

## УТОЧНЕНИЕ КОНСТАНТ $k$ - $\varepsilon$ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ОСНОВЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ И ИЗМЕРЕНИЙ

А. Р. Гужова, А. С. Павлушин, В. П. Стаценко  
РФЯЦ-ВНИИЭФ

Приводятся результаты расчета с помощью  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности автомодельных режимов простейших турбулентных течений. Оптимизация эмпирических коэффициентов модели производится с помощью предложенных авторами приближенных аналитических решений. Результаты расчетов по  $k$ - $\varepsilon$  модели сравниваются с результатами проведенного ранее прямого 3D численного моделирования и известными экспериментальными данными.

### Введение

Как и в любой феноменологической модели турбулентности, в  $k$ - $\varepsilon$  модели имеется набор полуэмпирических коэффициентов. Обычно их находят, обращаясь к простейшим течениям. Мы рассматриваем автомодельную стадию таких течений, поскольку на этой стадии исключается влияние начальных условий или других факторов, вносящих дополнительные параметры в описание течения.

Задача о турбулентном перемешивании под действием постоянной силы тяжести (постоянного ускорения) на плоской границе раздела двух несжимаемых жидкостей (газов) исследована экспериментально в ряде работ [1–6].

Эта задача исследовалась также численно в ряде работ [4,7–11] с помощью прямого двумерного и трехмерного численного моделирования. Расчеты, выполненные на достаточно подробной сетке, приводят к заметно меньшим приведенным скоростям роста зоны турбулентного перемешивания (ЗТП), чем полученные в опытах авторами [1–6]. Как показано в докладе [10], это расхождение объясняется тем обстоятельством, что при обработке измерений с большим весом входил начальный неавтомодельный временной интервал. Аналогичные данные приведены в докладе Вебера [11].

Другой пример успешного использования прямого двумерного и трехмерного численного моделирования турбулентных течений – задача о сдвиге перемешивания в плоском слое смешения, рассмотренная в [12–14], что позволило описать соответствующие экспериментальные данные [15–17], которые, по-видимому, более детальны и надежны, чем данные [1–6] для гравитационного перемешивания.

Таким образом, в данное время более обоснованными представляются результаты прямого трехмерного численного моделирования. Отметим, что они также являются более представительными, поскольку кроме ширины ЗТП, измеряемой в опытах, позволяют также находить профили турбулентной энергии, турбулентного потока массы, квадратичных пульсаций плотности и анизотропии тензора Рейнольдса.

В то же время имеющиеся феноменологические модели [18–25] как анизотропной ([19, 20, 22]), так и изотропной ([18, 21, 23–25]) турбулентности содержат полуэмпирические коэффициенты, при выборе которых предпочтение ранее отдавалось экспериментальным данным.

В данной работе сделана попытка подбора указанных коэффициентов для  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности [23–25], исходя из результатов прямого трехмерного численного моделирования указанных задач. При этом кроме интегральной величины (приведенной ширины ЗТП) сравнивались профили различных моментов пульсаций скорости и плотности.

Кроме того, изменение указанных коэффициентов сказывается на результатах расчета с помощью  $k$ - $\varepsilon$  модели других простейших автомодельных течений: гравитационное перемешивание легкого (тяжелого) плоского слоя, перемешивание в пристеночном турбулентном пограничном плоском слое и т. д. Для них прямое численное моделирование пока выполнено лишь на грубой сетке, поэтому сравнение результатов расчета по  $k$ - $\varepsilon$  модели проводится в основном с соответствующими измерениями [26–28].

# 1. Основные уравнения $k$ - $\epsilon$ модели изотропной турбулентности

Уравнения газодинамики при наличии турбулентного перемешивания имеют следующий вид:

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0; \quad (1)$$

уравнение движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + g_i \rho, \quad (2)$$

$\vec{g}$  – ускорение силы тяжести. Полный тензор вязких напряжений  $\sigma_{ik} \equiv \sigma_{ikM} + \sigma_{ikT}$  включает молекулярный тензор вязких напряжений

$$\sigma_{ijM} = \rho \nu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ji} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right), \quad (3)$$

где  $\nu = \nu(\rho, T)$  – кинематический коэффициент молекулярной вязкости. Ниже рассмотрим лишь задачи с пренебрежимо малой вязкостью (бесконечно большие числа Рейнольдса).

Тензор напряжений Рейнольдса  $\sigma_{ijT} \equiv -\overline{\rho u_i' u_j'}$  аппроксимируем как обычно

$$\sigma_{ijT} = \rho D \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ji} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - P_T \delta_{ji}, \quad (4)$$

здесь турбулентное давление

$$P_T = \frac{2}{3} \rho k; \quad (5)$$

$k$  – турбулентная энергия. Коэффициент турбулентной вязкости

$$D = c_D \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (6)$$

$\epsilon$  – скорость диссипации турбулентной энергии.

Уравнение для удельной энергии  $e = e(\rho, T)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_n}(\rho u_n e - P a_n + Q_n^T + q_n) = \\ = \rho \epsilon - P \frac{\partial u_n}{\partial x_n} - G_2 + \sigma_{ikM} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (7)$$

здесь  $q_n$  – молекулярный тепловой поток;

$$G_2 = a_k \frac{\partial P}{\partial x_k}; \quad a_i \equiv \frac{\overline{\rho' u_i'}}{\bar{\rho}} = -\frac{c_\alpha D}{\bar{\rho}} \left( \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial s} \right)_P \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_k};$$

$$Q_n^T = -c_\alpha \rho D \left( \frac{\partial e}{\partial s} \right)_P \frac{\partial s}{\partial x_k}.$$

Для идеального газа с постоянной адиабаты  $\gamma$  уравнение (7) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_n}(\rho u_n e - \gamma P e a_n + q_n) = \\ = -P \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \rho \epsilon - G_2 + \sigma_{ikM} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (8)$$

причем

$$a_k = c_e D \left( \frac{1}{\gamma P} \frac{\partial P}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right).$$

Уравнение для массовых долей компонентов

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha^{(i)} \rho) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha^{(i)} \rho u_k) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho \left( c_\alpha D \left( \frac{\partial \alpha^{(i)}}{\partial s} \right) \right)_P \frac{\partial s}{\partial x_k} + \xi^{(i)} \frac{\partial \alpha^{(i)}}{\partial x_k} \right) + \rho R^{(i)}, \end{aligned}$$

$\xi^{(i)} = \xi^{(i)}(\rho, T, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N)})$  – кинематический коэффициент молекулярной диффузии  $i$ -го компонента смеси;  $R_i(\rho, T, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N)})$  – скорость изменения массовой доли данного компонента вследствие химической реакции.

Уравнение состояния в случае смеси идеальных газов

$$P = \frac{RT\rho}{\mu}; \quad \mu \equiv \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\alpha_i}{\mu_i}. \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения для турбулентных величин имеют следующий вид:

уравнение для турбулентной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho k u_k) = \\ = (G_1 + G_2) - \rho \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho c_k D \frac{\partial k}{\partial x_k} \right); \end{aligned} \quad (10)$$

для скорости диссипации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho \epsilon u_k) = \\ = \frac{\epsilon}{k} (c_{\epsilon 1} G_1 + c_{\epsilon 2} G_2 - c_{\epsilon 3} \rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho c_\epsilon D \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

здесь сдвиговое порождение турбулентности

$$G_1 = \sigma_{jkT} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}. \quad (12)$$

Система уравнений (1)–(12) содержит феноменологические коэффициенты:  $c_e, c_k, c_\alpha, c_D, c_\epsilon, c_{\epsilon 1}, c_{\epsilon 2}, c_{\epsilon 3}$ . Их значения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значение коэффициентов для модели турбулентности

$c_e$	$c_k$	$c_\alpha$	$c_D$	$c_\epsilon$	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$	$c_{\epsilon 3}$
3	3	3	0,12	2	1,3	1	2

## 2. Гравитационное перемешивание плоского слоя раздела

Рассмотрим два полупространства (разделенных в начальный момент плоскостью  $z = z_c = 0$ ), заполненных покоящимися несжимаемыми жидкостями (газами) с плотностями  $\rho_1 = 1$  и  $\rho_2 = n$ . Ускорение тяжести  $g_z = -1 \equiv -g$  направлено от тяжелого вещества к легкому.

В принятой системе отсчета граница раздела покоится. Рассмотрим автомодельную стадию задачи о гравитационном турбулентном перемешивании описанного выше слоя раздела и приближенное решение данной задачи. Учтем стандартное при выводе  $k$ - $\varepsilon$  модели предположение, имеющее вид

$$u_z = \tilde{u}_z \equiv \langle u_z \rangle + \langle u_z' \rho' \rangle / \langle \rho \rangle = \langle u_z' \rho' \rangle / \langle \rho \rangle = -c_\alpha \frac{D}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (13)$$

В данной задаче среднее по ансамблю  $\langle u_z \rangle = 0$ , а в модели фигурируют средние по Фавру  $u_z = \tilde{u}_z$ .

Из уравнения неразрывности (1) следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( c_\alpha D \frac{\partial \rho}{\partial z} \right). \quad (14)$$

Вводим автомодельную переменную

$$\chi = \frac{z - z_c}{Agt^2}, \quad (15)$$

где  $A \equiv \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$  – число Атвуда. Полагая

$$\varphi(\eta) \equiv \frac{\rho}{\rho_1}; \quad (16)$$

$$D \equiv d(\eta)g^2t^3;$$

$$k \equiv E(\eta)g^2t^2, \quad (17)$$

из уравнения (14) для автомодельного режима получим

$$2\chi\varphi' + \frac{c_\alpha}{A^2} (d\varphi)' = 0. \quad (18)$$

Обозначим

$$Z \equiv \frac{\varphi'}{\varphi}. \quad (19)$$

Примем основное приближение данной задачи

$$Z \approx \text{const},$$

тогда из выражения (18) следует

$$2\chi + \frac{c_\alpha}{A^2} (d' + dZ) = 0, \quad (20)$$

решение которого

$$d = \frac{2A^2}{c_\alpha Z} \left[ \left( \chi_1 - \frac{1}{Z} \right) e^{Z(\chi_1 - \chi)} + \frac{1}{Z} - \chi \right]. \quad (21)$$

Уравнения (10), (11) для турбулентной энергии и ее диссипации примут вид

$$2E - \left( 2\chi + \frac{c_\alpha dZ}{A^2} \right) (ZE + E') - \frac{c_\alpha (dZ)' E}{A^2} = \frac{c_\alpha dZ}{A} - c_D \frac{E^2}{d} + \frac{c_k}{A^2} \left[ dE'Z + (dE')' \right]; \quad (22)$$

$$\frac{E^2}{d} - \left( 2\chi + \frac{c_\alpha dZ}{A^2} \right) \left( \frac{ZE^2}{d} + \left( \frac{E^2}{d} \right)' \right) - \frac{c_\alpha E^2}{A^2 d} (dZ)' = \frac{E}{d} \left( \frac{c_{\varepsilon_2} c_\alpha dZ}{A} - \frac{c_{\varepsilon_3} c_D E^2}{d} \right) + \frac{c_\varepsilon}{A^2} \left[ \left( d \left( \frac{E^2}{d} \right)' \right)' + Zd \left( \frac{E^2}{d} \right)' \right]. \quad (23)$$

Положим

$$\frac{d}{E} = K = \text{const}. \quad (24)$$

Используя формулу (21), перепишем уравнения (22), (23):

$$2d - \left( 2\chi + \frac{c_\alpha dZ}{A^2} \right) (Zd + d') - \frac{c_\alpha d (dZ)'}{A^2} = \frac{c_\alpha dZK}{A} - c_D \frac{d}{K} + \frac{c_k}{A^2} \left[ dd'Z + (dd')' \right];$$

$$d - \left( 2\chi + \frac{c_\alpha dZ}{A^2} \right) (Zd + d') - \frac{c_\alpha d (dZ)'}{A^2} = d \left( \frac{c_{\varepsilon_2} c_\alpha ZK}{A} - \frac{c_{\varepsilon_3} c_D}{K} \right) + \frac{c_\varepsilon}{A^2} \left[ (dd')' + Zdd' \right]. \quad (25)$$

Вычтем из первого уравнения (25) второе, получим

$$d = \frac{c_\alpha dZK}{A} (1 - c_{\varepsilon_2}) + \frac{c_D d}{K} (c_{\varepsilon_3} - 1) + \left( \frac{c_k - c_\varepsilon}{A^2} \right) \left[ dd'Z + (dd')' \right]. \quad (26)$$

Приравнявая  $c_{\varepsilon_2} = 1$ , обращаем в нуль первое слагаемое в правой части. При этом, однако, на границе ЗТП уравнение (26) справедливо лишь при  $c_k = c_\varepsilon$ . Тогда, рассматривая (26) с учетом (20) при  $\chi = \chi_m$ , таком, что  $d'(\chi_m) = 0$ , получаем выражение

$$K = c_D (c_{\varepsilon_3} - 1). \quad (27)$$

Из первого уравнения (25) при  $\chi = \chi_m$  имеем

$$Z = \frac{\left( 2 + \frac{c_D}{K} + \frac{2c_k}{c_\alpha} \right) A}{c_\alpha K}. \quad (28)$$

Из граничных условий для  $\varphi$  и определения (19) для  $Z$  очевидно следует

$$\int_{\chi_1}^{\chi_2} Zd\chi \approx Z(\chi_2 - \chi_1) = \ln(n). \quad (29)$$

Таким образом, отсюда и из определения (16) следует выражение для приведенной ширины ЗТП

$$\alpha_y \equiv \frac{L}{Agt^2} = \chi_2 - \chi_1 = \frac{\ln(n)}{Z}, \quad (30)$$

которую можно найти с помощью формул (27), (28).

Подставим в уравнение (21) граничное условие:  $d(\chi_2) = 0$ , с учетом (29) это дает

$$\chi_1 = \frac{n-1-n \ln(n)}{Z(n-1)}; \quad \chi_2 = \frac{n-1-\ln(n)}{Z(n-1)}.$$

$$\tilde{k}_{\max} \equiv \frac{k_{\max}}{Lg} = -\frac{2A\chi_m}{c_\alpha K \ln(n)}. \quad (31)$$

Отсюда и из формулы (21) легко найти максимальное значение  $d$

$$d_{\max} \equiv d(\chi_m) = -\frac{2A^2\chi_m}{c_\alpha Z},$$

где

$$\chi_m = \frac{\ln[(1-Z\chi_1)e^{Z\chi_1}]}{Z}.$$

Тогда с учетом выражений (17),(24) можно найти значение приведенной турбулентной энергии

С помощью приближенного решения удобно подбирать эмпирические коэффициенты, входящие в  $k$ -ε модель, для получения основных характеристик данного течения, наиболее близких к соответствующим данным 3D расчетов. Выход на автомодельный режим решения, полученного по методике ЭГАК на лагранжевой счетной сетке, показан (на примере варианта 1 табл. 2) на рис. 1.

Результаты расчетов как по методике ЭГАК, так и с помощью полученного выше приближенного решения приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения коэффициентов и результатов для вариантов расчета в задаче о гравитационном перемешивании плоского слоя раздела ( $c_D = 0,121$ ,  $c_{\varepsilon 2} = 1$ )

Номер варианта	$c_\varepsilon$	$c_k$	$c_\alpha$	$c_{\varepsilon 3}$	$\alpha_\gamma$		$\tilde{k}_m$	
					ЭГАК	Приближенное решение	ЭГАК	Приближенное решение
1	2	3	3	2	0,165	0,158	0,06	0,054
2	2	3	3	1,5	0,070	0,066	0,0515	0,045
3	2	2	2	2	0,010	0,105	0,071	0,054
4	2	1,3	1,3	2	0,08	0,0686	0,0825	0,054
5	4/3	4/3	1,7	1,7	0,06	0,063	0,076	0,054
Опыты [5]	–	–	–	–	0,13±0,015		–	
Опыты [6]	–	–	–	–	0,16–0,17		–	
3D расчеты [10]	–	–	–	–	0,06		0,025–0,03 ( $\tilde{k}_m \approx 0,047 \div 0,056$ )	
3D расчеты [11]	–	–	–	–	0,06		–	

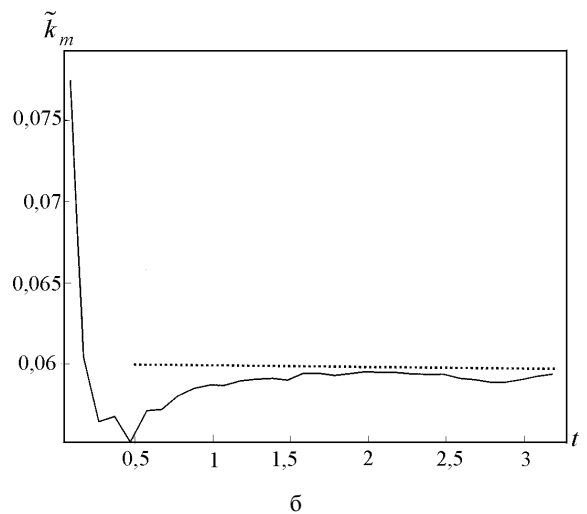
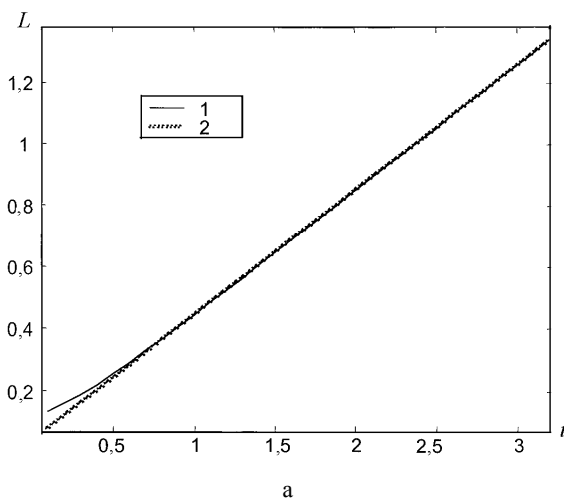


Рис. 1. Зависимость от времени ширины ЗТП (а) и максимальной по ширине ЗТП приведенной турбулентной энергии (б) в задаче о гравитационном перемешивании плоского слоя раздела: 1 – расчет; 2 – аппроксимация

Как видно из табл. 2, в расчетах с различными коэффициентами по этой методике приведенная ширина  $\alpha_y$  ЗТП в целом близка к полученной с помощью приближенного решения (30). Максимальные значения приведенной турбулентной энергии в расчете по методике ЭГАК в целом также согласуются с приближенным решением (31).

Из табл. 2 также следует, что измерения [5, 6] близки к варианту 1 расчета с прежними значениями коэффициентов. Однако, как уже отмечалось во введении, данные, приведенные авторами [5, 6], существенно завышены из-за начального неавтомодельного участка зависимости ширины ЗТП от времени.

В то же время варианты 2, 4, 5 расчетов по методике ЭГАК близки к результатам прямого 3D численного моделирования [10], полученным на счетной сетке  $200^2 \times 400$ , вариант 5 с этими результатами практически совпадает. В свою очередь, указанные результаты практически совпадают с данными [11], полученными на сетке  $256^2 \times 512$ .

Максимальные значения приведенной турбулентной энергии в расчете по методике ЭГАК в 2–3 раза превышают соответствующие данные 3D расчетов. Заметим, однако, что в последних наблюдается сильная анизотропия пульсаций скорости: отношение квадрата поперечной компоненты скорости к квадрату

продольной  $a_u \equiv \frac{\langle (u'_x)^2 \rangle}{\langle (u'_z)^2 \rangle} \approx 0,3$ . Поскольку турбу-

лентный перенос всех величин в рассматриваемом течении осуществляется именно продольной компонентой, то для сопоставления с изотропной  $k$ - $\varepsilon$  моделью логично сравнивать величину  $\tilde{k}_m = \frac{3}{2} \langle (u'_z)^2 \rangle$ .

Так как  $\tilde{k}_m = \frac{\langle (u'_z)^2 \rangle + 2 \langle (u'_x)^2 \rangle}{2}$ , то  $\tilde{k}_m = \frac{3}{2a_u + 1} \tilde{k}_m$ .

Эта величина, также показанная в табл. 2, оказывается гораздо ближе к результатам расчетов вариантов 2, 4, 5 по методике ЭГАК: в наиболее интересующем нас варианте 5 турбулентная энергия на треть больше величины  $\tilde{k}_m$  из 3D расчета.

### 3. Гравитационное перемешивание легкого (тяжелого) плоского слоя

Легкий плоский слой с плотностью  $\rho_1$  и толщиной  $d$ , окруженный жидкостью с плотностью  $\rho_0$ , находится в поле тяжести с ускорением  $g$ . В данной задаче, как и в предыдущем пункте, справедливы соотношения (13)–(15).

Автомодельное решение устанавливается при  $L/d \rightarrow \infty$ , ищем его в виде

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{d\varphi(\eta)}{L(t)} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right); \quad \eta \equiv \frac{z - z_d}{L}; \quad (32)$$

$$D = L(t)\delta(\eta)B; \quad (33)$$

$$B \equiv \sqrt{dg \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)}.$$

Подставим выражения (32), (33) в (14), второй член слева при этом оказывается более высокого порядка малости по  $d/L$ , остающиеся члены дают уравнение

$$\varphi + \eta\varphi' + \lambda(\delta\varphi)' = 0, \quad (34)$$

где

$$\lambda \equiv \frac{c_\alpha B}{L}.$$

В силу условия автомодельности  $\lambda = \text{const}$  имеем

$$L \equiv t \frac{c_\alpha}{\lambda} \sqrt{dg \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)}.$$

Из уравнения (34) следует (с учетом обращения в ноль величин вне слоя)

$$\eta\varphi + \lambda\delta\varphi' = 0. \quad (35)$$

Сохранение массы приводит, очевидно, к соотношению

$$\int_0^1 \varphi d\eta = 1. \quad (36)$$

Уравнения (10), (11) для турбулентной энергии  $k$  и скорости диссипации  $\varepsilon$  в данной задаче

$$\frac{dk}{dt} = G_2 - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial z} \left( c_k D \frac{\partial k}{\partial z} \right); \quad (37)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 2} G_2 - c_{\varepsilon 3} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z} \left( c_\varepsilon D \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right), \quad (38)$$

где

$$G_2 = -c_\alpha D \frac{g_z}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

Автомодельное решение ищем в виде

$$\varepsilon = \frac{E(\eta)}{L(t)}; \quad k = k(\eta),$$

тогда выражения (37), (38) можно записать

$$\eta k' B \frac{c_\alpha}{\lambda} - A \delta\varphi' - E + c_k B (\delta k')' = 0; \quad (39)$$

$$(E + \eta E') \frac{c_\alpha B}{\lambda} + \frac{E}{k} (-c_{\varepsilon 2} A \delta\varphi' - c_{\varepsilon 3} E) + c_\varepsilon B (\delta E')' = 0. \quad (40)$$

Здесь

$$A \equiv c_\alpha \left( dg \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \right)^{3/2} \equiv c_\alpha B^3.$$

Примем

$$E = Kk.$$

подставим это соотношение в (40) и вычтем из (39), полагая также  $c_\varepsilon = c_k$ , и  $c_{\varepsilon 2} = 1$ . Получим

$$\lambda = \frac{c_\alpha B}{(c_{\varepsilon 3} - 1)K}.$$

Далее используем основное приближение:  $\varphi' = \text{const}$ . Тогда из выражений (35), (36) следует ( $1 \geq \eta \geq 0$ )

$$\varphi = 2(1-\eta); \quad \delta = \frac{\eta(1-\eta)}{\lambda}.$$

Подставим эти выражения в (39) и проинтегрируем от 0 до 1. Учитывая, что

$$k = \frac{KB\eta(1-\eta)}{\lambda c_D}; \quad \int_0^1 k d\eta = \frac{BK}{6\lambda c_D}, \quad (41)$$

получим

$$K^2 = 2c_\alpha c_D B^2; \quad (42)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{c_\alpha}{2c_D}} \frac{1}{(c_{\varepsilon 3} - 1)}. \quad (43)$$

Из (41)–(43) следует выражение для максимально-го безразмерного значения турбулентной энергии

$$\tilde{k}_m \equiv \frac{k_m}{dg \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)} = \frac{c_{\varepsilon 3} - 1}{2}.$$

Величину  $b$  определим согласно [26]:  $b \equiv \frac{d\tilde{L}}{dt}$ ;  $\tilde{L} \equiv \frac{L}{\sqrt{dg(1-\rho_1/\rho_0)}} \equiv \frac{L}{B}$ , тогда для  $b$  из (37), (43) следует выражение

$$b = \frac{c_\alpha}{\lambda} = (c_{\varepsilon 3} - 1)\sqrt{2c_D c_\alpha}. \quad (44)$$

С помощью приближенного решения, таким образом, можно подбирать входящие в него эмпирические коэффициенты  $k$ - $\varepsilon$  модели для получения основных характеристик данного течения, наиболее близких к измеренным.

Выход на автомодельный режим решения, полученного по методике ЭГАК на эйлеровой счетной сетке, показан (на примере варианта 1 табл. 3) на рис. 2.

Как видно из табл. 3, в расчетах с различными коэффициентами по этой методике приведенная ширина  $b$  в целом близка к полученной с помощью приближенного решения (44). Максимальные значения приведенной турбулентной энергии в расчете по методике ЭГАК в целом хуже согласуются с приближенным решением.

Таблица 3

Значения коэффициентов и результатов для вариантов расчета в задаче о перемешивании легкого слоя ( $c_D = 0,121$ ;  $c_{\varepsilon 2} = 1,0$ )

Номер варианта	$c_\alpha$	$c_k$	$c_\varepsilon$	$c_{\varepsilon 3}$	$b$		$\tilde{k}_m$	
					ЭГАК	Приближенное решение	ЭГАК	Приближенное решение
1	3	3	2	2	0,715	0,85	0,237	0,5
2	3	3	2	1,5	0,43	0,424	0,174	0,25
3	3	4/3	4/3	1,7	0,43	0,594	0,267	0,35
4	1,7	4/3	4/3	1,7	0,36	0,447	0,233	0,35
Опыты [26]	–	–	–	–	0,35±0,37		–	

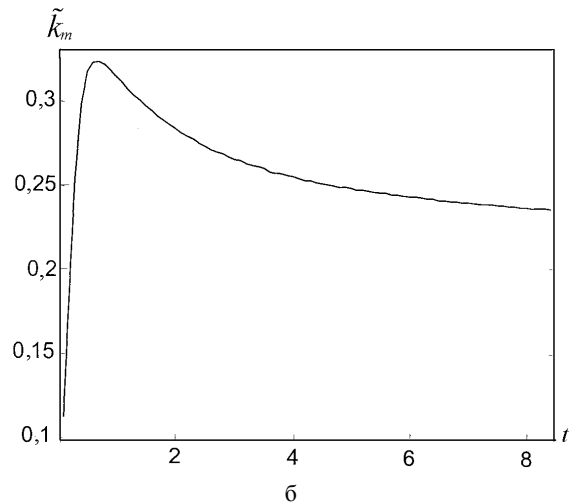
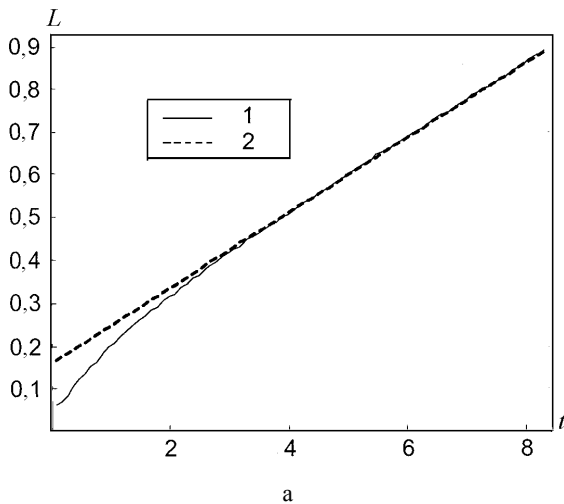


Рис. 2. Зависимость от времени ширины ЗТП (а) и максимальной по ширине ЗТП приведенной турбулентной энергии (б) в задаче о легком слое смешения: 1 – расчет; 2 – аппроксимация

Из табл. 3 следует, что измерения [26] ближе к варианту 4 с новыми значениями  $c_\alpha = c_{\varepsilon 3} = 1,7$ .

3D расчеты данной задачи были выполнены на довольно грубой счетной сетке (наиболее подробная сетка  $96^3$ ), поэтому можно лишь отметить, что максимальные значения приведенной турбулентной энергии изменяются почти на порядок в разных вариантах  $\tilde{k}_m = 0,13 \div 1,1$ . По-видимому, получить автомодельный режим в 3D расчетах данной задачи сложнее, чем в задаче о перемешивании двух полупространств, поскольку максимальная разнородность  $\delta\rho_m$  уменьшается со временем:  $\delta\rho_m \sim 1/t$ , что создает трудности при численном счете.

#### 4. Сдвиговое перемешивание плоского слоя раздела

Рассматриваемая модель с достаточной точностью оказывается применимой и для описания автомодельного сдвигового течения. Например, возникающего в начальном участке слоя смешения, создаваемого на краю струи, вытекающей из сопла, когда отношение скорости струи (относительно сопла) к скорости самого сопла относительно окружающей среды близко к единице, а задача однородна по плотности. Тогда в системе отсчета, связанной со средой, задача становится одномерной, но нестационарной – в автомодельном режиме ширина плоского слоя смешения растет линейно со временем пропорционально разности скоростей  $u_0$  между скоростью струи и окружающей среды.

Введем автомодельные переменные

$$u_x \equiv \frac{dx}{dt} = u_0 f(\chi)/2; \quad k = u_0^2 E(\chi); \quad D = u_0^2 t d(\chi);$$

$$\chi \equiv \frac{y}{u_0 t}.$$

Граничное условие для касательной скорости  $u_x$ , изменяющейся только по координате  $y$ :

$$u_x = \begin{cases} u_0/2; & y > y_2; \\ -u_0/2; & y < y_1 = -y_2. \end{cases} \quad (45)$$

Уравнения (2), (4) для автомодельного режима запишем, полагая  $v \equiv f'$ :

$$\chi v + (dv)' = 0. \quad (46)$$

Для получения приближенного решения рассмотрим уравнения (10), (11) в центральной части ЗТП (т. е. при  $\chi = 0$ ), где первые производные от  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $D$  обращаются в ноль, тогда выражение (10) с учетом (6) запишем для автомодельного режима в виде

$$dv^2/4 - c_D E^2/d + c_k (dE')' = 0. \quad (47)$$

Примем также приближения

$$K \equiv E/d \approx \text{const}; \quad (48)$$

$$v \approx \text{const}. \quad (49)$$

Тогда из формулы (46) следует

$$d = (\chi_1^2 - \chi^2)/2, \quad (50)$$

а из формулы (47) следует  $E'' = -K = (c_D K^2 - v^2/4)/c_k$ , т. е.

$$v = 2\sqrt{K(c_D K + c_k)}. \quad (51)$$

Уравнение (11), записанное для автомодельного режима, с учетом (48)–(51) дает

$$K = \frac{1 - c_\varepsilon + c_{\varepsilon 1} c_k}{c_D (c_{\varepsilon 3} - c_{\varepsilon 1})}. \quad (52)$$

Учитывая, что  $f(\chi_2) = 1$ ;  $f(\chi_1) = -1$ , а ширина зоны перемешивания  $L = y_2 - y_1$  (см. (45)), получим

$$v = \frac{df}{d\chi} \approx \frac{2A}{\chi_2 - \chi_1} = \frac{A}{|\chi_1|}; \quad (53)$$

$$\hat{L} \equiv \frac{1}{u_0} \frac{dL}{dt} = \chi_2 - \chi_1 = \frac{2A}{v} = \frac{A}{\sqrt{K(c_D K + c_k)}}, \quad (54)$$

где поправочный коэффициент  $A > 1$  учитывает, что значение величины  $v = \frac{df}{d\chi} \approx \frac{2A}{\chi_2 - \chi_1}$  в центре ЗТП, которое фигурирует в нашем рассмотрении, превышает среднее по ЗТП значение этой величины  $\langle v \rangle = \langle \frac{df}{d\chi} \rangle = \frac{2}{\chi_2 - \chi_1}$ .

Из выражений (48), (50) очевидно следует, что максимальное значение  $E_m = K\chi_1^2/2$ , что позволяет найти максимальное значение приведенной величины турбулентной энергии с помощью (53)

$$E_m = \frac{KA^2}{2v^2} = \frac{A^2}{8(c_D K + c_k)}. \quad (55)$$

Выход на автомодельный режим решения, полученного по методике ЭГАК, показан (на примере варианта 1 табл. 4) на рис. 3.

Значения коэффициентов и результатов для вариантов расчета в задаче о сдвиговом перемешивании ( $c_D = 0,121$ ;  $c_{\varepsilon 2} = 1,0$ )

Номер варианта	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon}$	$c_k$	$c_{\varepsilon 3}$	$\hat{L}$		$E_m$	
					ЭГАК	Приближенное решение	ЭГАК	Приближенное решение
1	1,3	2	3	2	0,0965	0,083	0,031	0,0296
2	1	2	3	1,5	0,087	0,085	0,0288	0,0302
3	1	4/3	4/3	1,7	0,12	0,227	0,048	0,076
4	1,1	4/3	4/3	1,7	0,098	0,183	0,0408	0,066
5	1,15	4/3	4/3	1,7	0,086	0,163	0,0375	0,06
6	1,2	1	3	1,7	0,066	0,525	0,0227	0,0207
7	1,3	2	3	1,5	0,0264	0,0283	0,0115	0,0121
8	1,15	2	3	1,5	0,0533	0,0538	0,0205	0,0211
9	0,8	2,3	3	1,7	0,19	0,198	0,051	0,05
10	0,8	4/3	4/3	1,7	0,2	0,34	0,067	0,098
11	2	2	3	1,5	$\rightarrow 0$	$< 0$	$\rightarrow 0$	$< 0$
Опыты [17]	–				0,074–0,083		0,025–0,043	
3D расчет [4]	Число ячеек 300×300×400				0,08–0,09		0,034	

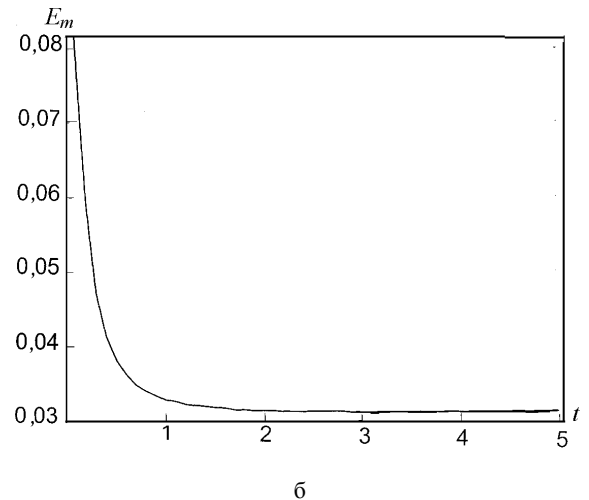
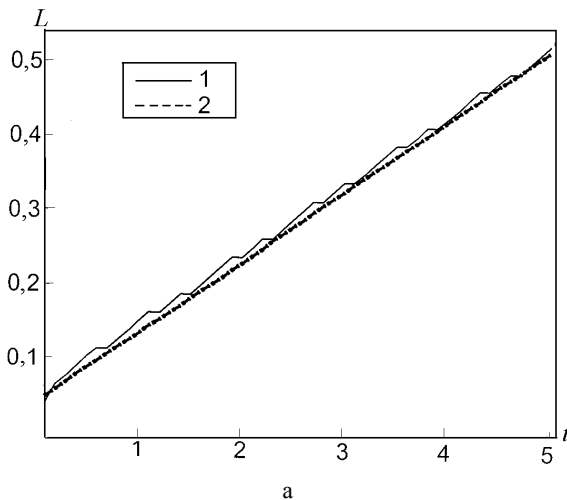


Рис. 3. Зависимость от времени ширины ЗТП (а) и максимальной по ширине ЗТП приведенной турбулентной энергии (б) в задаче о сдвиговом слое смешения: 1 – расчет; 2 – аппроксимация

Как видно из табл. 4, приведенная ширина ЗТП в расчетах с различными коэффициентами по этой методике в целом близка к полученной с помощью приближенного решения (54), (51), (52) (используется значение  $A = 1,3$ ) во всех случаях, кроме вариантов с  $c_{\varepsilon} = c_k = 4/3$ . Максимальные значения приведенной турбулентной энергии в расчете по методике ЭГАК в целом также согласуются с приближенным решением (55), кроме вариантов с  $c_{\varepsilon} = c_k = 4/3$ .

Отметим, что набор коэффициентов в варианте 11 приводит к полному подавлению турбулентности, чему

формально соответствуют отрицательные значения  $\hat{L}$  и  $E_m$  в приближенном решении.

Из табл. 4 следует, что измерения  $\hat{L}$  в [17] наиболее близки к результатам вариантов 2 и 5 (ближе к варианту 5). Измеренные значения  $E_m$  в [17] наиболее близки к результатам вариантов 1, 2 и 4, 5 (варианты 3, 6 также мало отличаются от измерений). Заметим, что максимальное и минимальное из фигурирующих в табл. 4 значений турбулентной энергии в эксперименте



[17] получено соответственно из соотношений  $k_{\max} = 3u_{\text{long}}^2/2$ ;  $k_{\min} = 3u_{\text{lat}}^2/2$ , где  $u_{\text{long}}$  – среднеквадратичная пульсация продольной компоненты скорости,  $u_{\text{lat}}$  – поперечной.

Как видно из табл. 4, данные 3D расчета [14] также близки к результатам вариантов 1, 4 и 5.

Результаты расчетов по данной методике приведены на рис. 4, на котором показана величина, обратная скорости нарастания толщины слоя смешения

$$\sigma = \frac{1,855\Delta x}{\Delta(y_{0,1} - y_{0,9})},$$

где  $\Delta(y_{0,1} - y_{0,9})$  – расстояние между точками, в которых относительная скорость  $\tilde{u} = \frac{u - u_2}{u_1 - u_2}$  принимает соответственно значения 0,1 и 0,9.

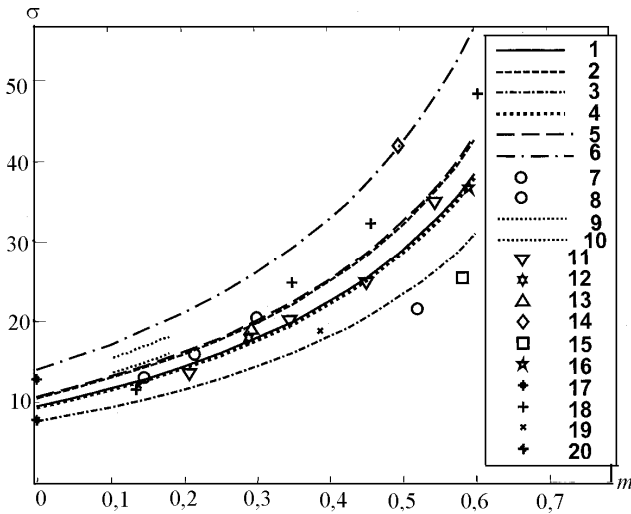


Рис. 4. Зависимость  $\sigma$  от времени в задаче о сдвиговом слое смешения: расчет: 1–6 соответствуют вариантам 1–6 табл. 4; 7, 8 – измерениям [17]; 9–18 – экспериментальным данным [16]

Для результатов расчетов, как и в [12], длине струи  $(x - x_0)$ , фигурирующей в опытах, сопоставляется время  $(t - t_0)$

$$(x - x_0) = \frac{(u_1 + u_2)}{2}(t - t_0).$$

Поскольку  $\Delta y = (u_2 - u_1)(\chi_2 - \chi_1)t$ , то

$$\sigma = \frac{1,855(1 + m)}{4(1 - m)|\chi_1|},$$

где  $m \equiv \frac{u_1}{u_2}$ , а скорости относятся к системе отсчета, связанной с разделительной пластиной или соплом. Аналогичным образом на рис. 4 представлены данные измерений [17] для соответствующего интервала изме-

рений  $\lambda \equiv \frac{1 - m}{1 + m} = 0,695 \div 0,82$ . Напомним, что именно случай  $\lambda \approx 1$  ( $m \approx 0$ ) наиболее соответствует рассматриваемой задаче.

Различными точками на рис. 4 показаны также экспериментальные данные разных авторов, приведенные в [16]. Как видно, расчетные кривые в вариантах 1–6 согласуются с измерениями, в то время как данные остальных вариантов явно выше или ниже экспериментальных точек (на рис. 4 они не приведены) – наилучшее согласие в целом с опытами наблюдается для вариантов 1, 4, 5.

Таким образом, при прежних значениях эмпирических коэффициентов имеется достаточное согласие с опытами в пределах их погрешностей. Чтобы обеспечить подобное согласие для значения  $c_{\varepsilon 3} = 1,7$ , требуется принять  $c_{\varepsilon 1} \approx 1,15$ ,  $c_{\varepsilon} = c_k = 4/3$ .

### 5. Нейтрально стратифицированный турбулентный пограничный слой

В данной задаче  $G_2 = 0$ ,  $\Lambda \sim k^{3/2}/\varepsilon \sim y$  ( $y$  – расстояние от жесткой стенки), а характерный временной масштаб  $\tau \sim \Lambda/u_* \sim y$ , где динамическая скорость

$u_*^2 \equiv D \frac{\partial u_x}{\partial y} = \text{const}$ , и для определенности мы положи-

ли  $\frac{\partial u_x}{\partial y} > 0$ ,  $\rho = 1$ . Это означает, что вблизи стенки  $\tau$  мало, т. е. устанавливается стационарное турбулентное течение. Уравнение (2) для этого случая дает  $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$  или, учитывая (4)

$$\sigma_{xy} = -D \frac{\partial u_x}{\partial y} \equiv -u_*^2 = \text{const},$$

что согласуется с ранее принятым предположением.

При этом  $\frac{\partial u_x}{\partial y} \sim \frac{u_*}{y}$ , а значит  $D \sim y$ . Но  $D \sim \Lambda \sqrt{k}$ , а значит вблизи стенки  $k = \text{const}$ . Тогда из (10), (12) следует

$$G_1 = D \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon. \quad (56)$$

Уравнение (11) можно записать

$$\frac{\varepsilon^2}{k} (c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 3}) + c_{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) = 0. \quad (57)$$

Учитывая же (6), (56) имеем

$$\frac{\varepsilon}{k} = \sqrt{c_D} \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Следовательно, выражение (57) можно записать

$$C_f f^2 = \frac{\partial^2 \ln f}{\partial y^2}. \quad (58)$$

Здесь  $f \equiv \frac{\partial u_x}{\partial y}$ ;  $C_f \equiv \left( \frac{\kappa_K}{u_*} \right)^2$ ;  $\kappa_K \equiv c_D^{1/4} \sqrt{\frac{c_{\varepsilon 3} - c_{\varepsilon 1}}{c_\varepsilon}}$ .

Решение уравнения (58) имеет вид

$$u = \frac{u_*}{\kappa_K} \ln \left( \frac{y}{h_0} \right), \quad (59)$$

где  $h_0$  – высота шероховатости либо толщина ламинарного подслоя. Из формулы (59) видно, что  $\kappa_K$  – постоянная Кармана. Ее значение для различных наборов эмпирических коэффициентов, фигурирующих в данном отчете, приведено в табл. 5.

Таблица 5

Значения постоянной Кармана для различных значений эмпирических коэффициентов ( $c_D = 0,121$ )

Номер варианта	$c_{\varepsilon 1}$	$c_\varepsilon$	$c_{\varepsilon 3}$	$\kappa_K$
1	1,3	2	2	0,348
2	1,3	2	1,5	0,186
3	1	2	1,5	0,186
4	1,15	2	1,5	0,246
5	1,2	2	1,7	0,294
6	0,8	2,3	1,7	0,368
7	1,2	1	1,7	0,416
7a	1,15	1	1,7	0,436
8	1	4/3	5/3	0,416
9	0,8	4/3	1,7	0,483
10	1	4/3	1,7	0,426
11	1,1	4/3	1,7	0,395
12	1,15	4/3	1,7	0,378

Согласно экспериментальным данным [27]  $\kappa_K = 0,4 \pm 0,04$ . Как видно из табл. 5, вариант 1 (т. е., прежние значения эмпирических коэффициентов) можно считать удовлетворительно согласующимся с этими данными, в то время как вариант 12 согласуется с ними заметно лучше.

## 6. Затухание однородной изотропной турбулентности

Из уравнений (10), (11) для данной задачи следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} &= -\varepsilon; \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -c_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon^2}{k}. \end{aligned} \quad (60)$$

Отсюда

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left( \frac{k}{k_0} \right)^{c_{\varepsilon 3}}. \quad (61)$$

Из выражений (60) и (61) получаем

$$\frac{k}{k_0} = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-m}; \quad t_0 \equiv \frac{mk_0}{\varepsilon_0}. \quad (62)$$

Здесь  $m = \frac{1}{c_{\varepsilon 3} - 1}$ .

Для пространственного масштаба турбулентности  $\Lambda = k^{3/2}/\varepsilon$  с учетом (62) имеем

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \left( \frac{t}{t_0} \right)^\delta; \quad \delta = 1 - \frac{m}{2}; \quad \Lambda_0 \equiv \frac{k_0^{3/2}}{\varepsilon_0}.$$

Закон затухания однородной изотропной турбулентности  $m = 10/7$ ,  $\delta = 2/7$ , следующий из теоретических соображений [29], подтверждается опытами (см., например, [28]). Для используемых в данном отчете величин  $c_{\varepsilon 3}$  соответствующие значения  $m$  и  $\delta$  приведены в табл. 6. Как видно, эти значения для коэффициента  $c_{\varepsilon 3} = 1,7$  согласуются с данными [28, 29], в то время как значения  $m = 1$ ,  $\delta = 0,5$  для прежнего коэффициента  $c_{\varepsilon 3} = 2$  существенно отличаются от них.

Таблица 6

Значения показателей  $m$  и  $\delta$  затухания однородной изотропной турбулентности для различных значений коэффициента  $c_{\varepsilon 3}$

$c_{\varepsilon 3}$	$m$	$\delta$
2	1	0,5
1,7	10/7	2/7
1,5	2	0

## Заключение

Ранее, в работах [23–25] были приняты следующие значения эмпирических коэффициентов для  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности:

$c_\varepsilon = 2$ ;  $c_{\varepsilon 1} = 1,3$ ;  $c_{\varepsilon 2} = 0,9 \div 1$ ;  $c_{\varepsilon 3} = 2$ ;  $c_D = 0,12$ ;  $c_\alpha = c_k = c_e = 3$ .

В результате сопоставления результатов, полученных в данном отчете по методике ЭГАК, с данными как прямого 3D численного моделирования, так и измерений наиболее оптимальным можно считать следующий набор эмпирических коэффициентов, входящих в  $k$ - $\varepsilon$  модель турбулентности:  $c_k = 4/3$ ;  $c_\alpha = 1,7$ ;  $c_D = 0,12$ ;  $c_\varepsilon = 4/3$ ;  $c_{\varepsilon 1} = 1,15$ ;  $c_{\varepsilon 2} = 1$ ;  $c_{\varepsilon 3} = 1,7$ .

Вновь выбранные нами коэффициенты обеспечивают в задаче о гравитационном перемешивании плоского слоя раздел приведенную ширину  $\alpha_Y$  ЗТП (характеризующую скорость роста ЗТП), близкую к полученной в 3D расчетах [10, 11]. Кроме того, имеется согласие и по величине турбулентной энергии при учете ее анизотропии в 3D расчетах [10, 12] и изотропии в  $k$ - $\varepsilon$  модели.

В задаче о перемешивании легкого слоя приведенная ширина  $b$  ЗТП, измеренная в [22], ближе к варианту расчета с новыми значениями коэффициентов, нежели с прежними.

В задаче о сдвиговом перемешивании как при прежних, так и при вновь выбранных нами значениях эмпирических коэффициентов имеется достаточное согласие с опытами [23] в пределах их погрешностей и 3D расчетом [14].

Для нейтрально стратифицированного турбулентного пограничного слоя вновь выбранные нами коэффициенты дают значение постоянной Кармана  $\kappa_K = 0,378$ , более удовлетворительно согласующееся с экспериментальными данными ( $\kappa_K = 0,4 \pm 0,04$ ), нежели прежние значения коэффициентов, приводящие к  $\kappa_K = 0,348$ .

Авторы благодарны В. А. Жмайло, Ю. В. Янилкину за полезные обсуждения.

### Список литературы

1. Read K. I. Experimental investigation for turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability // *Physica*. 1984. Vol. D12. P. 45.
2. Youngs D. L. Modeling turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability // *Ibid*. 1989. Vol. D37. P. 270.
3. Youngs D. L. // *Phys. Fluids*. 1991. Vol. A3. P. 1312.
4. Linden P. F., Redondo J. M., Youngs D. L. Molecular mixing in Rayleigh-Taylor instability // *J. Fluid Mech*. 1994. Vol. 265. P. 97–124.
5. Dimonte G., Schneider M. Density ratio dependence of Rayleigh-Taylor mixing for sustained and impulsive acceleration histories // Report to 8<sup>th</sup> International Seminar on Turbulent Mixing of Compressible Matter. 8<sup>th</sup> IWPCTM, Pasadena, USA, 2001.
6. Кучеренко Ю. А., Шестаченко О. Е., Пискунов Ю. А., Свиридов Е. В., Медведев В. М., Байшев А. И. Экспериментальное исследование автомодельного режима перемешивания разнотных газов в поле тяжести Земли // VI Забавихинские научные чтения: Тез. докл. Снежинск, 24–28 сентября 2001 г.
7. Youngs D. L. Numerical simulation of mixing by Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities // *Laser and Particle Beams*. 1994. Vol 12, No. 4. P. 725–750.
8. Жмайло В. А., Стадник А. Л., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Прямое численное моделирование гравитационного турбулентного перемешивания // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 1–2. С. 29–37.
9. Sinkova O. G., Stadnik A. L., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmailo V. A. Three-Dimensional Direct Numerical Simulation of Gravitational Turbulent Mixing // 6<sup>th</sup> Inter. Workshop on the Phys. of compr. turbulent mixing. Marseille, France. 1997. P. 470–479.
10. Yanilkin Yu. V., Statsenko V. P., Rebrov S. V., Sin'kova O. G., Stadnik A. L. Study of gravitational turbulent mixing at large density differences using direct 3D numerical simulation // Report to 8<sup>th</sup> International Seminar on Turbulent Mixing of Compressible Matter. 8<sup>th</sup> IWPCTM, Pasadena, USA, 2001.
11. Weber S. W., Dimonte G., Marinak M. M. ALE simulations turbulent Rayleigh-Taylor instability in 2D and 3D // Report to 8<sup>th</sup> International Seminar on Turbulent Mixing of Compressible Matter: 8<sup>th</sup> IWPCTM, Pasadena, USA, 2001.
12. Бахрах С. М., Жмайло В. А., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Численное моделирование турбулентного перемешивания в сдвиговых течениях // *Числ. методы мех. спл. среды*. 1983. Т. 14, №. 2. С. 11–27.
13. Жмайло В. А., Стадник А. Л., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Прямое численное моделирование турбулентного перемешивания в сдвиговых течениях // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1996. Вып. 1–2. С. 38–47.
14. Жмайло В. А., Синькова О. Г., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Прямое трехмерное численное моделирование сдвигового турбулентного перемешивания // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2004. Вып. 3. С. 23–39.
15. Spenser B. W., Jones B. G. Statistical investigation of pressure and velocity fields in the turbulent two-stream mixing layers. -AIAA Paper, 1971. P. 613.
16. Rodi W. A. Review of experimental data of uniform density free turbulent boundary layers. -Studies in convection, Acad. Press, London, 1975. Vol 1. P. 79–166.
17. Browand F. K., Latigo B. O. Growth of the two-dimensional mixing layer // *Phys. Fluids*. 1979. Vol. 22, No. 6. P. 1011.
18. Беленький С. З., Фрадкин Е. С. Теория турбулентного перемешивания // *Тр. ФИАН СССР*. 1965. Т. 29. С. 207–238.
19. Lewellen, Teske M. E., Donaldson C. P. Variable density flows Computed by a second-order closure description of turbulence // *AIAA Journal*. 1976. Vol. 14, No. 3. P. 382–387.
20. Андронов В. А., Бахрах С. М., Мешков Е. Е., Никифоров В. В., Певницкий А. В., Толшмяков А. И. Экспериментальное исследование и численное моделирование турбулентного перемешивания в одномерных течениях // *Докл. АН СССР*. 1982. Т. 264, № 1. С. 76–82.
21. Yanilkin Yu. V., Nikiforov V. V., Bondarenko Yu. A., Gubkov E. V., Zharova G. V., Statsenko V. P., Tarasov V. I. Two-parameter model and method for computations of turbulent mixing in 2D compressible flows // 5<sup>rd</sup> International Workshop on the Physics of compressible turbulent mixing. Stony Brook, USA, 1995.
22. Стаценко В. П. Тестирование модели турбулентности с анизотропией тензора Рейнольдса // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1996. С. 43–51.
23. Eliseyev G. M., Shemyakin V. Yu., Statsenko V. P., Tarasov V. I., Yanilkin Yu. V., Zharova G. V. Turbulent combustion of hydrogen-air mixture in a closed vessel // Proceedings of the 7<sup>rd</sup> International Workshop on the Physics of compressible turbulent mixing. St.-Petersburg, Russia. 1999. P. 244–251.
24. Stadnik A. L., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmailo V. A. 3D numerical simulation of turbulent mixing using  $k$ - $\epsilon$  turbulence model // Proceedings of the 7<sup>rd</sup> International Workshop on the Physics of compressible turbulent mixing. St.-Petersburg, Russia. 1999. P. 326–332.

25. Statsenko V. P., Velitchko O. M., Yanilkin Yu. V., Zharova G. V. Bouyant jet formation // Proceedings of the 7rd International Workshop on the Phisics of compressible turbulent mixing. St.-Petersburg, Russia. 1999. P. 333–338.

26. Kucherenko Yu. A., Balabin S. I., Pylaev A. P. Experimental stady of asymptotyc stage of the gravitational turbulent mixing of thin liquid layers of different densities // 4<sup>th</sup> International Workshop on The Phisics of compressible turbulent mixing. Cambridge, England, 1993.

27. Теннекес Х. Законы подобия, масштабные соотношения и спектральная динамика // Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей: Пер. с англ. Л.: Гидрометеоиздат, 1985. С. 51–82.

28. Paavo Sepri. Two-point turbulent measurements downstream of a heated grid // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19, No. 12. P. 1876.

29. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1953.

Статья поступила в редакцию 18.11.2005

---