УДК 533.9

ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ

И. Д. Дубинова
РФЯЦ-ВНИИЭФ

Приведено полное аналитическое решение методом псевдопотенциала задачи о структуре нелинейной ионно-звуковой волны в плазме с учетом инерции электронов. Получено, что уединенная волна может иметь скорость от 1 до 1,58 скоростей линейного ионного звука.

Ионно-звуковые волны в плазме относятся к разряду продольных электростатических волн. История развития их теории длится вот уже несколько десятилетий. В итоге были получены дисперсионные зависимости волн в линейном приближении, изучены решения в виде уединенных волн для эволюционных уравнений типа Кортевега де Вриза в слабо-нелинейном приближении и исследована динамика периодических волн и уединенных волн при учете сильной нелинейности методом псевдопотенциала. В частности, Р. З. Сагдеевым, впервые использовавшим метод псевдопотенциала для простейшей модели ионно-звуковых волн с безынерционными распределенными по Больцману электронами, было численно получено, что скорость уединенной волны v может принимать значения только из диапазона от 1 до 1,58 скорости линейного ионного звука [1–3]. В нашей работе [4] верхний предел 1,58 был выведен в виде точной явной формулы, в которой была использована W-функция Ламберта [5–7].

После работ [1–3] было опубликовано большое количество статей, в которых методом псевдопотенциала развивалась теория сильно-нелинейных ионно-звуковых волн путем учета различных физических факторов: влияния ионной температуры [8–10], наличия двух [11, 12] и более сортов ионов [13], в том числе и отрицательных ионов [14–16], наличия двух групп электронов различных температур [17,18]. Обзор техники применения метода псевдопотенциала Р. З. Сагдеева для нелинейных волн в плазме представлен в [19].

В последнее время появилась серия работ, в которых изучалось влияние различных аспектов движения электронной и ионной компонент на особенности нелинейных ионно-звуковых волн. Так, в работе [20] продемонстрирован газодинамический подход к динамике ионной компоненты при помощи ее описания уравнением типа Бернулли, а в работах [21–23] делалась попытка изучить влияние инерции электронов.

Данная работа продолжает серию работ [21–23] по развитию нелинейной теории ионно-звуковых волн в плазме с учетом инерции электронов. Здесь нам удалось провести решение задачи аналитически до конца при помощи упомянутой выше W-функции Ламберта.

Начальный этап нашего решения совпадает с [23]. А затем, где авторы [23] делают разложение по малому параметру $1/\mu$ и пренебрегают членами $O\left(1/\mu^2\right)$, где $\mu = m_i/m_e$ – отношение ионной и электронной масс, мы пойдем своим точным аналитическим путем. Будем исходить из уравнений для динамики электронной компоненты бесстолкновительной плазмы

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial\left(n_e u_e\right)}{\partial x} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e\frac{\partial u_e}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial x}\right) \tag{2}$$

и ионной компоненты

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial\left(n_i u_i\right)}{\partial x} = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i\frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{4}$$

Система уравнений дополняется уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = n_e - n_i. \tag{5}$$

Уравнения (1)–(5) записаны для безразмерных величин, нормированных стандартным образом: концентрации электронов и ионов n_e и n_i – на невозмущенные концентрации n_{e0} и n_{i0}, скорости электронов и ионов u_e и u_i – на скорость линейного ионного звука $\sqrt{kT_e/m_i}$, электростатический потенциал φ – на величину kT_e/e, длина x – на дебаевскую длину $\lambda_D = \sqrt{kT_e/4\pi n_{e,i0}e^2}$, а время t – на ω_i^{-1}, где обозначено $\omega_i = \sqrt{4\pi n_{e,i0} e^2 / m_i}$ – ионная плазменная частота, k – постоянная Больцмана и T_e – электронная температура.

Будем искать решение в виде бегущей со скоростью v стационарной волны, для чего введем новую автомодельную переменную

$$\xi = x - vt, \quad \frac{\partial}{dt} = -v\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}. \tag{6}$$

Тогда система уравнений в частных производных (1)–(5) сведется к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

– электронная группа уравнений:

$$-v\frac{dn_e}{d\xi} + \frac{d(n_e u_e)}{d\xi} = 0; \tag{7}$$

$$-v\frac{du_e}{d\xi} + u_e\frac{du_e}{d\xi} = \mu\left(\frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{1}{n_e}\frac{dn_e}{d\xi}\right); \tag{8}$$

– ионная группа уравнений:

$$-v\frac{dn_i}{d\xi} + \frac{d(n_i u_i)}{d\xi} = 0; \tag{9}$$

$$-v\frac{du_i}{d\xi} + u_i\frac{du_i}{d\xi} = -\frac{d\varphi}{d\xi}; \tag{10}$$

– уравнение Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = n_e - n_i. \tag{11}$$

Решение обоих уравнений непрерывности (7) и (9) с учетом $\lim\limits_{u_{e,i}\to 0} n_{e,i} = 1$ можно легко записать в виде

$$n_{e,i} = \frac{v}{v - u_{e,i}}, \tag{12}$$

а решения уравнений движения – в виде

$$\varphi = \ln n_e - \frac{1}{2\mu}\left(2vu_e - u_e^2\right); \tag{13}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(2vu_i - u_i^2\right). \tag{14}$$

Далее в [23] решение анализировалось в указанном выше приближении, а мы продолжим вывод аналитически точного решения.

Из решения уравнений непрерывности (12) следует, что выражения в скобках в соотношениях (13) и (14) можно представить через концентрации

$$2vu_{e,i} - u_{e,i}^2 = v^2\left(1 - \frac{1}{n_{e,i}^2}\right). \tag{15}$$

С учетом этого решения уравнений движения (13) и (14) будут иметь вид

$$\varphi = \ln n_e - \frac{v^2}{2\mu}\left(1 - \frac{1}{n_e^2}\right), \tag{16}$$

$$\varphi = \frac{v^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n_i^2}\right). \tag{17}$$

Разрешим последние соотношения относительно концентраций n_e и n_i. Формально решения обоих уравнений имеют по два действительных корня

$$n_e = \exp\left\{\varphi + \frac{v^2}{2\mu} + \frac{1}{2}W_{0,-1}\left[-\frac{v^2}{\mu}\exp\left(-2\varphi - \frac{v^2}{\mu}\right)\right]\right\}; \tag{18}$$

$$n_i = \pm\frac{v}{\sqrt{v^2 - 2\varphi}}. \tag{19}$$

В выражении (18) обозначено: $W_0(x)$ – основная (верхняя) ветвь и $W_{-1}(0)$ – отрицательная (нижняя) ветвь W-функции Ламберта, разделяемые точкой сопряжения с координатами $(-1/e, -1)$.

Так как концентрация n_i всегда должна быть положительной, то отрицательное решение в соотношении (19) можно отбросить. Оставшееся положительное решение проходит в нуле через единицу. Это означает, что в точках нулевого потенциала возмущения ионов нет.

Для анализа корней электронного уравнения на рис. 1,а построена зависимость $n_e(\varphi)$, имеющая в соответствии с (18) две ветви. Из них только верхняя ветвь проходит в нуле через единицу, что позволяет ей совместно с положительным корнем соотношения (19) удовлетворить правую часть уравнения Пуассона условию квазинейтральности плазмы при $\varphi = 0$. На рис. 1,б показана также зависимость $n_i(\varphi)$.

Структура полученных решений такова, что электронная концентрация $n_e(\varphi)$ определена только при $\varphi > \varphi_{\min}$, а ионная – $n_i(\varphi)$ – только при $\varphi < \varphi_{\max}$, причем при $\varphi = \varphi_{\max}$ концентрация $n_i(\varphi)$ расходится. Таким образом, плотность пространственного заряда (разность $n_e(\varphi) - n_i(\varphi)$) определена на полуотрезке $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max})$, концы которого легко определить: $\varphi_{\min}$ – как точку сопряжения ветвей W-функции Ламберта, а $\varphi_{\max}$ – как точку обращения знаменателя в выражении (19) в нуль

$$\varphi_{\min} = \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{\mu} + \ln\frac{v^2}{\mu} + 1\right); \tag{20}$$

$$\varphi_{\max} = \frac{v^2}{2}. \tag{21}$$

График разности $n_e(\varphi) - n_i(\varphi)$ показан на рис. 1,в. Обратим внимание на то, что этот график немонотонный и имеет две точки смены знака (две точки квазинейтральности).

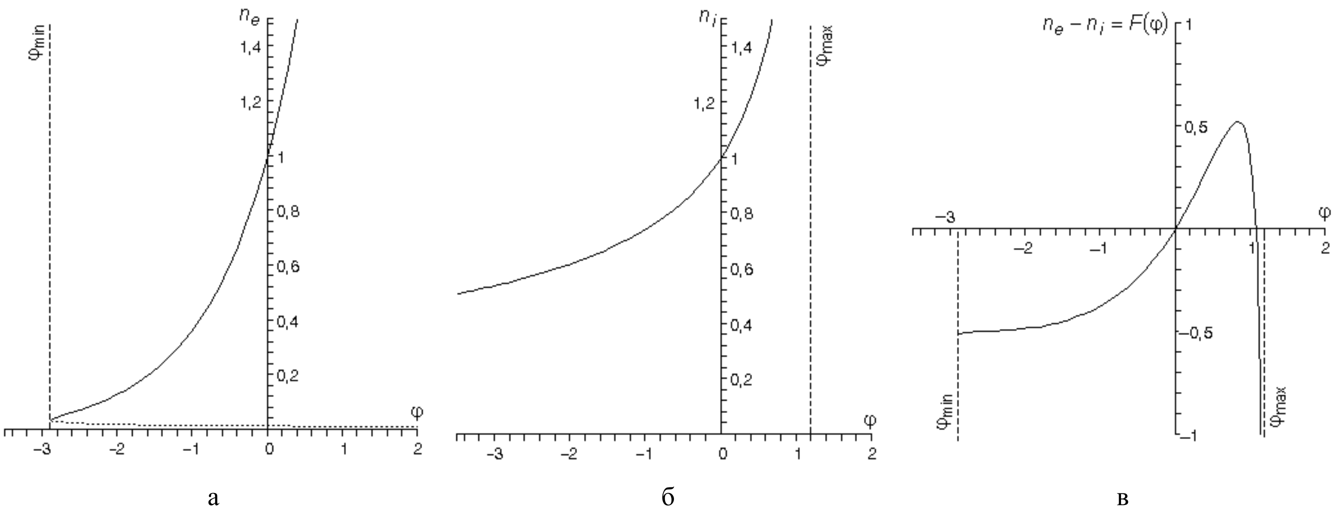


Рис. 1. Зависимости концентраций от электростатического потенциала, построенные при ν = 1,56 и μ = 2000: а – электронная концентрация $n_e(\varphi)$ (сплошная кривая – корень (18), выраженный через верхнюю ветвь $W_0(x)$ функции Ламберта, прерывистая кривая – корень (18), выраженный через нижнюю ветвь $W_{-1}(x)$ функции Ламберта); б – ионная концентрация $n_i(\varphi)$; в – разность концентраций $n_e(\varphi)-n_i(\varphi)$ $\left(\text{псевдосила } F(\varphi)\right)$

Далее, подставляя выражения (18) и (19) в уравнение Пуассона (11), получим нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно $\varphi(\xi)$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}=F(\varphi)=\exp\left\{\varphi+\frac{\nu^2}{2\mu}+\frac{1}{2}W_0\left[-\frac{\nu^2}{\mu}\exp\left(-2\varphi-\frac{\nu^2}{\mu}\right)\right]\right\}-\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2-2\varphi}}. \tag{22}$$

Решение этого уравнения можно записать в квадратурах

$$\int\limits_{\phi=\varphi}\frac{1}{\sqrt{2\exp\dfrac{\nu^2}{2\mu}\int\limits_{\psi=\phi}\exp\left[\psi+\dfrac{1}{2}W_0\left(-\dfrac{\nu^2}{\mu}\exp\dfrac{-\nu^2-2\mu\psi}{\mu}\right)\right]d\psi+2\nu\sqrt{\nu^2-2\phi}+c_1}}\,d\phi=\xi+c_2, \tag{23}$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования.

Внешний вид решения (23) достаточно громоздок и не нагляден, поэтому для анализа свойств решения уравнения (22) воспользуемся методом псевдопотенциала. Согласно этому методу будем рассматривать (22) как уравнение движения псевдочастицы в потенциальном поле $\Phi(\varphi)$, при этом функция $F(\varphi)=-d\Phi/d\varphi$ играет роль силы, потенциал φ – роль координаты псевдочастицы, а координата ξ – роль времени.

Уравнение Пуассона (22) после однократного интегрирования принимает вид уравнения сохранения энергии псевдочастицы

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2+2\Phi(\varphi)=c_1, \tag{24}$$

где

$$\Phi(\varphi)=-\nu\sqrt{\nu^2-2\varphi}-\int\limits_{\phi=\varphi}\exp\left[\phi+\frac{\nu^2}{2\mu}+\frac{1}{2}W_0\left(-\frac{\nu^2}{\mu}\exp\frac{-\nu^2-2\mu\phi}{\mu}\right)\right]d\phi \tag{25}$$

и постоянную c_1 можно выбрать так, чтобы $\Phi(\varphi_{\min})=0$.

На рис. 2 показаны графики $\Phi(\varphi)$ при различных значениях скорости v. Видно, что псевдопотенциал имеет две точки равновесия псевдочастицы: минимум – при $\varphi > 0$ и максимум – при $\varphi = 0$, соответствующие нулям псевдосилы $F(\varphi)$. Это означает, что возможно периодическое движение псевдочастицы-осциллятора в потенциальной яме псевдопотенциала, которое соответствует периодической ионно-звуковой волне, и движение по сепаратрисе через точку максимума, которое соответствует уединенной ионно-звуковой волне, если правый конец псевдопотенциала находится выше локального максимума $\left(\Phi(0) < \Phi(\varphi_{\max})\right)$ (рис. 2,а).

В противном случае, когда правый конец ниже максимума $\left(\Phi(0) > \Phi(\varphi_{\max})\right)$ (рис. 2,в), уединенная волна опрокидывается. И то значение v, при котором высота правого конца в точности равна высоте максимума $\left(\Phi(0) = \Phi(\varphi_{\max})\right)$ (рис. 2,б), является предельно возможной скоростью уединенной волны. График рис. 2,б построен при v = 1,58 – это и есть приближенное значение верхнего предела, совпадающее, как оказалось, со значением, полученным в модели безынерционных электронов [1–4].

Перейдем к рассмотрению структуры волны. На рис. 3 построены вычисленные по формуле (23) следующие профили в волне: электростатического потенциала $\varphi(\xi)$, электронной и ионной концентраций $n_e(\xi)$ и $n_i(\xi)$, а также разности $n_i(\xi) - n_e(\xi)$, пропорциональной плотности пространственного заряда, при условиях, которые обеспечивают движение псевдочастицы-осциллятора вдали от сепаратрисы в глубине потенциальной ямы. Заметна асимметрия этих колебаний, когда амплитуда колебаний “вверх” не равна амплитуде колебаний “вниз”. Изменение знака заряда на рис. 3,г соответствует отмеченному выше изменению знака псевдосилы $F(\varphi)$. Физически это означает следующее. Можно упрощенно представить, что всплеск ионной плотности представляет собой контейнер, содержащий легкие, но обладающие конечной массой электроны. При движении контейнера находящиеся в ней электроны двигаются еще быстрее и ударяются об ее стенки подобно тому, как это происходит в детской погремушке. Конечная масса электронов (инерция) здесь ответственна за появление участков отрицательного пространственного заряда перед и за основным всплеском, которые заметны на рис. 3,г.

На рис. 4 построены аналогичные профили при движении псевдочастицы вблизи сепаратрисы по краю потенциальной ямы, когда каждый всплеск близок по форме уединенной волне.

Таким образом, в данной работе приведено полное аналитическое решение задачи о структуре нелинейной ионно-звуковой волны в плазме с учетом инерции электронов. Получено, что уединенная волна может иметь скорость от 1 до 1,58 скоростей линейного ионного звука.

Автор благодарна В. Б. Якубову, чьи советы позволили улучшить данную статью.

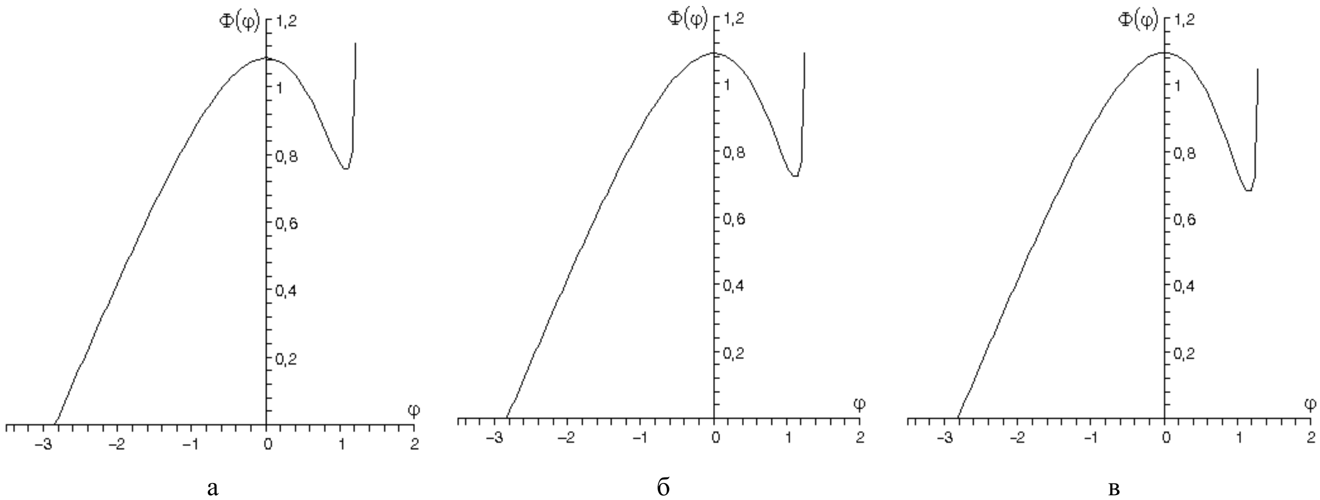
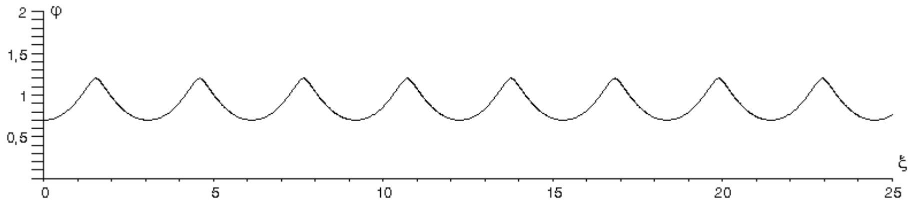
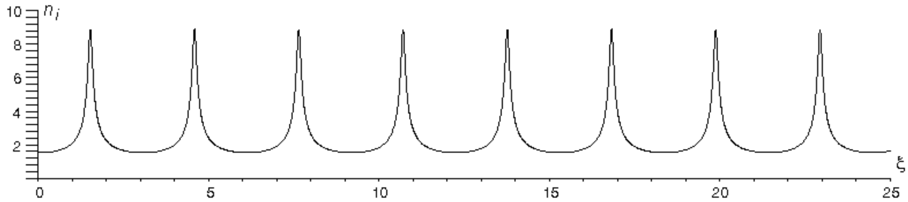


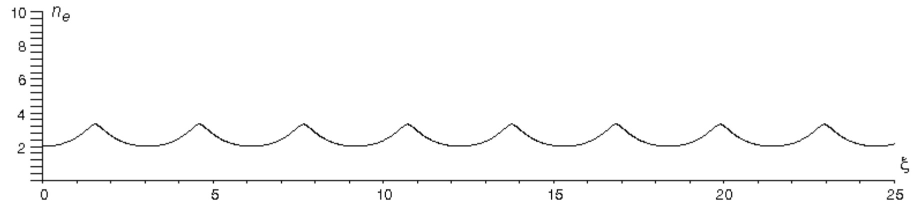
Рис. 2. Зависимости $\Phi(\varphi)$ псевдопотенциала от электростатического потенциала, вычисленные при μ = 2000 и различных значениях v: а – v =1,56; б – v = 1,58; в – v = 1,60



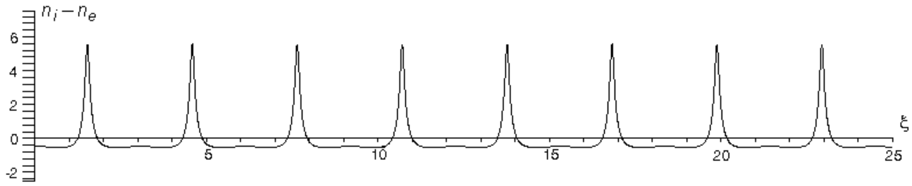
а



б

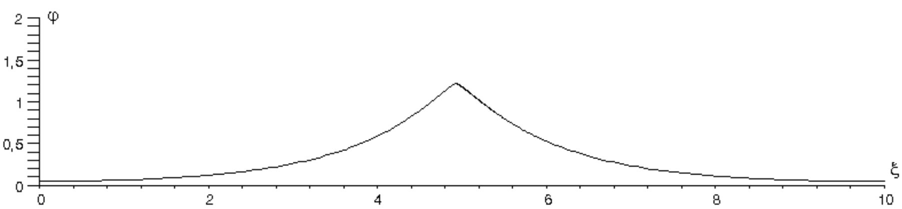


в

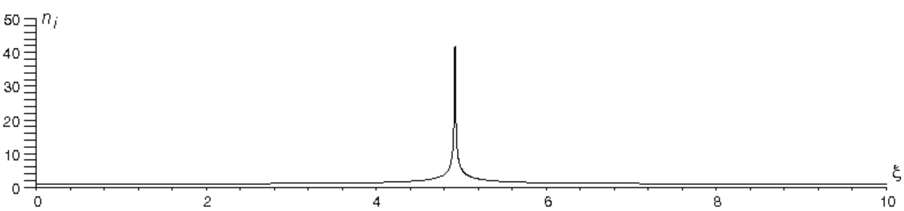


г

Рис. 3. Профили в волне, вычисленные вдали от сепаратрисы (при начальных условиях $\varphi(0) = 0,7$, $\varphi'(0) = 0$ и при v =1,56, μ = 2000: а – электростатического потенциала $\varphi(\xi)$; б – электронной концентрации $n_e(\xi)$; в – ионной концентрации $n_i(\xi)$; г – разности концентраций $n_i(\xi) - n_e(\xi)$

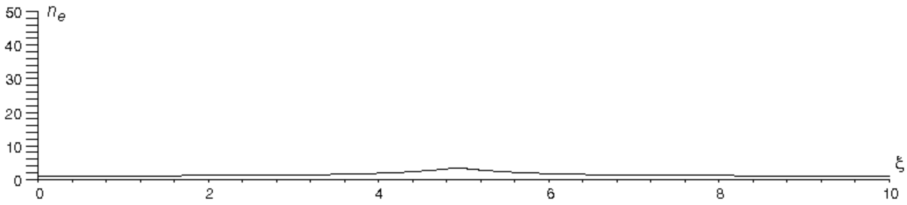


а

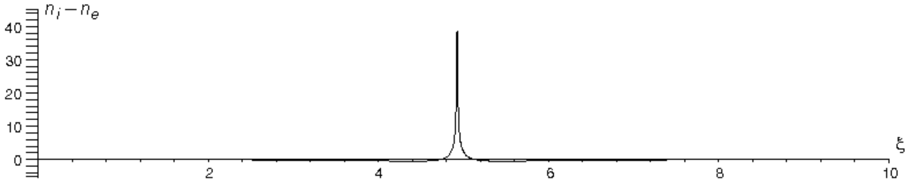


б

Рис. 4. Профили в волне, вычисленные вдали от сепаратрисы (при начальных условиях $\varphi(0) = 0,05$, $\varphi'(0) = 0$ и при, v =1,56, μ = 2000: а – электростатического потенциала $\varphi(\xi)$; б – электронной концентрации $n_e(\xi)$; в – ионной концентрации $n_i(\xi)$; г – разности концентраций $n_i(\xi) - n_e(\xi)$ (окончание рисунка на с. 23)



в



г

Рис. 4. Окончание

Список литературы

1. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания разреженной плазмы // Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 82–100.

2. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 20–187.

3. Sagdeev R. Z. The 1976 Oppenheimer lectures: critical problems in plasma astrophysics // Rev. Mod. Phys. 1979. Vol. 51, No. 1. P. 1–20.

4. Dubinov A. E., Dubinova I. D. How can one solve exactly some problems in plasma theory // J. Plasma Phys. 2005. Vol. 71, No. 5. P. 715–728.

5. Valluri S. R., Jeffrey D. J., Corless R. M. Some Applications of the Lambert *W*-Function to Physics // Canadian J. Phys. 2000. Vol. 78. P. 823–831.

6. Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К. *W*–функция Ламберта: таблица интегралов и другие математические свойства. Саров: СарФТИ, 2004.

7. Дубинова И. Д. Применение *W*-функции Ламберта в математических задачах физики плазмы // Физика плазмы. 2004. Т. 30, № 10. С. 937–943.

8. Sakanaka P. H. Formation and interaction of ion–acoustic solitary waves in a collisionless warm plasma // Phys. Fluids. 1972. Vol. 15, No. 2. P. 304–310.

9. Baumgärtel K. Finite ion temperature effects on strongly non-linear ion acoustic solitons // Beiträge aus der Plasma Physik. 1978. Vol. 4, No. 18. P. 225–229.

10. Mamun A. A. Effects of ion temperature on electrostatic solitary structures in nonthermal plasmas // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55, No. 2. P. 1852–1857.

11. White R. B., Fried B. D., Coroniti F. V. Structure of ion acoustic solitons and shock waves in a two-component plasma // Phys. Fluids. 1972. Vol. 15, No. 8. P. 1484–1490.

12. Tran M. Q., Bitter M., Hirt P. J. Collisionless ion acoustic shocks in a two component plasma // Plasma Phys. 1974. Vol. 16. P. 1198–1200.

13. Sakanaka P. H., Shukla P. K. Large amplitude solitons and double layers in multicimponent dusty plasmas // Phys. Scripta. 2000. Vol. T84. P. 181–183.

14. Dey M., Goswami K. S., Bujarbarua S. Theory of weak modified electron acoustic double layers and solitary waves in presence of negative ions // Contrib. Plasma Phys. 1989. Vol. 29, No. 6. P. 599–608.

15. Gill T. S., Kaur H., Saini N. S. Ion-acoustic solitons in a plasma consisting of positive and negative ions with nonisothermal electrons // Phys. Plasma. 2003. Vol. 10, No. 10. P. 3927–3932.

16. Bhattacharya S. K., Paul S. N., Chakraborty B. Effects of non–thermal electrons and negative ions on ion–acoustic solitary waves in a bounded plasma // Indian J. Phys. 2003. Vol. 77B, No. 3. P. 327–334.

17. Ghosh S. S., Iyengar A. N. S. Anomalous width variations for ion acoustic rarefactive solitary waves in a warm ion plasma with two electron temperatures // Phys. Plasma. 1997. Vol. 4, No. 9. P. 3204–3210.

18. Ghosh S. S., Iyengar A. N. S. Fully nonlinear compressive ion acoustic solitary waves in a two electron temperature plasma with warm ions // Phys. Scripta. 2000. Vol. 61. P. 361–364.

19. Заславский Г. М. Нелинейные волны и их взаимодействие // УФН. 1973. Т. 111, № 3. С. 395–426.

20. McKenzie J. F. The ion-acoustic soliton: a gas–dynamic viewpoint // Phys. Plasma. 2002. Vol. 9, No. 3. P. 800–805.

21. Mondal K. K., Paul S. N., Chowdhury A. R. Effects of boundary and electron inertia on the ion acoustic wave in a plasma: a pseudopotential approach // Austral. J. Phys. 1997. Vol. 51, No. 113–124.

22. Paul S. N., Chattopadhyaya S., Bhattacharya S. K., Bera B. On the study of ion-acoustic solitary waves and double–layers in a drift multicomponent plasma with electron inertia // Pramana – J. Phys. 2003. Vol. 60, No. 6. P. 1217–1233.

23. Chatterjee P., Das B. Effect of electron inertia on the speed and shape of ion-acoustic solitary waves in plasma // Phys. Plasma. 2004. Vol. 11, No. 7. P. 3616–3620.

Статья поступила в редакцию 02.11.2005