Памяти нашего безвременно скончавшегося коллеги
Пушкина Александра Васильевича
посвящается

УДК 531.51

УРАВНЕНИЯ КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКИ

М. В. Горбатенко, Ю. А. Романов
РФЯЦ-ВНИИЭФ

Представлены идеи, на основе которых получаются уравнения, являющиеся простейшей формой конформно-инвариантного обобщения уравнений Эйнштейна. Рассмотрение относится к трем основным этапам формирования идей в этом направлении (1968 г., 1984 г. и 1996 г.); обсуждается также связь полученных уравнений с другими исследованиями.

Введение

Общая теория относительности (ОТО), созданная около 90 лет назад, базируется на уравнениях Эйнштейна, описывающих динамику метрики криволинейного пространства и тем самым определяющих гравитационное поле. Экспериментальные подтверждения выводов ОТО дают основания считать правильными основные положения теории. Тем не менее в течение многих последних лет предпринимались попытки (в том числе и самим Эйнштейном) модификации ОТО. Однако эти попытки пока не дали оснований для корректировки теории и не привели к созданию единой теории взаимодействий, включающей наряду с гравитационным полем другие известные физические поля.

В настоящей статье в систематизированном виде представлены результаты, полученные на протяжении более 30 лет и связанные с конформным обобщением уравнений ОТО. Суть предложений по конформному обобщению сводится к введению в уравнения ОТО дополнительных членов, которые компенсировали бы невязку, возникающую в уравнениях ОТО при конформных преобразованиях.

Дополнительные члены в обобщенных уравнениях могли бы быть введены "руками". Однако они не могут быть получены в результате стандартной вариационной процедуры. В данной работе обобщенные уравнения получаются на основе вариационного принципа, в котором используются связи между вариациями тех величин, по которым производится варьирование. Сначала эта процедура выполняется для метризованного пространства аффинной связности, а затем – для пространства аффинной связности. Такой подход имеет ряд преимуществ методологического характера. Во-первых, вариационный принцип удается сформулировать во всех случаях таким образом, чтобы не использовалась процедура обращения к значениям пробных полевых историй в будущие моменты времени. Этот результат мы называем согласованностью вариационной процедуры с принципом причинности. Во-вторых, получаемые в результате динамические уравнения оказываются автоматически инвариантными относительно преобразований, имеющих смысл конформных. При этом пространства допускают трактовку в терминах пространства Вейля, а множитель Лагранжа, используемый в вариационной процедуре, совпадает с калибровочным вектором Вейля.

Основным недостатком излагаемого подхода является отсутствие физической интерпретации теории, основанной на представленных в статье уравнениях. В этом направлении предпринимаются настойчивые попытки, однако убедительных результатов пока не получено. Одно из направлений поиска связывает новые параметры теории с параметрами темной энергии во Вселенной. Другое направление связывает новые параметры с гравитационным и электромагнитным полями.

Авторы отдают себе отчет в том, что если не удастся понять физическое содержание предлагаемой теории – изложенные в статье соображения постигнет участь многих прошлых несостоявшихся обобщений ОТО.

1. Модифицированный вариационный принцип

Для получения уравнений, являющихся простейшей формой конформно-инвариантного обобщения уравнений Эйнштейна, необходимо использовать вариационный принцип в модифицированной форме. Особенностью этой формы является согласованность с принципом причинности. Остановимся на этом чуть подробнее.

В свое время М. Планк в [1] отмечал, что используемые в физике вариационные принципы в стандартных формулировках имеют "привкус телеологичности".

Под этим термином М. Планк имел в виду использование информации о поведении пробных полевых историй в будущие моменты времени при нахождении уравнений, на которых реализуется экстремальность действия I в предшествующие моменты времени. Такое использование информации происходит при обращении в нуль вариаций от динамических величин, соответствующих пробным полевым историям, на границах $S(\Omega)$ 4-мерного объема Ω, на котором вычисляется величина I.

Согласно принципу причинности, будущее не может влиять на прошедшее. Поэтому телеологичность вариационных процедур, строго говоря, противоречит принципу причинности.

Требование об обращении в нуль появляющегося в вариации δI интеграла по границе объема $S(\Omega)$ можно рассматривать как некоторое правило отбора тех вариаций, которые могут быть использованы при нахождении уравнений экстремалей. Другими словами, вариационный принцип сам по себе еще недостаточен для формулировки динамики; он должен дополняться указанием класса тех вариаций, которые могут быть использованы при нахождении уравнений экстремалей. В обычном подходе правило отбора сводится к обращению в нуль вариаций динамических величин, соответствующих пробным полевым историям, на границах 4-мерного объема $S(\Omega)$. Однако правило отбора вариаций может быть задано, во-первых, совершенно иным образом, во-вторых, таким образом, чтобы не возникал конфликт с принципом причинности.

Альтернативное правило отбора вариаций, которые могут быть использованы при нахождении уравнений экстремалей, может состоять в ограничении класса вариаций путем явного указания условий (связей), которым должны удовлетворять вариации в каждой точке 4-мерного объема Ω. Так сформулированное правило отбора будет носить кинематический характер; примером связей такого типа являются ограничения на класс симметрии тензорных динамических величин. Существенно, что связи кинематического характера не имеют "привкуса телеологичности". Если, например, связи имеют структуру, допускающую разделение динамических величин на независимые и зависимые, то необходимо будет вариации зависимых величин выразить через вариации независимых и использовать последние (и только их) для нахождения уравнений экстремалей. Несколько сложнее (не с принципиальной, а с технической точки зрения) обстоит дело с так называемыми неголономными связями, т. е. связями, которые не допускают разделения динамических величин на независимые и зависимые. Для таких ситуаций в математике разработан метод нахождения уравнений экстремалей с помощью так называемых неопределенных множителей Лагранжа. Подробное изложение метода имеется во многих источниках, укажем лишь на два из них:[2], [3].

Из сказанного следует, что для согласия с принципом причинности правило отбора вариаций должно задаваться в форме связи между вариациями динамических величин, действующей в каждой точке 4-мерного объема Ω. Однако, задав какую-то связь между вариациями, мы еще не избавляемся автоматически от телеологичности, т. е. от необходимости распоряжаться вариациями пробных полевых историй на границе $S(\Omega)$. Для исключения телеологичности связь между вариациями должна приводить к автоматическому исчезновению интеграла по границе $S(\Omega)$ в выражении для вариации действия. Это, по существу, и является требованием, достаточным для нахождения явного вида связей между вариациями при любой конструкции действия. Фактически это требование накладывает ограничение и на конструкцию плотности лагранжевой функции: в конструкцию не должны входить производные от динамических функций выше первого порядка. Если в плотности лагранжевой функции будут содержаться вторые производные (или производные более высокого порядка), то в связь между вариациями динамических величин войдут вариации от производных. А это после использования неопределенных множителей Лагранжа приведет к повторному обращению к значениям вариаций на границах. В результате вариационная процедура окажется не согласованной с принципом причинности.

Во всех вариантах конформно-инвариантного обобщения уравнений Эйнштейна использовался, как уже сказано выше, модифицированный вариационный принцип, согласованный с принципом причинности. Заметим, что в таком виде вариационный принцип обеспечивает экстремальность действия по отношению к пробным полевым историям при любом выборе 4-мерных конечных объемов интегрирования[1].

2. Первая попытка применения модифицированного вариационного принципа

Впервые модифицированная вариационная процедура была применена Ю. А. Романовым в 1968 г. в работе [4] для нахождения динамических уравнений для риманова пространства. В качестве динамической величины использовался метрический тензор $g_{\alpha\beta}$, а плотность лагранжевой функции имела стандартный в ОТО вид $\sqrt{-g}\ R$. Связь между вариациями выбиралась из условия обращения в нуль дивергентного члена в вариации действия $\delta\int\limits_{\Omega}\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right)d\Omega$. Связь имела вид

$$\frac{\partial\delta g^{\lambda\sigma}}{\partial x^{\sigma}}-g^{\lambda\sigma}g_{\mu\nu}\frac{\partial\delta g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}=0\,, \tag{1}$$

т. е. носила характер ограничения на вариации производных от метрики и была неинтегрируемой (неголономной). После введения в вариацию действия связи (1),

[1] Здесь мы расходимся с теми из формулировок вариационных принципов, в которых для получения уравнений экстремалей принципиальным считается использование бесконечного 4-мерного объема.

умноженной на неопределенный множитель Лагранжа $H_\alpha(x)$, возникало уравнение, которое может быть записано в виде

$$R_{\alpha\beta}-\tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=-2g_{\alpha\beta}H^{\nu}{}_{;\nu}+H_{\alpha;\beta}+H_{\beta;\alpha}\,. \qquad (2)$$

Полученные в [4] результаты примечательны в том отношении, что они указывали новый способ введения в динамику риманова пространства векторного поля $H_\alpha(x)$ таким образом, чтобы оставался в силе один из самых привлекательных принципов – принцип полной геометризации физических объектов. До этого дополнительные к метрике поля вводились путем простого расширения геометрии: либо метрика полагалась несимметричной, либо аналогичное предположение делалось в отношении связности, т. е. вводилось кручение, либо увеличивалась размерность пространства-времени и т. д. В работе [4] векторное поле $H_\alpha(x)$ появляется совершенно иным путем – как атрибут, необходимый для формулировки вариационного принципа для риманова пространства, совместимого с принципом причинности.

Следует заметить, что несмотря на использование связей между вариациями, предписываемых модифицированным вариационным принципом, т. е. таких, которые обращали в нуль дивергентный член в вариации действия, полного согласия с принципом причинности в работе [4] добиться не удалось. Дело в том, что введение в вариацию действия связи [4] с помощью вектора $H_\alpha(x)$ не избавляло от необходимости вновь обращаться к значениям вариаций метрики на границе. Этот недостаток подхода работы [4] был исправлен М. В. Горбатенко и А. В. Пушкиным в 1984 г. в работе [5].

3. Динамические уравнения для метризованного пространства аффинной связности

В работе [5] модифицированный вариационный принцип был применен не к риманову пространству, а к пространству аффинной связности, в котором метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ и связность $\Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\beta$ симметричны по своим нижним индексам и априори являются независимыми величинами. Последнее обстоятельство позволяло воспользоваться методом варьирования, известным под названием метода Палатини. Суть метода Палатини состоит в том, чтобы на стадии нахождения уравнений экстремалей считать независимыми вариации $\delta g_{\alpha\beta}$ и $\delta\Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\beta$, а связь между $g_{\alpha\beta}$ и $\Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\beta$ должна появляться в виде решения уравнений экстремалей. Плотность лагранжиана в [5] имела вид $\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\mathfrak{R}_{\mu\nu}\right)$, где $\mathfrak{R}_{\mu\nu}$ – тензор Риччи для пространства аффинной связности. Напомним, что если тензор Римана $\mathfrak{R}^\lambda{}_{\sigma\alpha\beta}$ определяется соотношением

$$\mathfrak{R}^\lambda{}_{\sigma\alpha\beta}\equiv\left(\Gamma_\beta{}^\lambda{}_\sigma\right)_{,\alpha}-\left(\Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\sigma\right)_{,\beta}+ \\ +\Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\varepsilon\Gamma_\beta{}^\varepsilon{}_\sigma-\Gamma_\beta{}^\lambda{}_\varepsilon\Gamma_\alpha{}^\varepsilon{}_\sigma, \qquad (3)$$

то тензор $\mathfrak{R}_{\mu\nu}$ записывается следующим образом:

$$\mathfrak{R}_{\alpha\beta}\equiv\mathfrak{R}^\sigma{}_{\alpha\sigma\beta}=\left(\Gamma_\beta{}^\varepsilon{}_\alpha\right)_{,\varepsilon}-\left(\Gamma_\varepsilon{}^\varepsilon{}_\alpha\right)_{,\beta}+ \\ +\Gamma_\rho{}^\rho{}_\varepsilon\Gamma_\beta{}^\varepsilon{}_\alpha-\Gamma_\beta{}^\rho{}_\varepsilon\Gamma_\rho{}^\varepsilon{}_\alpha. \qquad (4)$$

Неголономная связь между вариациями, с помощью которой отбираются вариации, согласованные с принципом причинности, в рассматриваемой схеме имеет вид

$$g^{\alpha\beta}\left(\delta\Gamma_\beta{}^\lambda{}_\alpha\right)-g^{\lambda\beta}\left(\delta\Gamma_\sigma{}^\sigma{}_\beta\right)=0. \qquad (5)$$

В результате получаются уравнения экстремалей двух типов. Варьирование по $\delta\Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\beta$ дает уравнения

$$-\frac{\partial\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\right)}{\sqrt{-g}\,\partial x^\lambda}+\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\delta^\mu_\lambda g^{\tau\nu}\sqrt{-g}\right)}{\sqrt{-g}\,\partial x^\tau}+\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\delta^\nu_\lambda g^{\tau\mu}\sqrt{-g}\right)}{\sqrt{-g}\,\partial x^\tau}+ \\ +H_\lambda g^{\mu\nu}-\frac{1}{2}H_\tau\delta^\mu_\lambda g^{\tau\nu}-\frac{1}{2}H_\tau\delta^\nu_\lambda g^{\tau\mu}-\Gamma_\lambda{}^\mu{}_\tau g^{\nu\tau}- \\ -\Gamma_\lambda{}^\nu{}_\tau g^{\mu\tau}+\Gamma_\tau{}^\tau{}_\lambda g^{\mu\nu}+\frac{1}{2}g^{\tau\rho}\left(\Gamma_\tau{}^\nu{}_\rho\delta^\mu_\lambda+\Gamma_\tau{}^\mu{}_\rho\delta^\nu_\lambda\right)=0. \qquad (6)$$

Здесь $g\equiv\det\left(g_{\mu\nu}\right)$. Решением уравнений (6) является

$$\Gamma_\alpha{}^\lambda{}_\beta=\left(\alpha{}^\lambda{}\beta\right)+H_\alpha\delta^\lambda_\beta+H_\beta\delta^\lambda_\alpha-g^{\lambda\sigma}H_\sigma g_{\alpha\beta}. \qquad (7)$$

Варьирование по $\delta g_{\alpha\beta}$ приводит с учетом выражения (7) к уравнениям

$$R_{\alpha\beta}-\tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=-2H_\alpha H_\beta-g_{\alpha\beta}H^2- \\ -2g_{\alpha\beta}H^\nu{}_{;\nu}+H_{\alpha;\beta}+H_{\beta;\alpha}. \qquad (8)$$

Несколько слов о форме записи уравнений, получаемых от варьирования по $\delta g_{\alpha\beta}$. Если ввести тензор

$$W_{\alpha\beta}=-2H_\alpha H_\beta-g_{\alpha\beta}H^2-2g_{\alpha\beta}H^\nu{}_{;\nu}+H_{\alpha;\beta}+H_{\beta;\alpha}\,, \qquad (9)$$

то уравнения (8) могут быть записаны в нескольких эквивалентных формах. Например,

$$R_{\alpha\beta}-\tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=W_{\alpha\beta};\ R_{\alpha\beta}=W_{\alpha\beta}-\tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left(g^{\mu\nu}W_{\mu\nu}\right). \qquad (10)$$

Исторически повелось так, что уравнения, являющиеся обобщением уравнений Эйнштейна, записывают обычно в виде равенства двух выражений. В левой части записывают тензор Эйнштейна

$$G_{\alpha\beta}\equiv R_{\alpha\beta}-\tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\,, \qquad (11)$$

а все остальные члены переносят в правую часть. Запись левой части уравнений в виде тензора Эйнштейна может быть оправдана в какой-то мере тем, что дивергенция от тензора $G_{\alpha\beta}$ в силу тождеств Бианки равна нулю – это удобно при вычислениях. Придерживаться такой традиции вовсе не обязательно. Однако мы не видим причин, почему бы не следовать ей (во всяком случае, до тех пор, пока следование традиции не ведет к навязыванию физической интерпретации поля вектора H_α). Отметим в этой связи, что уравнения (8) могут быть представлены еще в одной форме – в форме, в которой используются только геометрические характеристики исходного метризованного пространства аффинной связности. Такими формами являются

$$\mathfrak{R}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\left(g^{\mu\nu}\mathfrak{R}_{\mu\nu}\right) = 0\,, \tag{12}$$

$$\mathfrak{R}_{(\alpha\beta)} = 0\,. \tag{13}$$

Уравнения (8) отличаются от уравнений (2) наличием двух квадратичных по вектору H_α членов. Это, в свою очередь, ведет к одному важному следствию: уравнения (8) становятся инвариантными по отношению к так называемым конформным преобразованиям

$$g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta}\cdot e^{2\sigma},\ H_\alpha \to H_\alpha - \sigma_{;\alpha}\,. \tag{14}$$

Здесь $\sigma = \sigma(x)$ – произвольная скалярная функция от координат. Этот факт может быть проверен в том числе и прямым вычислением.

Достижение конформной инвариантности динамических уравнений не было самоцелью работы [5]. Конформная инвариантность была получена как следствие применения вариационного принципа в форме, согласованной с принципом причинности. Эта особенность полученных результатов детально проанализирована в работе [6].

В заключение этого раздела поясним, что мы имеем в виду, когда говорим о том, что уравнения (8) являются простейшим (минимальным) вариантом конформно-инвариантного обобщения уравнений Эйнштейна. Для этого в табл. 1, заимствованной из [5], сравним операции, которые необходимо выполнить для обеспечения инвариантности уравнения Дирака относительно калибровочных преобразований и инвариантности уравнений Эйнштейна относительно конформных преобразований.

Вектор H_α, как следует из табл. 1, является по существу полем, компенсирующим добавки, возникающие в связности от метрики при конформных преобразованиях последней. Способ введения компенсирующих полей путем "удлинения производных" в теории полей Янга – Миллса считается "минимальным". Поэтому и об уравнениях (8) мы говорим как о простейшем или минимальном варианте конформно-инвариантного обобщения уравнения Эйнштейна.

Таблица 1

Калибровочная инвариантность в спинорной теории Дирака и конформная инвариантность в гравитационной теории

Последовательность операций по установлению вида инвариантных уравнений	Спинорная теория Дирака	Гравитационная теория
Исходное уравнение (не инвариантное)	$\gamma^\nu \dfrac{\partial\psi}{\partial x^\nu} + m\psi = 0$	$R_{\alpha\beta} - \dfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 0$
Калибровочное и конформное преобразования	$\psi \to \psi e^{i\sigma(x)}$	$g_{\alpha\beta}(x) \to g_{\alpha\beta}(x) e^{2\sigma(x)}$
Добавка в связность от преобразований	$\dfrac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}$	$\dfrac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}\delta^\lambda_\beta + \dfrac{\partial\sigma}{\partial x^\beta}\delta^\lambda_\alpha + g_{\alpha\beta} g^{\lambda\sigma}\dfrac{\partial\sigma}{\partial x^\sigma}$
Компенсирующее поле, которое необходимо добавить в связность, и закон его преобразования	$i\phi_\alpha$ $\phi_\alpha \to \phi_\alpha - \dfrac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}$	H_α $H_\alpha \to H_\alpha - \dfrac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}$
Калибровочно и конформно-инвариантная связность	$ie\phi_\alpha$	$\left(\begin{matrix}\lambda \\ \alpha\ \beta\end{matrix}\right) + H_\alpha\delta^\lambda_\beta + H_\beta\delta^\lambda_\alpha - g_{\alpha\beta}H^\lambda$
Исходные уравнения в инвариантном виде	$\gamma^\nu \dfrac{\partial\psi}{\partial x^\nu} + ie\phi_\gamma\psi + m\psi = 0$	$R_{\alpha\beta} - \dfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -g_{\alpha\beta}H^2 - 2H_\alpha H_\beta -$ $-2g_{\alpha\beta}H^\sigma_{;\sigma} + H_{\alpha;\beta} + H_{\beta;\alpha}$

4. Динамические уравнения для пространства аффинной связности

В 1996 г. Ю. А. Романов в работе [7] применил модифицированный вариационный принцип еще к более общему типу пространств по сравнению с тем, что использовался в работе[5], – к пространству аффинной связности, в котором априори отсутствует метрика. Связность предполагалась симметричной по нижним индексам. Лагранжева плотность была взята в виде, ранее рассматривавшемся Э. Шредингером в работе [8]. Для пространства аффинной связности оказывается возможным построить безразмерное действие единственным образом на основе лагранжевой плотности вида $\sqrt{-\det\left(\Re_{\mu\nu}\right)}$, где $\Re_{\alpha\beta}$ – тензор Риччи. И в этом состоит определенная элегантность подхода.

Неголономная связь между вариациями имела в работе [7] следующий вид:

$$\Re^{\mu\nu}\left(\delta\Gamma_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu}\right)-\Re^{\lambda\kappa}\left(\delta\Gamma_{\sigma}{}^{\sigma}{}_{\kappa}\right)=0. \qquad (15)$$

Здесь тензор $\Re^{\alpha\beta}$ является тензором, обратным тензору $\Re_{\alpha\beta}$.

Варьирование по $\left(\delta\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}\right)$ с учетом связей (15) дает следующее уравнение:

$$-\frac{\partial\left(\Re^{\mu\nu}\sqrt{-\det\left(\Re_{..}\right)}\right)}{\sqrt{-\det\left(\Re_{..}\right)}\,\partial x^{\lambda}}+\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\delta_{\lambda}^{\mu}\Re^{\tau\nu}\sqrt{-\det\left(\Re_{..}\right)}\right)}{\sqrt{-\det\left(\Re_{..}\right)}\,\partial x^{\tau}}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial\left(\delta_{\lambda}^{\nu}\Re^{\tau\mu}\sqrt{-\det\left(\Re_{..}\right)}\right)}{\sqrt{-\det\left(\Re_{..}\right)}\,\partial x^{\tau}}+H_{\lambda}\Re^{\mu\nu}-\frac{1}{2}H_{\tau}\delta_{\lambda}^{\mu}\Re^{\tau\nu}-$$
$$-\frac{1}{2}H_{\tau}\delta_{\lambda}^{\nu}\Re^{\tau\mu}-\Gamma_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\tau}\Re^{\nu\tau}-\Gamma_{\lambda}{}^{\nu}{}_{\tau}\Re^{\mu\tau}+$$
$$+\Gamma_{\tau}{}^{\tau}{}_{\lambda}\Re^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\Re^{\tau\rho}\left(\Gamma_{\tau}{}^{\nu}{}_{\rho}\delta_{\lambda}^{\mu}+\Gamma_{\tau}{}^{\mu}{}_{\rho}\delta_{\lambda}^{\nu}\right)=0. \qquad (16)$$

Способ решения уравнений типа (16) предложен Э. Шредингером в работе [8]; способ состоит в том, чтобы рассматривать тензор

$$g^{\alpha\beta}\equiv-\frac{1}{\lambda}\Re^{(\alpha\beta)} \qquad (17)$$

как метрический тензор в исходном пространстве аффинной связности. Здесь λ – некоторая произвольная скалярная функция. Из способа ее введения (17) ясно, что должно быть $\lambda\neq 0$. Вводимая согласно (17) метрика симметрична по своим индексам.

Подстановка (17) в (16) приводит к выражению для связности, эквивалентному (с точностью до градиента от скаляра) выражению (7). После этого соотношения (17) принимают следующий вид:

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=-2H_{\alpha}H_{\beta}-g_{\alpha\beta}H^{2}-$$
$$-2g_{\alpha\beta}H^{\nu}{}_{;\nu}+H_{\alpha;\beta}+H_{\beta;\alpha}+\lambda g_{\alpha\beta}. \qquad (18)$$

Уравнения (18) также обладают конформной инвариантностью; конформные преобразования (14) дополняются правилом преобразования для величины λ и принимают следующий вид:

$$g_{\alpha\beta}\to g_{\alpha\beta}e^{2\sigma},\; H_{\alpha}\to H_{\alpha}-\sigma_{;\alpha},\; \lambda\to\lambda e^{-2\sigma}. \qquad (19)$$

Далее, когда будет употребляться комбинация слов "уравнения конформно-инвариантной геометродинамики", то будут иметься в виду уравнения (18).

В табл. 2 кратко суммированы этапы эволюции уравнений конформно-инвариантной геометродинамики.

При нахождении конкретных решений уравнений конформно-инвариантной геометродинамики необходимо фиксировать систему координат и использовать некоторое условие, которое ограничило бы инвариантность (19) и не противоречило бы сделанному выбору системы координат. Одним из возможных условий является условие постоянства величины λ. Из уравнений (18) следует, что при этом вектор H_{α} должен автоматически удовлетворять условию Лоренца, т. е.

$$\lambda=\mathrm{const}\to H^{\sigma}{}_{;\sigma}=0. \qquad (20)$$

Следует иметь в виду, однако, что условия (20) хотя и являются удобными, но не являются единственно возможными, с помощью которых может быть устранена свобода, связанная с инвариантностью уравнений относительно преобразований (19).

Таблица 2

Эволюция уравнений конформно-инвариантной геометродинамики

Кто, когда	Исходное пространство. Динамические величины	Лагранжева плотность	Связи	Выражение для $W_{\alpha\beta}$ в уравнении $R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=W_{\alpha\beta}$	Наличие конформной инвариант-ности
Романов, 1968	Риманово пространство $\delta g_{\alpha\beta}$	$\sqrt{-g}\ R$	$\frac{\partial\delta g^{\lambda\sigma}}{\partial x^{\sigma}}-g^{\lambda\sigma}g_{\mu\nu}\frac{\partial\delta g^{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}=0$	$-2g_{\alpha\beta}H^{\nu}{}_{;\nu}+H_{\alpha;\beta}+H_{\beta;\alpha}$	–
Горбатенко, Пушкин, 1984	Метризованное пространст-во аффинной связности $\delta g_{\alpha\beta}$, $\delta\Gamma_{\alpha}{}^{\kappa}{}_{\beta}$	$\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\Re_{\mu\nu}\right)$	$g^{\alpha\beta}\left(\delta\Gamma_{\beta}{}^{\lambda}{}_{\alpha}\right)-g^{\lambda\beta}\left(\delta\Gamma_{\sigma}{}^{\sigma}{}_{\beta}\right)=0$	$-2H_{\alpha}H_{\beta}-g_{\alpha\beta}H^{2}-2g_{\alpha\beta}H^{\nu}{}_{;\nu}+H_{\alpha;\beta}+H_{\beta;\alpha}$	+
Романов, 1996	Пространство аффинной связности $\delta\Gamma_{\alpha}{}^{\kappa}{}_{\beta}$	$\sqrt{-\det\left(\Re_{\mu\nu}\right)}$	$\Re^{\alpha\beta}\left(\delta\Gamma_{\beta}{}^{\lambda}{}_{\alpha}\right)-\Re^{\lambda\beta}\left(\delta\Gamma_{\sigma}{}^{\sigma}{}_{\beta}\right)=0$	$-2H_{\alpha}H_{\beta}-g_{\alpha\beta}H^{2}-2g_{\alpha\beta}H^{\nu}{}_{;\nu}+$ $+H_{\alpha;\beta}+H_{\beta;\alpha}+\lambda g_{\alpha\beta}$	+

5. Возможная интерпретация в терминах пространства Вейля

Исходным пространством, для которого получены уравнения (8), является метризованное пространство аффинной связности. Оказывается, что после того, как установлена инвариантность этих уравнений по отношению к конформным преобразованиям (14), возникает возможность интерпретировать эти уравнения как уравнения, описывающие динамику пространства Вейля.

Теория пространств Вейля изложена во многих работах. Для примера укажем на две монографии: А. Эддингтона [9] и А. П. Нордена [10].

Основное отличие пространств Вейля от римановых пространств состоит в том, что в пространствах Вейля геометрические объекты наделяются дополнительной характеристикой – вейлевским весом *n*. Величина *n* представляет собой целое число, с помощью которого определяется изменение геометрического объекта при параллельном переносе по замкнутому контуру $dS^{\mu\nu}$. Так, для метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ величина $n=2$. Если геометрическим объектом является вектор Y^{α} с вейлевским весом *n*, то изменение вектора δY^{α} при параллельном переносе его по замкнутому контуру $dS^{\mu\nu}$ в римановом пространстве имеет вид

$$\delta Y_R^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} Y^{\beta} dS^{\mu\nu}, \qquad (21)$$

а в пространстве Вейля записывается следующим образом:

$$\delta Y_W^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} Y^{\beta} dS^{\mu\nu} + n Y^{\alpha} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}. \qquad (22)$$

Здесь $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ – тензор кривизны (тензор Римана); $F_{\alpha\beta}$ – антисимметричный тензор, построенный из вектора B_{α} по правилу

$$F_{\alpha\beta} \equiv B_{\beta,\alpha} - B_{\alpha,\beta}. \qquad (23)$$

Вектор B_{α} представляет собой дополнительную геометрическую характеристику пространства Вейля, называемую калибровочным вектором. Согласно [10], вектор B_{α} входит в выражение для связности в пространстве Вейля $\tilde{\Gamma}_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\beta}$ следующим образом:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{pmatrix} + \delta_{\alpha}^{\lambda} B_{\beta} + \delta_{\beta}^{\lambda} B_{\alpha} - g^{\lambda\sigma} B_{\sigma} g_{\alpha\beta}. \qquad (24)$$

В пространстве Вейля могут быть выполнены так называемые калибровочные преобразования, при которых каждая величина с вейлевским весом *n* умножается на величину $\exp\left(n\varphi(x)\right)$. При этом вектор B_{α} переходит в $B'_{\alpha} = B_{\alpha} - \varphi_{,\alpha}$, а связность не изменяется.

Сопоставление свойств пространства Вейля при калибровочных преобразованиях и свойств метризованного пространства аффинной связности при конформных преобразованиях (14) показывает их совпадение, если произвести следующее отождествление:

$$B_{\alpha} \leftrightarrow H_{\alpha};\ \tilde{\Gamma}_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\beta} \leftrightarrow \Gamma_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{\beta};\ \sigma(x) \leftrightarrow \varphi(x);\ \tilde{g}_{\alpha\beta} \leftrightarrow g_{\alpha\beta}. \qquad (25)$$

После такого отождествления мы можем интерпретировать динамические уравнения (8) как уравнения, описывающие динамику соответствующего пространства Вейля. В обоих случаях динамические уравнения могут быть записаны в виде (12), (13) с тензорами Риччи для метризованного пространства аффинной связности и пространства Вейля соответственно.

Что касается пространства аффинной связности, использованного в работе [7], то соответствие (25) для него также может быть установлено, но только после того, как найдены динамические уравнения. До этого в исходном пространстве не существует понятия конформных преобразований. С другой стороны, после получения уравнений конформно-инвариантной геометродинамики пространства аффинной связности становятся метризованными. Поэтому соответствие (25) может быть расширено и на пространства, описываемые уравнениями (18).

6. Уравнения Баха

Сами по себе уравнения Эйнштейна в общем случае не инвариантны относительно калибровочных (конформных) преобразований. Однако инвариантности можно добиться, если в действии использовать лагранжианы, квадратичные по тензору кривизны, т. е. лагранжианы, содержащие члены типа $\left(R_{\alpha\beta}R_{\mu\nu}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\right)$.

Начало конформно-инвариантным обобщениям уравнений Эйнштейна на этом пути положил Г. Вейль в серии своих работ, одной из которых является работа [11]. В последующем эти варианты достаточно интенсивно исследовались (историю проблемы см. в [12]). Согласно [13], наиболее удачной с теоретической точки зрения версией такого типа обобщения являются так называемые уравнения Баха

$$B_{\alpha\beta} \equiv B_{\alpha\beta}^{(1)} + B_{\alpha\beta}^{(2)} = 0. \qquad (26)$$

Здесь

$$B_{\alpha\beta}^{(1)} \equiv -\Box R_{\alpha\beta} + R_{\alpha}{}^{\nu}{}_{;\beta;\nu} + R_{\beta}{}^{\nu}{}_{;\alpha;\nu} - \frac{2}{3} R_{;\alpha;\beta} + \frac{1}{6} g_{\alpha\beta} \Box R; \qquad (27)$$

$$B_{\alpha\beta}^{(2)} \equiv \frac{2}{3} R R_{\alpha\beta} - 2 R_{\alpha\nu} R^{\nu}{}_{\beta} - \frac{1}{6} R^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}. \qquad (28)$$

Уравнения (26) являются конформно-инвариантным обобщением уравнений Эйнштейна с нулевым λ-членом. Поэтому сравнивать уравнения (26) будем не с уравнениями (18), а с уравнениями (8).

Преимущество уравнений (8) перед уравнениями Баха состоит, по меньшей мере, в том, что первые являются простейшим из всех возможных вариантов конформно-инвариантного обобщения уравнений Эйнштейна; это следует из табл. 1. Кроме того, уравнения

(8) переходят, в отличие от уравнений Баха, непосредственно в уравнения Эйнштейна при $H_\alpha \to 0$.

В [14] установлено, что все решения уравнений (8) содержатся в множестве решений уравнений (26). Более того, нахождение решений уравнений (8) можно рассматривать как способ решения и уравнений (26).

Эти факты представляются достаточно нетривиальными, если учесть, что уравнения (8), (26) получаются совершенно различными путями:

– уравнения (26) являются уравнениями четвертого порядка и получаются в результате стандартной вариационной процедуры при использовании в лагранжевой плотности квадратичных по компонентам тензора Римана членов; эти уравнения вообще не содержат вектора H_α;

– уравнения (8) получаются в результате модифицированной вариационной процедуры при использовании в лагранжевой плотности линейного по компонентам тензора Римана члена; вектор H_α появляется как множитель Лагранжа.

Заметим, что для уравнений (26) пока не доказана корректность постановки задачи Коши (см. [14]), поэтому они могут в принципе допускать решения, не удовлетворяющие уравнениям (8). Ясно, что при возникновении такой ситуации будет потеряна предсказательность теории, основанной на уравнениях (26).

7. Уравнения получены. Что дальше?

Начнем с перечисления более или менее очевидных особенностей уравнений конформно-инвариантной геометродинамики, т. е. уравнений (18).

Прежде всего заметим, что для получения указанных уравнений применен оригинальный метод варьирования – варьирования с использованием неголономных связей между вариациями связностей, вид которых однозначно диктуется требованием "необращения к границам". Это требование устраняет тот "привкус телеологичности", который имеется в обычных вариационных процедурах, поскольку исчезает необходимость при нахождении динамики полей в данный момент времени распоряжаться пробными полевыми историями в будущие моменты времени.

Далее, уравнения конформно-инвариантной геометродинамики представляют собой, по существу, оригинальный вариант обобщения уравнений Эйнштейна на пути полной геометризации физических объектов. Вариант, который не рассматривался классиками и который не сводится ни к одной из ранее предложенных схем единой теории поля. Векторное поле $H_\alpha(x)$ и скалярное поле $\lambda(x)$ введены в схему не за счет наделения геометрии исходного пространства новыми атрибутами на уровне кинематики, а совершенно иным путем – как атрибуты, необходимые для формулировки вариационного динамического принципа для исходного пространства в форме, совместимой с принципом причинности. Без введения новых геометрических объектов оказывается невозможным сформулировать динамику исходного пространства. Другими словами, удовлетворить требование единых теорий поля о полной геометризации физических объектов и не вступить при этом в противоречие с принципом причинности можно только ценой введения полей $H_\alpha(x)$, $\lambda(x)$ при формулировке динамики пространства.

Прямым следствием использованной процедуры получения уравнений (18) явилось, во-первых, свойство конформной инвариантности и, во-вторых, возможность трактовки этих уравнений как уравнений, описывающих динамику хорошо известных пространств Вейля.

Выше перечислялись более или менее очевидные особенности уравнений и решений конформно-инвариантной геометродинамики. По мере исследований уравнений конформно-инвариантной геометродинамики были установлены и другие, менее очевидные особенности. К числу последних относится, например, тот факт, что для уравнений (18) корректно ставится задача Коши без всяких связей на данные Коши на начальной пространственно подобной гиперповерхности. Этот факт, установленный М. В. Горбатенко и Ю. А. Романовым в работе [15], достаточно примечателен, поскольку он применим только в отношении уравнений (18), но не уравнений (8). В последнем случае на начальной гиперповерхности данные Коши не могут быть свободными, они должны удовлетворять определенному соотношению, носящему характер связи и вытекающему из условия $\lambda = 0$.

Изложение "неочевидных" результатов и их анализ выходят за рамки данной работы. Отметим лишь, что исследования этих вопросов продолжаются, продолжается также поиск вариантов физических интерпретаций уравнений конформно-инвариантной геометродинамики и их решений.

Авторы благодарят Г. Г. Кочемасова, А. К. Хлебникова, Б. П. Косякова и Г. Е. Клинишова за дискуссии при подготовке этой работы, а также участников научного семинара под руководством В. П. Незнамова и Б. А. Надыкто за обсуждения.

Список литературы

1. Plank M. Das Prinzip der kleinsten Wirkung Die Kultur der Gegenwart, 1, Physik (1915). (Цитируется по переводу "Принцип наименьшего действия" в сб. "Вариационные принципы механики". М.: ГИФМЛ, 1959. С. 580–588.

2. Лич Дж. У. Классическая механика. М.: ИЛ, 1961.

3. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967.

4. Романов Ю. А. Об одной возможности обобщения уравнений гравитационного поля // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181, № 1. С. 53–55.

5. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. Динамика пространства линейной аффинной связности и конформно-инвариантное расширение уравнений Эйнштейна // Во-

просы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1984. Вып. 2/2. С. 40–46.

6. Gorbatenko M. V., Pushkin A. V. Conformally Invariant Generalization of Einstein Equation and the Causality Principle // General Relativity and Gravitation. 2002. Vol. 34, No. 2. P. 175–188; 2002. Vol. 34, No. 2. P. 1131–1133.

7. Романов Ю. А. Динамика пространства аффинной связности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 3, С. 55–57.

8. Schrödinger E. Space-Time Structure. Cambridge, England, 1963.

9. Eddington A. S. Space, Time, and Gravitation: An Outline of the General Relativity Theory. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1987.

10. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

11. Вейль Г. Гравитация и электричество. Sitzungsber. D. Berl. Akad., 1918. S. 465.

12. Schimming R., Schmidt H.-J. On the history of forth order metric theories of gravitation. NTM-Schriftenr. Geschichte der Naturwiss., Technik, Medizin. 1990. Vol. 27. P. 41–48.

13. Dzhunushaliev V., Schmidt H.-J. New vacuum solutions of conformal Weyl gravity // J. Math. Phys. 2000. Vol. 41. P. 3007–3015.

14. Gorbatenko M. V., Pushkin A.V., Schmidt H.-J. On a Relation Between the Bach Equation and the Equation of Geometrodynamics // General Relativity and Gravitation. 2002. Vol. 34, No.1. P. 9–22.

15. Горбатенко М. В., Романов Ю. А. Задача Коши для уравнений, описывающих динамику пространства аффинной связности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1997. Вып. 2. С. 34–37.

Статья поступила в редакцию 11.04.2005.