

## МЕТОД ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛА В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ: ТОЧНЫЙ АНАЛИЗ В ТРЕХ ПРИМЕРАХ

А. Е. Дубинов, И. Д. Дубинова  
РФЯЦ-ВНИИЭФ

В работе продемонстрирована универсальность и эффективность метода псевдопотенциала (метода механической аналогии) для анализа нелинейных волн в плазме и показаны возможности новой специальной функции –  $W$ -функции Ламберта при решении сложных трансцендентных уравнений, ранее считавшихся не решаемыми аналитически.

Это позволило впервые получить точные выражения для характеристик нелинейных волн в плазме: диапазон чисел Маха для уединенной ионно-звуковой волны, амплитуды колебаний стоячей ТЕМ-волны в плазме со стрикционной нелинейностью, размаха асимметричных нелинейных электронных колебаний в изотропной плазме.

### Введение

В теории нелинейных волн в физике плазмы широко применяется метод псевдопотенциала, позволяющий точно вычислить и проанализировать основные параметры периодических и уединенных нелинейных волн: амплитуду, период и частоту для периодической волны, длительность и максимальную скорость для уединенной волны и др.

Сущность метода достаточно проста и понятна. Уравнения, описывающие динамику волны, тем или иным способом сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению нелинейного осциллятора типа

$$\frac{d^2 G(x)}{dx^2} = F[G(x)], \quad (1)$$

после чего производится его анализ. При этом функционал  $F[G(x)]$  играет роль псевдосилы, физическая величина  $G(x)$ , описывающая структуру волны, – роль псевдокоординаты, а  $x$  – роль псевдвремени. После умножения обеих частей уравнения (1) на  $dG(x)/dx$ , его можно один раз проинтегрировать, получив в итоге

$$-\frac{1}{2} \left[ \frac{dG(x)}{dx} \right]^2 = -\int F[G(x)] dG(x) + C = V[G(x)]. \quad (2)$$

Таким образом, наша задача свелась к анализу движения нелинейного осциллятора в заданном псевдопотенциале  $V[G(x)]$ .

В настоящее время этот метод, особенно в теории плазмы, стал классическим. В отечественной научной

литературе этот метод получил название метода механической аналогии, а в зарубежной литературе он носит название метода псевдопотенциала, или квазипотенциала (во избежание путаницы укажем, что термин «метод псевдопотенциала» в теории твердого тела относится к другому методу – методу расчета зонной структуры кристаллов – см., например, [1]). Часто  $V[G(x)]$  называют псевдопотенциалом Р. Сагдеева, а иногда и сам метод – методом псевдопотенциала Сагдеева, так как в его работах [2–4] он был впервые развит для анализа периодических и уединенных ионно-звуковых волн в плазме. Заметим, что немногим ранее некоторый вариант этого метода был применен для анализа продольных волн в релятивистской плазме А. Ахизером и Р. Половиным в [5], а также для анализа нелинейных электронных потенциальных волн в плазме А. Бернштейном, Дж. Грином и М. Крускалом в [6] и С. Амером в [7].

В большинстве учебников и монографий по физике плазмы этот метод изложен только для анализа нелинейных ионно-звуковых волн в плазме по работам [2–4], хотя в оригинальной литературе он широко применяется и для других задач нелинейной теории плазмы: нелинейные альфвеновские волны [8] и вистлеры [9], двойные слои [10] и ионные дыры [11] в плазме и др. В последнее десятилетие стало популярным использование метода псевдопотенциала в теориях запыленной плазмы: бомовские слои в пылевой плазме [12] и уединенные пылеакустические волны [13, 14]. Метод широко применяется и для задач физики газового разряда: нелинейные ионизационные волны (страты) [15, 16] и равновесие столба электрической дуги (анализ на осно-

в уравнения Эленбааса-Хеллера) [17, 18]. Список приложений метода может быть существенно расширен.

Решение дифференциального уравнения (2), в принципе, всегда можно записать в квадратурах в неявном виде

$$x - x_0 = \int \frac{dG(x)}{\sqrt{-2V[G(x)]}}, \quad (3)$$

где  $x_0$  – постоянная интегрирования. Однако уравнение (3) достаточно редко допускает аналитическое интегрирование, и тогда (3) лишь немного может прояснить в динамике исследуемого процесса. Поэтому чаще осуществляют анализ нелинейного осциллятора, не прибегая к выражению (3).

Этот анализ проводят обычно следующим образом. Сначала строят графики профилей псевдосилы и псевдопотенциала, а также фазовый портрет осциллятора. Затем определяют положения точек равновесия при наличии потенциальной ямы, движение в которой соответствует периодической волне, а также определяют наличие и форму сепаратрисы, движение по которой соответствует уединенной волне. Тогда положение равновесия и размах колебаний находятся из алгебраических уравнений, получающихся при математическом анализе функции  $V(G)$  и ее производной  $F(G)$ .

Как правило, получающиеся при этом алгебраические уравнения являются трансцендентными. Почти всегда их нельзя решить точно. Поэтому часто используют приближенные численные или графические методы. Иногда удается найти удобную аппроксимацию решения. Но теория требует точных решений, которые могут быть подставлены далее в новые теории.

В литературе известны некоторые методы, которые позволяют получить точное решение для любого трансцендентного уравнения в явном виде. Например, в [19] развит метод, связанный с граничной задачей Римана. Другой метод [20] основан на известной теореме Коши, определяющей значение интеграла вдоль замкнутого контура, который охватывает простой полюс на комплексной плоскости. Однако точные выражения для комплексных корней даже самых простых уравнений, полученные этими методами, выглядят очень громоздкими и неудобными для анализа.

В данной работе мы продемонстрируем три типовых примера из теории плазмы, в которых нам удалось провести анализ методом псевдопотенциала до конца точно. Для этого мы использовали новую специальную функцию –  $W$ -функцию Ламберта [21, 22], которая находит все большее применение в различных математических задачах физики плазмы [23–26]. Напомним, что  $W$ -функция Ламберта является обратной к функции  $y = x \exp x$  (подробнее – см. Приложение).

## 1. Нелинейные ионно-звуковые волны в плазме

Рассмотрим задачу о нелинейных ионно-звуковых волнах в плазме с холодными ионами и распределен-

ными по Больцману электронами в постановке Р. Сагдеева [2]. Будем исходить из следующего уравнения Пуассона:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \exp \frac{e\varphi}{kT} - \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2e\varphi/M}} \right), \quad (4)$$

где  $\varphi$  – электростатический потенциал в ионно-звуковой волне,  $\xi = x - ut$  – волновой анзац;  $\rho_0$  – невозмущенная концентрация плазмы;  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная;  $e$  – элементарный заряд;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – электронная температура;  $u$  – скорость волны;  $M$  – масса иона.

Введем безразмерные переменные:  $\tilde{v} = v/u$ ,  $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$ ,  $\tilde{\varphi} = e\varphi/Mu^2$ ,  $\tilde{\xi} = \omega_{pi}\xi/u$ ,  $\tilde{T} = kT/Mu^2$  ( $\omega_{pi}$  – ионная плазменная частота). Опуская в дальнейшем над ними волнистую черту, получим выражение

$$\varphi'' = \exp\left(\frac{\varphi}{T}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-2\varphi}} = F(\varphi), \quad (5)$$

имеющее вид уравнения нелинейного осциллятора (1) в некотором псевдопотенциальном поле. Интегрируя это уравнение один раз, получим внешний вид псевдопотенциала

$$V(\varphi) = -\sqrt{1-2\varphi} - T \exp\left(\frac{\varphi}{T}\right) + T + 1. \quad (6)$$

Константа интегрирования в соотношении (6) выбрана так, чтобы  $V(0) = 0$ . Исследуем структуру псевдопотенциала. Состояние равновесия осциллятора находится из условия минимума  $V(\varphi)$ , которое приводит к трансцендентному уравнению

$$1 - 2\varphi = \exp(-2\varphi/T). \quad (7)$$

Ранее это уравнение решалось графически приближенно, хотя оно может быть решено точно. Уравнение (7) всегда имеет два действительных корня, один из которых – тривиальный, а другой выражается через  $W$ -функцию Ламберта

$$\varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \left\{ TW_{0,-1} \left[ -\frac{1}{T} \exp\left(-\frac{1}{T}\right) \right] + 1 \right\}, \quad (8)$$

где  $W_0(x)$  и  $W_{-1}(x)$  – основная и отрицательная действительные ветви  $W$ -функции Ламберта соответственно. Легко видеть, что при  $T > 1$ , когда решение выражается через основную ветвь  $W$ -функции, имеет место  $\varphi_2 < 0$  и  $\varphi_2$  соответствует максимуму псевдопотенциала, а  $\varphi_1$  – его минимуму. В случае же  $T < 1$ , когда решение выражается через отрицательную ветвь, выполняется  $\varphi_2 > 0$ ,  $\varphi_2$  соответствует минимуму псевдопотенциала, а  $\varphi_1$  – его максимуму.

Для построения фазового портрета осциллятора необходимо вычислить зависимость

$$\begin{aligned} \varphi'(\varphi) &= \pm \sqrt{2[K - V(\varphi)]} = \\ &= \pm \sqrt{2\left[K + \sqrt{1 - 2\varphi} + T \exp\left(\frac{\varphi}{T}\right) - T - 1\right]}, \quad (9) \end{aligned}$$

где  $K$  – уровень энергии осциллятора.

На рис. 1 и 2 представлены распределения псевдосилы, распределения псевдопотенциала и фазовые портреты нелинейного осциллятора для двух случаев,  $T > 1$  и  $T < 1$  соответственно.

В обоих случаях псевдосила имеет два нуля, соответствующие корням (8) трансцендентного уравнения (7). Эти нули есть точки равновесия осциллятора: одна точка равновесия для каждого случая, соответствующая локальному минимуму псевдопотенциала, устойчива и изображается на фазовом портрете в виде центра, а другая точка равновесия, соответствующая локальному максимуму псевдопотенциала, неустойчива и изображается на фазовом портрете в виде седловой точки, в которую входит сепаратриса.

Периодическое движение осциллятора в потенциальной яме псевдопотенциала описывает периодические ионно-звуковые волны, а движение по сепаратрисе, проходящей через седловую точку, – уединенную ионно-звуковую волну.

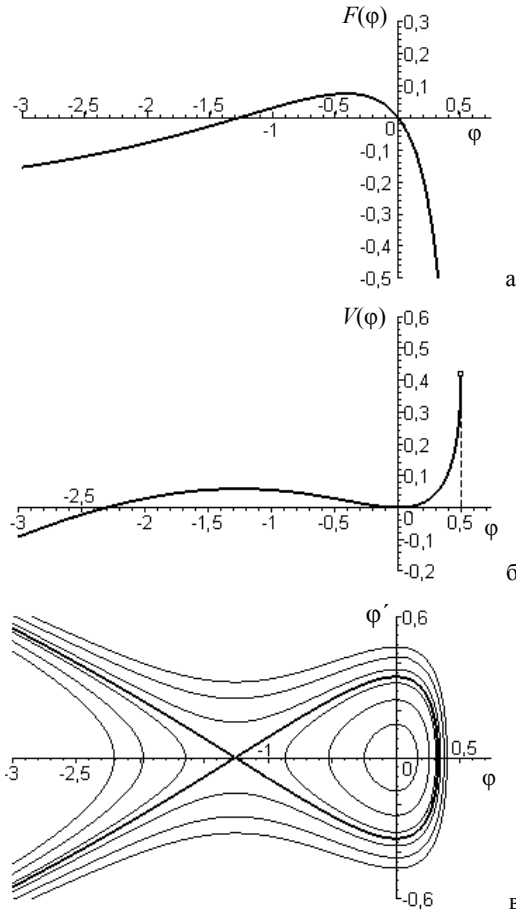


Рис. 1. Структура нелинейного осциллятора при  $T = 2$ : а – профиль псевдосилы  $F(\varphi)$ ; б – профиль псевдопотенциала  $V(\varphi)$ ; в – фазовый портрет осциллятора, жирной линией выделена сепаратриса

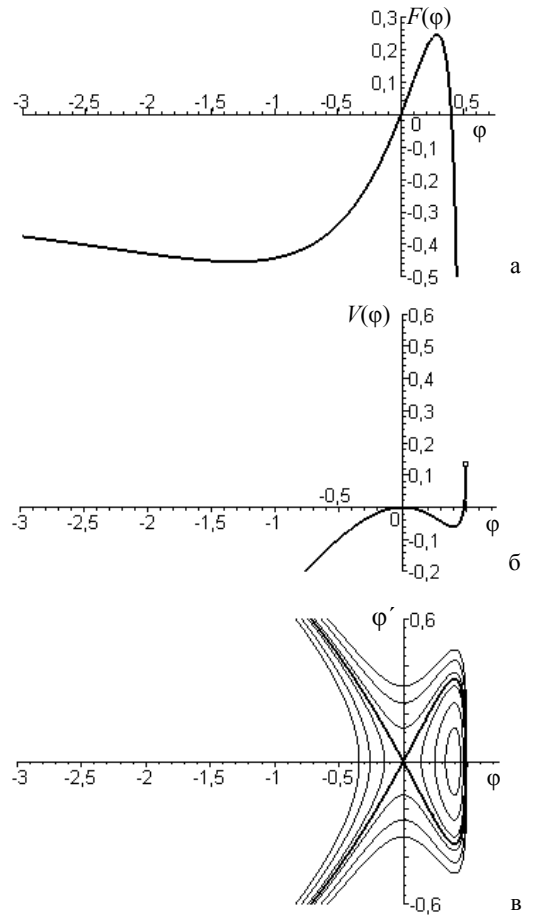


Рис. 2. Структура нелинейного осциллятора при  $T = 0,5$ : а – профиль псевдосилы  $F(\varphi)$ ; б – профиль псевдопотенциала  $V(\varphi)$ ; в – фазовый портрет осциллятора, жирной линией выделена сепаратриса

Возникает вопрос: какой уровень энергии осциллятора  $K_s$  при заданной электронной температуре  $T$  соответствует сепаратрисе, т. е. когда возникает уединенная волна? Ответ на него легко получить, вычислив зависимость глубины потенциальной ямы  $V_s$  от  $T$

$$\begin{aligned} V_s &= -T \exp\left\{\frac{1}{2} W_{0,-1}\left[-\frac{1}{T} \exp\left(-\frac{1}{T}\right)\right] + \frac{1}{2T}\right\} - \\ &= -\sqrt{-T W_{0,-1}\left[-\frac{1}{T} \exp\left(-\frac{1}{T}\right)\right] + T + 1}, \quad (10) \end{aligned}$$

в которой для  $T > 1$ , как и в выражении (8), берется основная ветвь  $W$ -функции, а для  $T < 1$  берется отрицательная ветвь  $W$ -функции. Как мы видим, и эту зависимость с помощью  $W$ -функции Ламберта удастся получить в точном виде. На рис. 3 представлен ее график.

Дальнейший анализ показывает, что решение при  $T > 1$  не удовлетворяет граничному условию  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \varphi = 0$ , поэтому уединенные волны существуют

только при  $T < 1$ , т. е. когда ее скорость превышает скорость ионного звука:  $u > c = \sqrt{kT/M}$ . Это неравенство

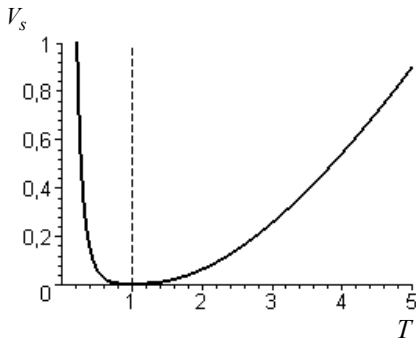


Рис. 3. График зависимости (9) глубины потенциальной ямы  $V_s$  от электронной температуры  $T$

ограничивает снизу диапазон возможных скоростей уединенной волны. Легко видеть, что имеется и ограничение сверху:  $V(\varphi = 1/2) > 0$ ; в противном случае произойдет опрокидывание волны. Геометрически это означает, что правый конец кривой псевдопотенциала на рис. 2,б не должен быть ниже локального максимума. Последнее неравенство приводит к

$$1 + T \left( 1 - \exp \frac{1}{2T} \right) > 0. \quad (11)$$

Таким образом, скорость уединенной волны должна быть из диапазона  $c < u < cM$ , где  $M$  есть число Маха, которое является решением следующего трансцендентного уравнения:

$$M^2 + 1 = \exp \frac{M^2}{2}. \quad (12)$$

Оказывается, и его решение также можно найти точно с помощью  $W$ -функции Ламберта, оно имеет вид

$$M = \sqrt{-1 - 2 W_{-1} \left[ -\frac{1}{2} \exp \left( -\frac{1}{2} \right) \right]} \approx 1,585201065..., \quad (13)$$

а в [2–4] дано значение  $M = 1,6$ .

Итак, аналитически точно исследована задача о возможной величине скорости уединенной ионно-звуковой волны.

Интересно заметить, что другая типовая плазменная задача – задача о структуре заряженного бесстолкновительного пристеночного слоя (так называемая задача о бомовском слое в плазме) также сводится к анализу уравнения Пуассона, имеющего абсолютно тот же самый вид, что и уравнение (4) (см. [27]). Мы не будем проводить для нее аналогичный анализ методом псевдопотенциала, так как он полностью идентичен предыдущему рассмотрению, а кратко укажем лишь на некоторые нюансы.

1. Периодическое решение (стратифицирование) в заряженном слое, соответствующее периодическому движению осциллятора в потенциальной яме, нефизично (см. [28]).

2. Так называемый критерий Бома к задаче о пристеночном заряженном слое сводится к поиску параметров, при которых неравенство  $V(\varphi) > 0$  выполняется при любых  $\varphi$  [28, 29].

## 2. Нелинейная динамика сильной стоячей TEM-волны в плазме

Рассмотрим задачу о динамике сильной TEM-волны  $\sim \exp(i\omega t)$  в непоглощающей плазме с нелинейной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = \varepsilon(|E|)$  в рамках модели, описанной в [30–33]. Будем считать, что диэлектрическая проницаемость определяется стрикционной нелинейностью так, что

$$\varepsilon(|E|^2) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \exp \left( -\frac{|E|^2}{E_p^2} \right), \quad (14)$$

где обозначено  $E$  – электрическое поле в волне;  $E_p = \sqrt{4m\omega^2(T_e + T_i)/e}$  – характерное плазменное поле для нелинейных стрикционных процессов;  $\omega_{pe}$  – электронная плазменная частота.

Будем исходить из следующего уравнения Гельмгольца для стоячей волны для безразмерной амплитуды волны  $\tilde{E} = E/E_p$  в безразмерных координатах  $\tilde{x} = x\omega/c$  (волнистую черту в дальнейшем опускаем):

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \varepsilon(|E|^2) E = \frac{d^2 E}{dx^2} + [1 - q \exp(-E^2)] E = 0, \quad (15)$$

где  $q = \omega_{pe}^2/\omega^2$  – параметр. Мы видим, что уравнение (15) также имеет вид уравнения нелинейного осциллятора (1) и его также можно исследовать методом псевдопотенциала, при этом амплитуда волны  $E$  играет роль псевдокоординаты, а координата  $x$  – роль псевдвремени. Первый интеграл уравнения (15) имеет вид

$$\left( \frac{dE}{dx} \right)^2 + V(E) = 0 \quad (16)$$

с псевдопотенциалом

$$V(E) = E^2 + q \exp(-E^2) - q. \quad (17)$$

Здесь мы выбрали постоянную интегрирования так, чтобы  $V(0) = 0$ .

Как указано в [33], наиболее интересным является случай, когда при  $q > 1$  существуют три точки равновесия

$$E_1 = 0; E_{2,3} = \pm \sqrt{\ln q}, \quad (18)$$

из которых первая является седловой точкой, а две другие – центрами.

Для построения фазового портрета осциллятора необходимо вычислить зависимость

$$E'(E) = \pm \sqrt{2[K - V(E)]} = \pm \sqrt{2[K - E^2 - q \exp(-E^2) + q]}, \quad (19)$$

где  $K$ , как и прежде, – уровень энергии осциллятора.

На рис. 4 показаны профили псевдосилы  $F(E)$  и псевдопотенциала  $V(E)$ , а также фазовый портрет нелинейного осциллятора. Легко понять, что замкнутые фазовые траектории внутри каждой из петель сепаратрисы (при  $K < 0$ ) описывают пространственно периодическую стоячую волну, в которой амплитуда нигде не обращается в нуль и, сохраняя направление, осциллирует от  $E_{\min}$  до  $E_{\max}$ . Замкнутые фазовые траектории вне сепаратрисы (при  $K > 0$ ) описывают волну, амплитуда которой меняется периодически от  $-E_{\max}$  до  $E_{\max}$  с изменением знака. Сепаратриса же, для которой энергия осциллятора  $K = 0$ , описывает уединенную волну с амплитудой  $E_{\max}$ .

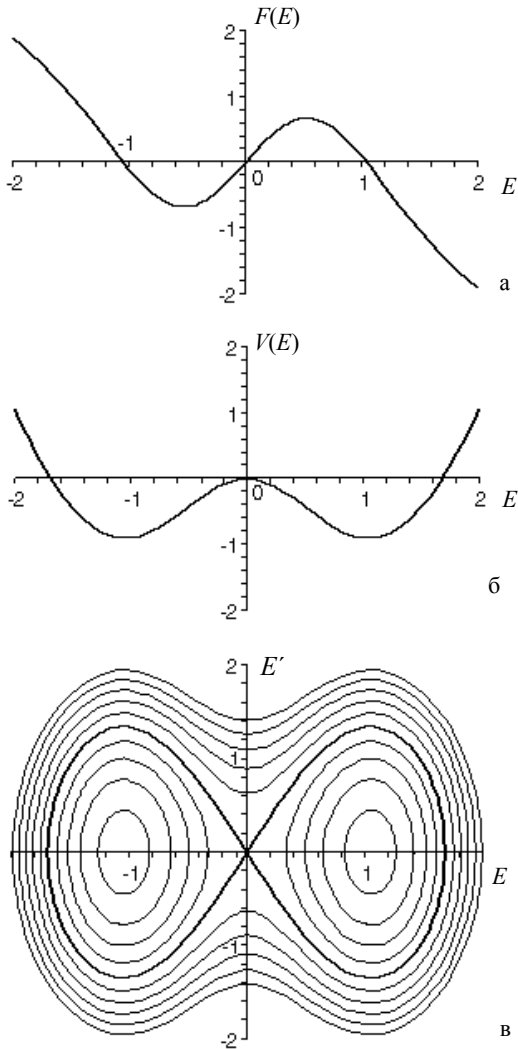


Рис. 4. Структура нелинейного осциллятора при  $q = 3$ : а – профиль псевдосилы  $F(E)$ ; б – профиль псевдопотенциала  $V(E)$ ; в – фазовый портрет осциллятора, жирной линией выделена сепаратриса

Найдем амплитуду волны для всех типов решений. Для этого приравняем псевдоскорость осциллятора (19) нулю и решим полученное трансцендентное уравнение относительно  $E$ . Оказывается, что и это трансцендент-

ное уравнение также можно решить точно с использованием  $W$ -функции Ламберта. В итоге, можно записать

$$\left. \begin{aligned} E_{\max} &= \sqrt{W_0[-q \exp(-K - q)] + K + q} \\ E_{\min} &= \sqrt{W_{-1}[-q \exp(-K - q)] + K + q} \end{aligned} \right\} \text{при } K < 0; \quad (20)$$

$$E_{\max} = \sqrt{W_0[-q \exp(-q)] + q} \text{ при } K = 0; \quad (21)$$

$$E_{\max} = \sqrt{W_0[-q \exp(-K - q)] + K + q} \text{ при } K > 0. \quad (22)$$

На рис. 5 показан график зависимости (21) амплитуды уединенной волны от параметра  $q$ . Таким образом, получены аналитически точные выражения для амплитуд сильной стоячей ТЕМ-волны в условиях стрикционной нелинейности.

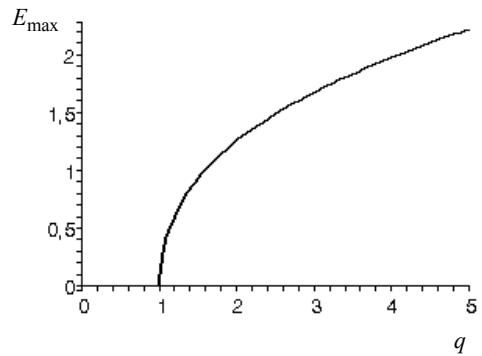


Рис. 5. График зависимости амплитуды уединенной волны  $E_{\max}$  от параметра  $q$

Здесь заметим, что псевдопотенциал типа (17) используется также в задаче о волне в самоподдерживающемся кольцеобразном волноводном канале в плазме [34].

В связи с работой [34] укажем на один полезный момент при использовании метода псевдопотенциала: для сферической и цилиндрической геометрий уравнение движения (1) имеет вид

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{d}{dr} \left( r^\alpha \frac{dG(r)}{dr} \right) = F[G(r)], \quad (23)$$

где показатель  $\alpha$  зависит от выбора типа системы координат. Такой вид левой части уравнения движения соответствует естественному убыванию амплитуды волны с расстоянием  $r$  от центра координат. В методе псевдопотенциала учет этого обстоятельства приводит к возникновению после раскрытия скобок в левой части уравнения (1) специфической псевдосилы трения, зависящей от псевдвремени  $r$ .

### 3. Нелинейные электронные колебания в плазме

Рассмотрим теперь нелинейные колебания электронов на фоне равномерно распределенного неподвижного положительного заряда в безграничной изо-

тропной плазме в рамках модели работы [7]. Пусть  $\rho_0$  – невозмущенная концентрация,  $\rho$  – мгновенная концентрация электронов и  $\eta = \rho - \rho_0$  – избыток или недостаток электронов. Тогда из уравнения Пуассона, уравнения непрерывности и уравнения движения электронов можно получить следующее нелинейное уравнение:

$$\ddot{\eta} - \frac{\dot{\eta}^2}{\rho_0 + \eta} + \omega_p^2 \eta \left(1 + \frac{\eta}{\rho_0}\right) = 0, \quad (24)$$

где точки обозначают дифференцирование по времени. При начальных условиях

$$\eta(0) = 0, \quad \dot{\eta}(0) = A_0 \omega_p \quad (25)$$

уравнение (24) поддается строгому однократному интегрированию

$$\dot{\eta} = \pm \rho_0 \omega_p \left(1 + \frac{\eta}{\rho_0}\right) \sqrt{2 \ln \left(1 + \frac{\eta}{\rho_0}\right) + \frac{A_0^2}{\rho_0^2} - 2 \frac{\eta}{\rho_0}}. \quad (26)$$

Легко видеть, что и здесь задача свелась к виду, удобному для исследования методом псевдопотенциала, при этом роль псевдокоординаты будет играть  $\eta$ , а псевдовремени – текущее время  $t$ . Запишем выражение для псевдопотенциала  $V(\zeta)$  в безразмерных переменных  $\zeta = \eta/\rho_0$ ,  $g = A_0/\rho_0$

$$V(\zeta) = -\frac{\omega_p^2}{2} (1 + \zeta)^2 \left[2 \ln(1 + \zeta) + g^2 - 2\zeta\right]. \quad (27)$$

Особенностями данного псевдопотенциала являются логарифмическая нелинейность и текущее время в роли псевдовремени. Между тем в рассмотренных выше примерах псевдопотенциалы имели экспоненциальные нелинейности и в них в качестве псевдовремени выступала текущая координата. Тем не менее (27) можно исследовать аналогично, а  $W$ -функция Ламберта и здесь поможет нам получить точные выражения для некоторых характеристик колебаний.

На рис. 6 представлен профиль псевдопотенциала  $V(\zeta)$  и фазовый портрет колебаний. Видим, что псевдопотенциал имеет вид потенциальной ямы, что приводит к нелинейным периодическим колебаниям. Так как потенциальная яма несимметрична, то электронные колебания имеют асимметрию между положительными и отрицательными значениями  $\zeta$ . Этот факт отмечается и в [7]. Действительно,  $\zeta$  не может быть меньше  $-1$ , но в положительную сторону может расти безгранично.

В силу выполнения (3) потенциал не может быть положительным, так как при этом псевдоскорость становится комплексной. Условие действительности решения будет иметь вид

$$\ln(1 + \zeta) - \left(\zeta - \frac{g^2}{2}\right) \geq 0, \quad (28)$$

которое имеет решение

$$\begin{aligned} \zeta_{\min} &= -W_0 \left[ -\exp \left( -\frac{g^2}{2} - 1 \right) \right] - 1 \leq \zeta \leq \\ &\leq -W_{-1} \left[ -\exp \left( -\frac{g^2}{2} - 1 \right) \right] = \zeta_{\max}. \end{aligned} \quad (29)$$

Фактически края этого диапазона определяют максимальный размах электронных колебаний в зависимости от величины начального возмущения электронной плотности, который определен в [7] приближенно:  $\zeta_{\max, \min} = \pm g + g^2/3$ . На рис. 7 показан график размаха колебаний в зависимости от  $q$ , из которого видно, что аппроксимации работы [7] размаха электронных колебаний близки точным значениям (29) только при  $g < 1$ , более того, аппроксимация  $\zeta_{\min}$  немонотонна, что нефизично.

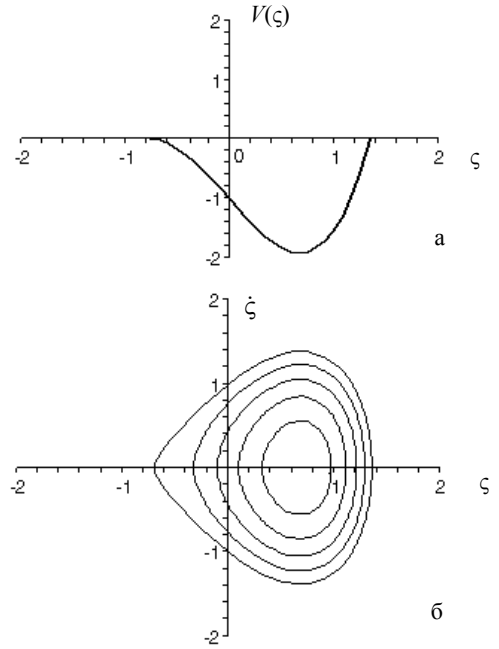


Рис. 6. Структура нелинейного осциллятора при  $q = 1$ : а – профиль псевдопотенциала  $V(\zeta)$ ; б – фазовый портрет осциллятора

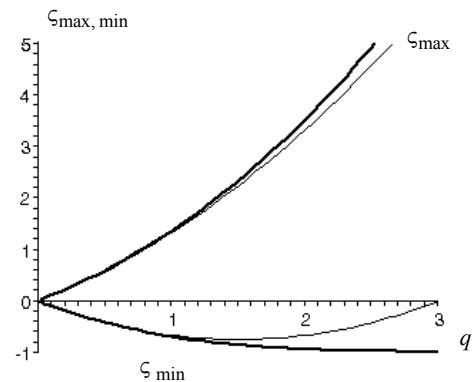


Рис. 7. График зависимости размаха электронных колебаний  $[\zeta_{\max}, \zeta_{\min}]$  от параметра  $q$  (жирные линии – точное решение (29), тонкие линии – аппроксимации работы [6])

Положение равновесия найдем из условия  $dV/d\zeta = 0$ , которое сводится к трансцендентному уравнению

$$(1 + \zeta) \left[ 3\zeta - 2 \ln(1 + \zeta) - g^2 \right] = 0, \quad (30)$$

которое имеет следующие корни:

$$\zeta_0 = -1, \quad \zeta_2 = -\frac{2}{3} W_{0,-1} \left[ -\frac{3}{2} \exp \left( -\frac{g^2}{2} - \frac{3}{2} \right) \right] - 1, \quad (31)$$

из которых только корень, определяемый отрицательной ветвью  $W$ -функции Ламберта и соответствующий минимуму псевдопотенциала, лежит внутри допустимого диапазона (29). Это означает, что псевдопотенциал не имеет максимумов, фазовый портрет не имеет сепаратрисы, а электронные колебания не могут иметь одиночного всплеска, т. е. электронные колебания в бесстолкновительной плазме в рамках рассматриваемой модели всегда периодичны (затухания Ландау нет вследствие нулевой температуры электронной компоненты).

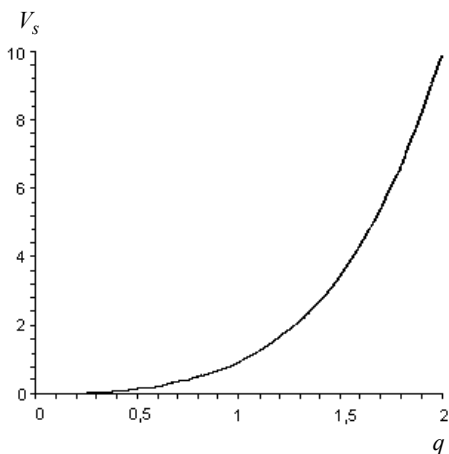


Рис. 8. График зависимости глубины потенциальной ямы  $V_s$  от  $q$

Приведем также график зависимости глубины псевдопотенциальной ямы  $V_s$  в зависимости от  $q$  (рис. 8).

### Заключение

Итак, в работе продемонстрирована универсальность и эффективность метода псевдопотенциала (метода механической аналогии) для анализа нелинейных колебаний и волн в плазме, показаны возможности новой специальной функции –  $W$ -функции Ламберта при решении сложных трансцендентных уравнений, ранее считавшихся не решаемыми аналитически.

Это позволило впервые получить точные выражения для характеристик нелинейных волн в плазме: диапазон чисел Маха для уединенной ионно-звуковой волны, амплитуды колебаний стоячей ТЕМ-волны в плазме со стрикционной нелинейностью, размаха асимметричных нелинейных электронных колебаний в

изотропной плазме. Еще раз подчеркнем, что ценность полученных точных решений заключается не в том, что теперь можно легко посчитать численные значения найденных величин (знание, например, предельной величины числа Маха с точностью до 9-го знака после запятой (13), разумеется, не требуется для сравнения с экспериментом), а в том, что полученные точные и явные формулы можно использовать в новых теориях.

Авторы выражают благодарность Кудасову Ю. Б. (РФЯЦ–ВНИИЭФ) за полезные обсуждения работы. К.-У. Римаан (Рурский университет) консультировал нас по теории пристеночного слоя, А. А. Рухадзе (ИОФ РАН) – по теории уединенных ионно-звуковых волн, П. Шрам (Технологический университет Эйндховена) – нелинейным электронным волнам. Всем им мы также выражаем благодарность.

### Приложение

Поскольку  $W$ -функция Ламберта лишь недавно вошла в арсенал специальных функций математической физики, приведем для справки ее основные свойства. Определим действительную  $W$ -функцию Ламберта для действительных значений  $x$  как решение функционального уравнения

$$W(x) \exp(W(x)) = x. \quad (32)$$

Другими словами,  $W$ -функция Ламберта есть функция, обратная к функции  $W = x \exp x$ , что позволяет достаточно легко представить внешний вид графика функции (рис. 9) и установить ее простейшие свойства.

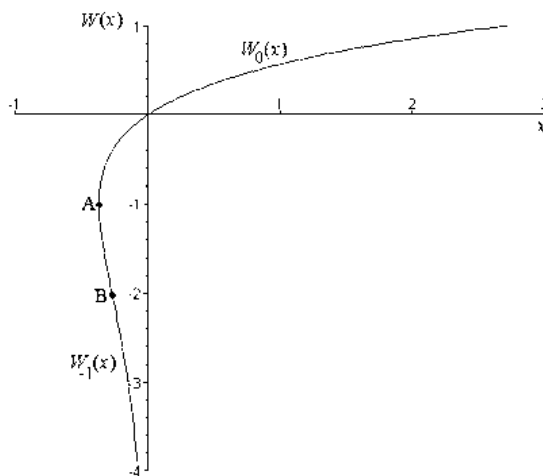


Рис. 9. График действительных ветвей  $W$ -функции Ламберта

$W$ -функция Ламберта не является ни четной, ни нечетной функцией. Она определена в интервале  $[-1/e; \infty)$ , где принимает значения от  $-\infty$  до  $\infty$ , причем для отрицательных  $x$  функция двузначна. Точка  $A$  с координатами  $(-1/e; -1)$  делит график функции на две ветви, верхнюю  $W_0(x)$  и нижнюю  $W_{-1}(x)$  так, что обе ветви в точке  $A$  имеют вертикальную касательную.

Верхняя ветвь  $W_0(x)$ , часто называемая основной, проходит через начало координат и больше не имеет особенностей. Нижняя же отрицательная ветвь  $W_{-1}(x)$  имеет точку перегиба  $B$  с координатами  $(-2/e^2; -2)$  и вертикальную асимптоту при  $x = 0$ .

Другие целые значения индекса  $k \neq 0, -1$  для функции  $W_k(k)$  относятся к комплекснозначным ветвям [35].

Из определения (32) легко вывести следующие простые тождества:

$$\exp(W(x)) = \frac{x}{W(x)}, \quad \ln W(x) = \ln x - W(x). \quad (33)$$

Представим теперь правила дифференцирования и интегрирования  $W$ -функции Ламберта. Ее производную легко найти, используя правило дифференцирования обратных функций

$$W'(x) = \frac{1}{(1+W(x))\exp(W(x))} = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}. \quad (34)$$

Последнее равенство справедливо для  $x \neq 0$ . Однако в нуле производная определена в виде предела  $\lim_{x \rightarrow 0} W'_0(x) = 1$ .

Найти неопределенный интеграл от  $W$ -функции Ламберта также можно, воспользовавшись правилом интегрирования обратных функций из [36]

$$\int_x f(x) dx = xf(x) - \int_{f(x)} g(y) dy. \quad (35)$$

Подставляя  $W$ -функцию, легко получаем (без постоянной интегрирования)

$$\int W(x) dx = x \left[ W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)} \right]. \quad (36)$$

Таблица из более сотни интегралов, содержащих  $W$ -функцию Ламберта, представлена в [22].

Приведем также разложение  $W$ -функции в ряд

$$W(x) = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \frac{54}{5}x^6 + O(x^7) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n. \quad (37)$$

## Список литературы

1. Цидильковский И. М. Электроны и дырки в полупроводниках. М.: Наука. 1972.
2. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания разреженной плазмы // Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 82–100.
3. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 20–187.

4. Sagdeev R. Z. The 1976 Oppenheimer lectures: critical problems in plasma astrophysics // Rev. Mod. Phys., 1979. Vol. 51, No 1. P. 1–20.
5. Ахиезер А. И., Половин Р. В. О релятивистских колебаниях плазмы // ДАН. 1955. Т. 102, № 5. С. 919–920.
6. Bernstein I. B., Greene J. M., Kruskal M. D. Exact nonlinear plasma oscillations // Phys. Rev. 1957. Vol. 108, No 3. P. 546–550. (Имеется перевод Бернштейн, Грин, Краскал, Строгая теория нелинейных колебаний плазмы // В кн. Колебания сверхвысоких частот в плазме. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. С. 278–290).
7. Amer S. Non-linear theory of plasma oscillations and waves // J. Electr. Contr. 1958. Vol. 5, No 2. P. 105–113 (Имеется перевод Амер, Нелинейная теория колебаний и волн в плазме // В кн. Колебания сверхвысоких частот в плазме. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. С. 291–301).
8. Saleem H., Mahmood S. Shear Alfvén wave density dips in electron-positron-ion plasmas // Phys. Plasmas. 2003. Vol. 10, No 6. P. 2612–2615.
9. Das A., Singh R., Kaw P., Champeaux S. Nonlinear coupling of whistler wave turbulence with magnetosonic perturbations // Phys. Plasmas. 2002. Vol. 9, No 6. P. 2609–2618.
10. Shamel H. Kinetic theory of phase space vortices and double layers // Physica Scripta. 1982. Vol. 1/2. P. 228–237.
11. Shukla P. S., Eliasson B. Trapping of plasmons in ion holes // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77, No 12. С. 778–783.
12. Liu J.-Y., Wang Z.-X., Wang X. et al. The Bohm criterion for the dusty plasma sheath // Phys. Plasmas. 2003. Vol. 10, No 9. P. 3507–3511.
13. Mahmood S., Saleem H. Dust acoustic solitary wave in the presence of dust streaming // Phys. Plasmas. 2003. Vol. 10, No 1. P. 47–52.
14. Gupta M. R., Sarcar S., Khan M., Ghosh S. Dust acoustic shock wave generation due to dust charge variation in a dusty plasma // Pramana J. Phys. 2003. Vol. 61, No 6. P. 1197–1201.
15. Кернер Б. С., Осипов В. В. Стохастически неоднородные структуры в неравновесных системах // ЖЭТФ. 1980. Т. 79, № 12. С. 2218–2237.
16. Кернер Б. С., Осипов В. В. К нелинейной теории страт в газовом разряде // ДАН. 1981. Т. 257, № 6. С. 1352–1355.
17. Мойжес Б. Я., Немчинский В. А., Перстц Л. Н. О неоднозначности решения уравнения Эленбааса–Хеллера для сильнооточных дуг // ЖТФ. 1976. Т. 46, № 7. С. 1427–1431.
18. Гурович В. Ц., Десятков Г. А., Энгельшт В. С. Качественное исследование уравнения Эленбааса–Хеллера // Теплофизика высоких температур. 1978. Т. 16, № 5. С. 922–925.
19. Burniston E. E., Siewert C. E. The use of Riemann problems in solving a class of transcendental equations // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1973. Vol. 73. P. 111–118.



20. Luck R., Stevens J. W. Explicit solutions for transcendental equations // *SIAM Rev.* 2002. Vol. 44, No 2. P. 227–233.
21. Valluri S. R., Jeffrey D. J., Corless R. M. Some Applications of the Lambert W Function to Physics // *Canadian J. Phys.* 2000. Vol. 78, No 9. P. 823–831.
22. Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К. *W-функция Ламберта: таблица интегралов и другие математические свойства.* Саров: СарФТИ, 2004.
23. Дубинова И. Д. Применение *W*-функции Ламберта в математических задачах физики плазмы // *Физ. плазмы.* 2004. Т. 30, № 10. С. 937–943.
24. Дубинов А. Е. Динамика формирования виртуального катода в среде с вязким трением // *ДАН.* 2004. Т. 399, № 4. С. 468–471.
25. Дубинов А. Е., Дубинова И. Д. Точное значение сопряженного тока ионов в электролите в диффузионно-миграционной модели Гуревича-Харкаца // *ЖТФ.* 2004. Т. 74, № 11. С. 118–119.
26. Dubinov A. E., Dubinova I. D. How can one solve exactly some problems in plasma theory // *J. Plasma Phys.* 2005. Vol. 71, No 5. P. 715–728.
27. Sheridan T. E., Goree J. A. Analytic expression for the electric potential in the plasma sheath // *IEEE Trans. Plasma Science.* 1989. Vol. 17, No 6. P. 884–888.
28. Riemann K.-U. The Bohm criterion and sheath formation // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1991. Vol. 24, No 4. P. 493–518.
29. Чен Ф. Ф. Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987.
30. Волков Т. Ф. О стационарном распределении плотности плазмы в электромагнитном поле // *Физика плазмы и проблема термоядерных реакций.* М.: Изд-во АН СССР, 1958. Вып. 3. С. 336–345.
31. Motz H. Note on the one-dimensional theory of radio-frequency plasma confinement // *Phys. Fluids.* 1963. Vol. 6, No 2. P. 308–310.
32. Горбунов Л. М. Гидродинамика плазмы в сильном высокочастотном поле // *УФН.* 1973. Т. 109, № 4. С. 631–665.
33. Литвак А. Г. Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме // *Вопросы теории плазмы.* М.: Атомиздат. 1980. Вып. 10. С. 164–242.
34. Аланакян Ю. Р. Локализованные электромагнитные колебания в плазме // *ЖЭТФ.* 1968. Т. 55, № 10. С. 1338–1343.
35. Jeffrey D. J., Hare D. E. G., Corless R. M. Unwinding the branches of the Lambert W function // *The Mathematical Scientist.* 1996. Vol. 21, No 1. P. 1–7.
36. Parker F. D. Integrals of inverse functions // *Amer. Math. Month.* 1955. Vol. 62, No 6. P. 439–440.

Статья поступила в редакцию 01.03.2006.