также близки во всех расчетах достигаемые в конце первой стадии максимальные в ЗТП значения приведенных величин турбулентной энергии E_m (они согласуются с экспериментальными данными [7–8]) и турбулентного потока массы, в то время как максимальные в ЗТП значения квадрата пульсаций плотности в расчетах с одной концентрацией заметно меньше, чем с двумя концентрациями.

Вторая (устойчивая) стадия, когда турбулентность подавляется, осуществляется при $\tau \gtrsim 1-1,5$. Ей соответствуют уменьшение скорости роста ширины ЗТП и заметное падение турбулентной энергии E_m . Падают также максимальные в ЗТП значения R_m квадрата пульсаций плотности в одножидкостном расчете. В двухжидкостном 3D расчете эти значения остаются практически постоянными – ситуация аналогична случаю знакопеременного ускорения, рассмотренного в [11].

Внутри ЗТП одноточечная функция плотности распределения вероятности массовой концентрации тяжелого вещества $F(c_2, z, t)$ в варианте с одним веществом достигает максимума в середине интервала значений c_2 , в то время как в варианте с двумя веществами $F(c_2, z, t)$ оказывается в большей степени сосредоточенной вблизи краев интервала c_2 .

В расчетах по $k-\epsilon$ модели скорость роста ширины ЗТП на начальной стадии близка к 3D расчетам и измерениям. Уменьшение этой скорости на последующей стадии качественно согласуется с 3D расчетами. Близкий к 3D расчетам характер имеет также затухание турбулентной энергии E_m на этой стадии.

Авторы выражают благодарность В. А. Жмайло за ценные замечания.

Список литературы

1. Yanilkin Yu. V., Statsenko V. P., Rebrov S. V., Sin'kova O.G., Stadnik A.L. Study of gravitational turbu-

lent mixing at large density differences using direct 3D numerical simulation // Report to 8th International Seminar on Turbulent Mixing of Compressible Matter. 8th IWPCTM, Pasadena, USA, 2001.

2. Stadnik A. A., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmailo V. A. Direct numerical simulation of turbulent mixing in shear flows // Laser and Particle Beams. 1997. Vol. 15, No. 1. P. 115–125.

3. Andronov V. A., Zhidov I. G., Meshkov E. E. et al., Computational and Experimental Studies of Hydrodynamic Instabilities and Turbulent Mixing (Review of VNIIEF Efforts), Los Alamos National Laboratory report LA-12896, UC-700 (1995).

4. Nikiforov V. V., Yanilkin Yu. V., Yudin Yu. A. et al. Numerical Simulation of Turbulent Mixing in Two-Dimensional Flows. The Physics of Compressible Turbulent Mixing, Marseille (France), 374–380, 1997.

5. Yanilkin Yu. V., Tarasov V. I., Stadnik A. L. et al. Program System TREK for Numerical Simulation of 3D Multi-component Medium Flows. Proceedings of workshop "New Models and Numerical Codes for Shock Wave Processes in Condensed Media", Oxford. 1997. P. 413–422.

6. Eliseyev G. M., Shemyakin V. Yu., Statsenko V. P., Tarasov V. I., Yanilkin Yu. V., Zharova G. V. Turbulent combustion of hydrogen-air mixture in a closed vessel // Report to 7th International Seminar on Turbulent Mixing of Compressible Matter. 7th IWPCTM, St. Petersburg, Russia. 1999. P. 244–251.

7. Spenser B. W., Jones B. G. Statistical investigation of pressure and velocity fields in the turbulent two-stream mixing layers. AIAA Paper. 1971. P. 613.

8. Browand F. K., Latigo B. O. Growth of the two-dimensional mixing layer // Phys.Fluids. 1979. Vol. 22, No. 6. P. 1011.

9. Rodi W. A. Review of experimental data of uniform density free turbulent boundary layers. Studies in convection, Acad. Press, London. 1975. Vol. 1. P. 79–166.

10. Стаценко В. П. Тестирование модели турбулентности с анизотропией тензора Рейнольдса // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1996. С. 43–51.

11. Жмайло В. А., Синькова О. Г., Софронов В. Н., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В., Гужова А. Р., Павлушин А. С. Численное исследование гравитационного турбулентного перемешивания при знакопеременном ускорении // Доклад на Междунар. семинар по физике турбулентного перемешивания сжимаемых сред (Кембридж, июль, 2004).

12. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Часть 2. М.: Наука, 1967.

13. Синькова О. Г., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В., Гужова А. Р. Численное моделирование опыта по исследованию турбулентного перемешивания после неоднократного прохождения ударной волны через границу раздела // Доклад на Междунар. семинар по физике турбулентного перемешивания сжимаемых сред (Кембридж, июль, 2004).

Статья поступила в редакцию 03.02.2005.