УДК 539.1.01

О ВОЗМОЖНОСТИ ОБЪЯСНЕНИЯ «THE PIONEER ANOMALY» В РАМКАХ КОНФОРМНОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКИ

М. В. Горбатенко
РФЯЦ-ВНИИЭФ

Методом Эйнштейна-Инфельда-Гоффмана решается задача о движении двух тел, когда уравнения общей теории относительности имеют обобщенный вид – они приведены к виду, инвариантному относительно конформных преобразований. Доказано, что в определенной пространственно-временной области на движение тел могут оказывать влияние не только метрические степени свободы, но и производные от вектора A_α, появляющегося в обобщенных уравнениях. Этим влиянием может быть объяснено зафиксированное недавно аномальное ускорение космических аппаратов «Pioneer-10», «Pioneer-11». Воздействие вектора A_α на движение тел интерпретируется как следствие наличия у геометродинамической сплошной среды вязкости.

Введение

Анализ траекторий движения космических аппаратов (КА) «Pioneer-10», «Pioneer-11», проведенный в работах [1, 2], показал, что эти аппараты в диапазоне расстояний

$$R = (30 \div 100)\, AU = (0,45 \div 1,5)\cdot 10^{15} \text{ см} \tag{1}$$

подвержены действию аномальной компоненты ускорения, которая в литературе стала обозначаться a_P. По величине ускорение a_P равно

$$a_P = -(8,74 \pm 1,33)\cdot 10^{-8} \text{ см}/\text{с}^2. \tag{2}$$

Знак минус указывает на то, что ускорение a_P имеет направление, близкое к направлению в сторону Солнца.

С точки зрения последующего обсуждения вопроса об ускорении a_P представляется целесообразным сделать две оценки. Во-первых, сравнить величину (2) с ускорением a_N, получаемым КА от Солнца в ньютоновском приближении. Приняв массу Солнца, равной $M = 2\cdot 10^{33}$ г, гравитационную постоянную $G = 6,67\cdot 10^{-8}$ см^3/г$\cdot$с^2, получим для расстояния $R = 50\ AU = 7,5\cdot 10^{14}$ см

$$a_N = \frac{GM}{R^2} = \frac{\left(6,67\cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г}\cdot\text{с}^2\right)\left(2\cdot 10^{33} \text{ г}\right)}{5,625\cdot 10^{29} \text{ см}^2} = $$

$$= 2,37\cdot 10^{-4} \text{ см}/\text{с}^2. \tag{3}$$

Во-вторых, для системы Солнце+КА найти параметр малости λ, который по порядку величины равен отношению характерной скорости аппарата относительно Солнца к скорости света. Для использованного выше значения R получаем

$$\lambda \sim \sqrt{\frac{GM}{c^2 R}} = \sqrt{\frac{\left(6,67\cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г}\cdot\text{с}^2\right)\left(2\cdot 10^{33} \text{ г}\right)}{\left(3\cdot 10^{10} \text{ см}/\text{с}\right)^2\cdot 1,5\cdot 10^{15} \text{ см}}} \approx 10^{-5}. \tag{4}$$

Результаты приведенных оценок показывают, что величина a_P не предсказывается общей теорией относительности (ОТО) ни в ньютоновском, ни в пост-ньютоновском (ПН) приближениях. В самом деле, поправки к ускорению, получаемые по методу Эйнштейна-Инфельда-Гоффмана (ЭИГ), отличаются от ускорений a_N на величину $\sim\lambda^2$, а отношение $|a_P/a_N|$ близко к величине λ^1. Поправки к ускорению в ПН приближении спадают с расстоянием, а величина a_P не зависит от расстояния.

С точки зрения объяснения природы происхождения величины a_P, по нашему мнению, существенным является тот факт, что произведение Hc, где H – постоянная Хаббла, равно числу

$$Hc = 6,9\cdot 10^{-8}\ \text{см}/\text{с}^2, \tag{5}$$

которое по порядку величины близко к a_P (принято, что $H = 2,3\cdot 10^{-18}\ 1/\text{с}$), т. е.

$$a_P \approx -Hc. \tag{6}$$

Близость значений a_P и Hc была отмечена как в работе [1], так и во многих других работах. В связи с этим многими высказывалась гипотеза о том, что дополнительное ускорение a_P своим происхождением обязано космологическому разлету Вселенной. Однако приемлемой теоретической конструкции, реализующей эту гипотезу, предложено не было.

В данной работе делается попытка рассмотреть движение тел в системах типа Солнце+КА в рамках так называемой конформной геометродинамики (КГД). КГД представляет собой теоретическую схему, основанную на уравнениях, являющихся минимальным конформно-инвариантным обобщением уравнений Эйнштейна для пустого пространства. Уравнения КГД получены в [3] (без λ-члена) и в [4] (с λ-членом). Они имеют вид

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = -2A_\alpha A_\beta - g_{\alpha\beta}A^2 - 2g_{\alpha\beta}A^\nu{}_{;\nu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha} + \lambda g_{\alpha\beta}. \tag{7}$$

Здесь A_α, λ – векторное и скалярное поля, которые в рамках КГД являются неотъемлемыми атрибутами динамики риманова многообразия. Уравнения (7) сохраняют свой вид при преобразованиях

$$g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta}e^{2\sigma}, \quad A_\alpha \to A_\alpha - \sigma_{;\alpha}, \quad \lambda \to \lambda e^{-2\sigma}, \tag{8}$$

где σ – произвольная скалярная функция координат. Эти преобразования относятся к категории тех, которые осуществляют конформное отображение римановых пространств и называются конформными (см., например, [5]).

Для нахождения решений уравнений (7) необходимо фиксировать координатные условия и калибровку. В качестве координатных условий будут использоваться известные условия де Дондера, обобщенные таким образом, чтобы они приобрели вид, инвариантный относительно преобразований (8). Условия де Дондера в конформно инвариантной форме имеют вид

$$\frac{g_{\alpha\lambda}}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\ g^{\lambda\sigma}\right)_{,\sigma} + 2A_\sigma \frac{g_{\alpha\lambda}}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\ g^{\lambda\sigma}\right) = 0. \tag{9}$$

В качестве калибровочного условия в данной работе используется условие

$$\lambda = \lambda_0 = \text{const}. \tag{10}$$

При выполнении соотношения (10) вектор A_α автоматически удовлетворяет условию Лоренца

$$A^\sigma{}_{;\sigma} = 0. \tag{11}$$

Рассмотрение динамики движения тел в системе типа Солнце+КА позволяет, как будет показано в данной работе, конструктивным образом реализовать гипотезу о том, что дополнительное ускорение a_P естественным образом вытекает из уравнений КГД.

Уравнения и условия в используемой схеме ЭИГ

Будем решать задачу о нахождении уравнений поступательного движения двух точечных тел в низших порядках приближения по параметру $\lambda \sim v/c$, где v – характерная скорость относительного движения тел. Решать будем методом (ЭИГ) в форме, представленной в работах [8, 9]. При сопоставлении конкретных выражений данной работы с аналогичными выражениями в работах [8, 9] следует иметь в виду, что в данной работе используется сигнатура $(-+++)$, а в качестве координатного условия используется условие де Дондера в форме (9); остальные обозначения совпадают с теми, которые используются в работах [8, 9].

Будем предполагать, что величина λ вообще не оказывает влияния в наших приближениях на движение тел, и ее можно исключить из последующего рассмотрения[1].

В методе ЭИГ расстановка порядков малости величин $\gamma_{\alpha\beta}$, A_α, где

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\right), \quad h_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta},$$

$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\left[-1,1,1,1\right]$ – метрический тензор плоского фонового пространства, зависит от параметров тел (масс, скоростей) и расстояний между ними. Применительно к системе Солнце+КА на расстояниях (1) в данном рассмотрении принимается следующая расстановка порядков малости:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{00} &= \underset{2}{\gamma}_{00} + \underset{4}{\gamma}_{00} + \underset{5}{\gamma}_{00} + \ldots,\\
\gamma_{0k} &= \underset{3}{\gamma}_{0k} + \underset{4}{\gamma}_{0k} + \underset{5}{\gamma}_{0k} + \ldots,\\
\gamma_{mn} &= \underset{4}{\gamma}_{mn} + \underset{5}{\gamma}_{mn} + \underset{6}{\gamma}_{mn} + \ldots,\\
A_0 &= \underset{3}{A}_0 + \underset{4}{A}_0 + \ldots,\\
A_k &= \underset{4}{A}_k + \underset{5}{A}_k + \ldots.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Указанная расстановка порядков малости исключает, как будет следовать из последующего, влияние поля A_α на движение КА в ньютоновском приближении.

Уравнения (7) приводят к следующим уравнениям для величин $\gamma_{\alpha\beta}$ (выписываются только те уравнения, которые используются в последующем):

$$\left[00;\lambda^2\right] \Rightarrow \qquad -\frac{1}{2}\left(\Delta \underset{2}{\gamma}_{00}\right) = 0. \tag{13}$$

$$\left[0k;\lambda^3\right] \Rightarrow \qquad -\frac{1}{2}\left(\Delta \underset{3}{\gamma}_{0k}\right) + \frac{1}{2}\left(-\underset{2}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}} + \underset{3}{\gamma}_{0s,s}\right)_{,k} = 0; \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[mn;\lambda^4\right] \Rightarrow\\
&\frac{1}{2}\left\{\left(-\underset{3}{\gamma}_{0m,\underset{1}{0}n} + \underset{4}{\gamma}_{ms,sn}\right) + \left(-\underset{3}{\gamma}_{0n,\underset{1}{0}m} + \underset{4}{\gamma}_{ns,sm}\right) - \Delta \underset{4}{\gamma}_{mn} - \right.\\
&\qquad \left. - \delta_{mn}\left(\underset{2}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}\underset{1}{0}} - 2\underset{3}{\gamma}_{0s,\underset{1}{0}s} + \underset{4}{\gamma}_{pq,pq}\right)\right\} + \frac{1}{4}\underset{2}{\gamma}_{00}\underset{2}{\gamma}_{00,mn} +\\
&+\frac{1}{8}\underset{2}{\gamma}_{00,m}\underset{2}{\gamma}_{00,n} - \frac{1}{8}\delta_{mn}\underset{2}{\gamma}_{00}\left(\Delta\underset{2}{\gamma}_{00}\right) - \frac{3}{16}\delta_{mn}\underset{2}{\gamma}_{00,s}\underset{2}{\gamma}_{00,s} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left[0k;\lambda^4\right] \Rightarrow \qquad -\frac{1}{2}\left(\Delta \underset{4}{\gamma}_{0k}\right) + \frac{1}{2}\left(-\underset{3}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}} + \underset{4}{\gamma}_{0s,s}\right)_{,k} = \underset{4}{A}_{0,k}; \tag{16}$$

$$\left[00;\lambda^4\right] \Rightarrow \qquad -\frac{1}{2}\Delta\underset{4}{\gamma}_{00} + \frac{1}{2}\underset{4}{\gamma}_{pq,pq} + \frac{3}{16}\underset{2}{\gamma}_{00,s}\underset{2}{\gamma}_{00,s} + \frac{3}{8}\underset{2}{\gamma}_{00}\left(\Delta\underset{2}{\gamma}_{00}\right) = 0; \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left[mn;\lambda^5\right] \Rightarrow\\
&\frac{1}{2}\left\{\left(-\underset{4}{\gamma}_{0m,\underset{1}{0}n} + \underset{5}{\gamma}_{ms,sn}\right) + \left(-\underset{4}{\gamma}_{0n,\underset{1}{0}m} + \underset{5}{\gamma}_{ns,sm}\right) - \Delta\underset{5}{\gamma}_{mn} - \delta_{mn}\left(-2\underset{4}{\gamma}_{0s,\underset{1}{0}s} + \underset{5}{\gamma}_{pq,pq}\right)\right\} =\\
&\qquad\qquad = \underset{5}{A}_{m,n} + \underset{5}{A}_{n,m} - 2\delta_{mn}\left[-\underset{4}{A}_{0,0} + \underset{5}{A}_{l,l}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

---

[1] По этой причине в последующем не возникнет опасности перепутать функцию $\lambda(x)$ с параметром малости λ.

Координатные условия (9) имеют вид (в квадратных скобках $C.C.$ = Coordinate Condition):

$$\left[C.C.;0;\lambda^3\right] \Rightarrow \quad \underset{3}{\gamma}_{0l,l} = \underset{2}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}} + 2\underset{3}{A}_0; \tag{19}$$

$$\left[C.C.;k;\lambda^4\right] \Rightarrow \quad \underset{4}{\gamma}_{kl,l} = \underset{3}{\gamma}_{0k,\underset{1}{0}} - \frac{1}{4}\underset{2}{\gamma}_{00}\underset{2}{\gamma}_{00,k}; \tag{20}$$

$$\left[C.C.;0;\lambda^4\right] \Rightarrow \quad \underset{4}{\gamma}_{0l,l} = 2\underset{4}{A}_0; \tag{21}$$

$$\left[C.C.;0;\lambda^5\right] \Rightarrow \quad \underset{5}{\gamma}_{0l,l} = \underset{4}{\gamma}_{00,\underset{1}{0}} - \frac{1}{2}\underset{3}{\gamma}_{0p}\underset{2}{\gamma}_{00,p} - \frac{1}{4}\underset{2}{\gamma}_{00}\underset{2}{\gamma}_{00,0} + \frac{1}{2}\underset{2}{\gamma}_{00}\underset{3}{\gamma}_{0s,s} + 2\underset{5}{A}_0; \tag{22}$$

$$\left[C.C.;k;\lambda^5\right] \Rightarrow \quad \underset{4}{\gamma}_{0k,\underset{1}{0}} - \underset{5}{\gamma}_{kl,l} + 2\underset{5}{A}_k = 0. \tag{23}$$

Для последующего рассмотрения из всех условий (11) достаточно лишь калибровочных условий низших приближений (в квадратных скобках $G.C.$ = Gauge Condition):

$$\left[G.C.;\lambda^4\right] \Rightarrow \quad \underset{4}{A}_{l,l} = 0; \tag{24}$$

$$\left[G.C.;\lambda^5\right] \Rightarrow \quad -\underset{4}{A}_{0,0} + \underset{5}{A}_{l,l} = 0. \tag{25}$$

Из уравнений (7) следует, что функции $\underset{3}{A}_0, \underset{4}{A}_0, \underset{4}{A}_k, \underset{5}{A}_k$ должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\left[0;\lambda^3\right] \Rightarrow \quad -\Delta\underset{3}{A}_0 = 0; \tag{26}$$

$$\left[0;\lambda^4\right] \Rightarrow \quad -\Delta\underset{4}{A}_0 = 0; \tag{27}$$

$$\left[k;\lambda^4\right] \Rightarrow \quad -\Delta\underset{4}{A}_k = 0; \tag{28}$$

$$\left[k;\lambda^5\right] \Rightarrow \quad -\Delta\underset{5}{A}_k = 0. \tag{29}$$

Таким образом, функции $\underset{3}{A}_0, \underset{4}{A}_0, \underset{4}{A}_k, \underset{5}{A}_k$ должны быть гармоническими.

Центрально-симметричное статическое решение уравнений КГД

Центрально-симметричное статическое (ЦСС) решение уравнений КГД приведено в нескольких работах в различных формах (см. [6, 7]). Здесь ЦСС решение будет представлено в виде, удобном для сравнения с решением Шварцшильда.

В ЦСС задаче квадрат интервала имеет вид

$$ds^2 = -\exp(\gamma)dt^2 + \exp(\alpha)dz^2 + \exp(\beta)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

Калибровочный вектор может иметь в этом случае только две отличные от нуля и зависящие от радиальной координаты компоненты

$$A_\alpha = (\phi, f, 0, 0).$$

Воспользовавшись калибровочным преобразованием с функцией $\sigma = \sigma(z)$, зависящей от радиальной переменной, обращаем величину $A_1 = f$ в нуль. Затем делаем замену радиальной координаты таким образом, чтобы выполнялось условие $g_{00}g_{11} = -1$. В результате такого преобразования A_1-компонента поля A_α не появляется. После указанных двух преобразований без ограничения общности метрика может быть записана в виде

$$ds^2 = -\exp(\gamma)dt^2 + \exp(-\gamma)dz^2 + \exp(\beta)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right),$$

а вектор A_α – в виде

$$A_\alpha = (\phi, 0, 0, 0).$$

Для четырех функций $\gamma, \beta, \phi, \lambda$ получаются четыре уравнения.

Уравнение $G_0^0 = T_0^0 \Rightarrow$

$$\exp(\gamma)\left[\beta''+\tfrac{3}{4}(\beta')^2+\tfrac{1}{2}\gamma'\beta'\right]-\exp(-\beta)=3\exp(-\gamma)\phi^2+\lambda\,.$$

Уравнение $G_1^1 = T_1^1 \Rightarrow$

$$\exp(\gamma)\left[\tfrac{1}{4}(\beta')^2+\tfrac{1}{2}\gamma'\beta'\right]-\exp(-\beta)=\exp(-\gamma)\phi^2+\lambda\,.$$

Уравнение $G_2^2 = T_2^2 \Rightarrow$

$$\exp(\gamma)\left[\tfrac{1}{2}\beta''+\tfrac{1}{4}(\beta')^2+\tfrac{1}{2}\gamma''+\tfrac{1}{2}(\gamma')^2+\tfrac{1}{2}\beta'\gamma'\right]=\exp(-\gamma)\phi^2+\lambda\,.$$

Уравнение $G_0^1 = T_0^1 \Rightarrow$

$$0=\phi'-\gamma'\phi\,.$$

Оказывается, существуют три типа решений. Для нас представляет интерес тот тип, который содержит в качестве частного случая решение Шварцшильда. Приведем этот тип решения, опустив саму процедуру его нахождения

$$\left.\begin{aligned}
&\phi = p_0\exp(\gamma);\\
&\exp(\beta)=A_0\mathrm{sh}^2(p_0z+a_0);\\
&\exp(\gamma)=\frac{1}{p_0^2A_0}+B_0\left[p_0z\,\mathrm{cth}(p_0z+a_0)-1\right]+b_0p_0\,\mathrm{cth}(p_0z+a_0);\\
&\lambda(z)=B_0p_0^2.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Величины, помеченные нулем, являются константами интегрирования.

Решение типа (30) при подходящем выборе констант может в определенном диапазоне радиальной переменной сколь-угодно близко аппроксимировать решение Шварцшильда. Для получения аппроксимации необходимо в (30) положить

$$B_0=0,\quad a_0=0,\quad A_0p_0^2=1\,. \tag{31}$$

Тогда для e^γ получим:

$$e^\gamma=1+b_0p_0\cdot\mathrm{cth}\left(p_0z\right). \tag{32}$$

Запишем ЦСС решение, введя обозначения $b_0\equiv -r_0$, $p_0\equiv 1/L$

$$e^\gamma=1-\frac{r_0}{L}\,\mathrm{cth}\left(\frac{z}{L}\right);\quad e^\beta=L^2\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{z}{L}\right); \tag{33}$$

$$\phi=\frac{1}{L}\left[1-\frac{r_0}{L}\mathrm{cth}\left(\frac{z}{L}\right)\right]. \tag{34}$$

Выражения (33), (34) в области радиальной переменной

$$\left(r_0/L\right)<\left(z/L\right)\ll 1 \tag{35}$$

принимают следующий вид:

$$e^\gamma=1-\frac{r_0}{z};\qquad e^\beta=z^2\,; \tag{36}$$

$$\phi=\frac{1}{L}\left[1-\frac{r_0}{z}\right]. \tag{37}$$

Выражения (36) совпадают с соответствующими выражениями в решении Шварцшильда. При этом r_0 имеет смысл гравитационного радиуса. Что касается (37), то аналог этого выражения в решении Шварцшильда отсутствует. В выражениях (36), (37) существенными представляются два обстоятельства. Во-первых, то, что в области радиальной переменной (35) решение уравнений КГД требует для своего описания не только размерной константы r_0, но и еще одной размерной константы L. Во-вторых, в указанной области радиальной переменной главным членом в разложении функции ϕ является константа $1/L$.

Нахождение функций $\gamma_{\alpha\beta}$, A_α методом ЭИГ

Нам удобно сначала найти уравнения поступательного движения двух частиц в предположении, что массы частиц сопоставимы по величине. То есть получить результаты, аналогичные полученным в [8, 9], но не для уравнений ОТО, а для уравнений (7). Затем из найденных уравнений движения нетрудно будет получить и уравнения движения для системы, в которой одна из частиц является пробной.

Общий подход к решению нашей задачи состоит в том, что компоненты $\gamma_{\alpha\beta}$ мы представим в виде $\gamma_{\alpha\beta} = \overline{\gamma}_{\alpha\beta} + \delta\gamma_{\alpha\beta}$. Здесь $\overline{\gamma}_{\alpha\beta}$ – выражения, которые получаются в рамках ОТО для двух точечных частиц с массами M, m без учета дополнительных членов от A_α. С другой стороны, $\delta\gamma_{\alpha\beta}$ является добавкой, целиком определяемой величиной A_α.

Структура всех величин $\gamma_{\alpha\beta}$, A_α практически предопределяется в рассматриваемой схеме выражениями для величин γ_{00} и A_0 в низших порядках малости. В нашем случае выражения для $\underset{2}{\gamma}_{00}$, $\underset{3}{\gamma}_{00}$ должны совпадать с выражениями

$$\underset{2}{\gamma}_{00} = 4\frac{M}{r_1} + 4\frac{m}{r_2}; \qquad \underset{3}{\gamma}_{00} = 0, \tag{38}$$

т. е. с теми выражениями, которые в случае ОТО приводят к известным уравнениям поступательного движения в ПН приближении.

Что касается величины A_0, то определенные соображения по ее выбору следуют из приближенных выражений (36), (37) для точного ЦСС решения уравнений КГД. Ясно, что разложение A_0 должно начинаться с константы $1/L$, где L – размерный параметр, с помощью которого определяется асимптотика A_0 на больших расстояниях. При рассмотрении многочастичных задач разложение точного одночастичного решения не позволяет выявить наличие членов, содержащих скорости частиц. Появление членов такого типа нельзя исключить и в выражении для A_0, если рассматривается система с числом частиц, не менее двух. Заметим, что аналогичная ситуация возникает, например, при попытке найти решение Керра методом ЭИГ [9] или при попытке получить силу радиационного трения в уравнении Дирака-Лоренца этим методом [10].

Исходя из изложенных соображений, запишем выражение для A_0, которое можно было бы составить из величин, имеющихся в задаче. Искомое выражение:

– должно начинаться с константы $1/L$;
– в следующем порядке малости может содержать скорости частиц $\dot{\xi}_k$, $\dot{\eta}_k$;
– должно представлять собой, согласно выражениям (26), (27), гармоническую функцию;
– если содержит часть, зависящую от координат, то эта часть должна быть спадающей при удалении от системы;
– должно быть симметричным относительно замены параметров одной частицы на параметры другой.

Оказывается, все эти требования удовлетворяются, если представить A_0 в виде

$$A_0 = \underset{3}{A}_0 + \underset{4}{A}_0 = \frac{1}{L} + \kappa\frac{\mu R^2}{(m+M)L}\left\{\frac{\left(X_l\dot{\xi}_l\right)}{r_1^3} + \frac{\left((x_l-\eta_l)\dot{\eta}_l\right)}{r_2^3}\right\} \tag{39}$$

и предположить, что величина R/L имеет третий порядок малости. Здесь κ – постоянный числовой множитель, $\mu = mM/(m+M)$ – приведенная масса системы двух частиц. В данном рассмотрении предполагается, что множитель $\mu/(m+M)$ приблизительно равен единице. Необходимость введения κ в конструкцию A_0 обусловлена присущей методу ЭИГ неоднозначностью при построении с его помощью аппроксимаций точного решения (подробнее см. [9, 10]). Соображения по выбору значения константы κ будут приведены позднее.

Величину A_k находим из условий калибровки (24), (25). Из уравнения (28) и условия (24) следует, что $\underset{4}{A}_k = 0$. Запишем выражение для A_k в окрестности только первой частицы; при этом воспользуемся уравнением движения частицы в ньютоновском приближении

$$A_k = \underset{4}{A}_k + \underset{5}{A}_k = \kappa\frac{\mu}{(m+M)L}\left\{-\frac{mR_k}{Rr_1} - 2\frac{\left(R_l\dot{R}_l\right)\dot{\xi}_k}{r_1} - \frac{R^2\left(X_l\dot{\xi}_l\right)\dot{\xi}_k}{r_1^3}\right\} + \left(1 \rightleftarrows 2\right). \tag{40}$$

Здесь и далее член с двумя стрелками $\left(1 \rightleftarrows 2\right)$ означает выражение, получаемое из написанного заменой параметров одной частицы на параметры другой.

Подстановка выражения (39) для A_0 в уравнения (14), (16) с учетом (19), (21) позволяет найти выражение для $\delta\gamma_{0k}$ в следующем виде:

$$\delta\gamma_{0k} = \underset{3}{\delta\gamma}_{0k} + \underset{4}{\delta\gamma}_{0k} = \frac{2X_k}{3L} - \kappa\frac{\mu R^2}{(m+M)L}\frac{\dot{\xi}_k}{r_1} + \left(1 \rightleftarrows 2\right). \tag{41}$$

Найденных выражений (39), (40), (41) достаточно для того, чтобы установить вид поправки к ньютоновскому уравнению движения частиц. Эти поправки получаются путем интегрирования уравнения (18) по сферам бесконечно малого радиуса, окружающим точечные частицы. Получим поправку к уравнениям движения для первой частицы.

Запишем уравнение (18), перенеся все члены в левую часть

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left\{\left(-\underset{4}{\gamma}_{0m,0\underset{1}{}n} + \underset{5}{\gamma}_{ms,sn}\right) + \left(-\underset{4}{\gamma}_{0n,0\underset{1}{}m} + \underset{5}{\gamma}_{ns,sm}\right) - \Delta\underset{5}{\gamma}_{mn} - \delta_{mn}\left(-2\underset{4}{\gamma}_{0s,0\underset{1}{}s} + \underset{5}{\gamma}_{pq,pq}\right)\right\} \\ -\underset{5}{A}_{m,n} - \underset{5}{A}_{n,m} + 2\delta_{mn}\left[-\underset{4}{A}_{0,0} + \underset{5}{A}_{l,l}\right] = 0.\end{gathered} \tag{42}$$

При интегрировании этого уравнения совокупный вклад от членов, содержащих вторые производные от компонент $\underset{5}{\delta\gamma}_{mn}$, равен нулю, поскольку они образуют роторные комбинации. По той же причине равен нулю вклад от следующей комбинации:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\delta_{mn}\underset{4}{\gamma}_{0s,0\underset{1}{}s} - \underset{4}{\gamma}_{0n,0\underset{1}{}m}\right)\right\}.$$

Вклад от

$$+2\delta_{mn}\left(-\underset{4}{A}_{0,0} + \underset{5}{A}_{l,l}\right)$$

равен нулю в силу калибровочного условия. В результате для нахождения поправки к уравнению движения необходимо вычислить вклад от следующих членов:

$$-\frac{1}{2}\underset{4}{\gamma}_{0m,0\underset{1}{}n} + \frac{1}{2}\delta_{mn}\underset{4}{\gamma}_{0s,0\underset{1}{}s} - \underset{5}{A}_{m,n} - \underset{5}{A}_{n,m}.$$

Причем эта поправка войдет в уравнение движения

$$2M\ddot{\xi}_k = \frac{mM}{R^3}R_k + \Im_k \tag{43}$$

в виде добавки $\Im_k$, равной

$$\Im_k = \frac{1}{4\pi}\oint\left\{-\frac{1}{2}\underset{4}{\gamma}_{0k,0\underset{1}{}n} + \frac{1}{2}\delta_{kn}\underset{4}{\gamma}_{0s,0\underset{1}{}s} - \underset{5}{A}_{k,n} - \underset{5}{A}_{n,k}\right\}ds_n. \tag{44}$$

Вклады отдельных слагаемых в поверхностный интеграл (44) равны:

$$\frac{1}{4\pi}\oint\left\{-\frac{1}{2}\underset{4}{\gamma}_{0k,0\underset{1}{}n}\right\}ds_n = -\kappa\frac{\mu}{2(m+M)L}\left(\frac{mR_k}{R} + 2\left(R_l\dot{R}_l\right)\dot{\xi}_k\right); \tag{45}$$

$$\frac{1}{4\pi}\oint\left\{\frac{1}{2}\delta_{kn}\underset{4}{\gamma}_{0s,0\underset{1}{}s}\right\}ds_n = \frac{1}{4\pi}\oint\left\{\delta_{kn}\underset{4}{A}_{0,0}\right\}ds_n = \kappa\frac{\mu}{2(m+M)L}\cdot\left(\frac{mR_k}{3R} + \frac{2}{3}\left(R_l\dot{R}_l\right)\dot{\xi}_k\right); \tag{46}$$

$$\frac{1}{4\pi}\oint\left\{-\underset{5}{A}_{k,n} - \underset{5}{A}_{n,k}\right\}ds_n = \kappa\left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{M}{L}\cdot\frac{R_k}{R} - \frac{8}{3}\frac{M}{mL}\left(R_l\dot{R}_l\right)\dot{\xi}_k\right) = -\kappa\frac{\mu}{(m+M)L}\left(-\frac{4}{3}\frac{mR_k}{R} + \frac{8}{3}\left(R_l\dot{R}_l\right)\dot{\xi}_k\right). \tag{47}$$

Подстановка выражений (45–47) в (44) дает

$$\Im_k = \kappa\frac{\mu}{(m+M)L}\frac{mR_k}{R} + 2\kappa\frac{\mu}{(m+M)L}\left(R_l\dot{R}_l\right)\dot{\xi}_k. \tag{48}$$

В результате из (43), (44), (48) получаем следующую поправку к ускорению $\delta\ddot{\xi}_k$:

$$\delta\ddot{\xi}_k = \kappa\frac{\mu m}{2(m+M)M}\frac{R_k}{LR} + \kappa\frac{\mu}{(m+M)ML}\left(R_l\dot{R}_l\right)\dot{\xi}_k. \tag{49}$$

В терминах производных по обычному времени и масс в обычных единицах измерения уравнение (49) записывается в виде

$$\frac{d^2\delta\xi_k}{dt^2}=\kappa\frac{\mu m}{2(m+M)M}\frac{c^2R_k}{LR}+\kappa\frac{\mu c^2}{(m+M)MLG}\left(R_l\frac{dR_l}{dt}\right)\frac{d\xi_k}{dt}\ . \tag{50}$$

Предположим, что константа L имеет космологическое происхождение и связана с постоянной Хаббла H соотношением

$$L=c/H\ . \tag{51}$$

Подставив (51) в (50), получим

$$\frac{d^2\delta\xi_k}{dt^2}=\frac{\kappa\mu m}{2(m+M)M}cH\frac{R_k}{R}+\frac{\kappa\mu}{(m+M)MG}cH\left(R_l\frac{dR_l}{dt}\right)\frac{d\xi_k}{dt}\ . \tag{52}$$

Выражение (52) и является поправкой к ньютоновскому выражению для ускорения, которая следует из уравнений КГД при тех предположениях, которые оговорены в начале раздела.

Уравнения движения КА «Pioneer-10, 11»

Запишем уравнения (52) в частном случае, когда масса первой частицы намного меньше массы второй частицы, т. е. когда первую частицу можно рассматривать как пробную. В этом случае

$$\frac{d^2\delta\xi_k}{dt^2}=\frac{\kappa}{2}cH\frac{R_k}{R}-\frac{\kappa}{mG}cH\left(R_l\frac{d\xi_l}{dt}\right)\frac{d\xi_k}{dt}\ . \tag{53}$$

Интересно заметить, что первое слагаемое в правой части (53) вообще не зависит ни от масс тел, ни от расстояния между ними.

Из (53) следует, что при движении пробной частицы по окружности поправка от второго слагаемого в правой части (53) равна нулю, поправка к ньютоновскому выражению для ускорения определяется первым слагаемым

$$\frac{d^2\delta\xi_k}{dt^2}=\frac{\kappa}{2}cH\frac{R_k}{R}\ . \tag{54}$$

Рассмотрим движение пробной частицы по радиусу. Будем опускать индекс “1” при написании радиальных значений векторов. В этом случае для радиальной компоненты ускорения из (53) получаем

$$\frac{d^2\delta\xi}{dt^2}=\frac{\kappa}{2}cH-\frac{\kappa}{mG}cHR\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{d\xi}{dt}\right). \tag{55}$$

Квадрат радиальной скорости запишем, воспользовавшись законом сохранения энергии, т. е. как

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{d\xi}{dt}\right)=\frac{2E_0}{M}+\frac{2Gm}{R}\ .$$

Получаем

$$\frac{d^2\delta\xi}{dt^2}=\frac{\kappa}{2}cH-\frac{\kappa}{mG}cHR\left(\frac{2E_0}{M}+\frac{2Gm}{R}\right)=-\frac{3\kappa}{2}cH-\frac{2\kappa RE_0}{mMG}cH. \tag{56}$$

Рассматриваем КА как пробные частицы. Полная энергия E_0 КА, покидающего пределы системы с минимальной кинетической энергией, близка к нулю. Положив в выражении (56) $E_0=0$, получим

$$\frac{d^2\delta\xi}{dt^2}=-\kappa\frac{3}{2}cH\ . \tag{57}$$

Для согласования формулы (57) с формулой (6) необходимо предположить, что коэффициент κ близок к единице. Точнее:

$$\left.\begin{aligned}&\text{если}\quad \kappa=\frac{2}{3},\quad \text{то}\quad \frac{d^2\delta\xi}{dt^2}=-cH;\\ &\text{если}\quad \kappa=1,\quad \text{то}\quad \frac{d^2\delta\xi}{dt^2}=-\frac{3}{2}cH\end{aligned}\right\}. \tag{58}$$

Мы приходим к заключению о том, что подбором одного постоянного множителя КГД позволяет описать наблюдаемую аномальную компоненту ускорения КА «Pioneer-10, 11». Имеющиеся экспериментальные данные по КА «Pioneer-10, 11» могут быть описаны формулой (57) со значением κ в диапазоне от $\kappa=2/3$ до $\kappa=1$.

Заключение

При удалении КА от Солнца по радиусу из формул (57), (58) следует, что

1) дополнительное ускорение направлено противоположно направлению движения КА и постоянно по модулю;

2) до тех пор, пока КА можно рассматривать как пробное тело, ускорение не зависит от характеристик КА и носит универсальный характер.

Следует подчеркнуть, что все рассмотрение справедливо только в том случае, если выполнены сделанные в начале предположения. Перечислим их в явном виде.

Во-первых, динамика пространства-времени описывается обобщенными уравнениями ОТО – уравнениями конформной геометродинамики (7).

Во-вторых, главный член в разложении A_0 представляет собой в рассматриваемой области пространства-времени константу, а следующий член – величину 4-го порядка малости. Это нетривиальные предположения, поскольку в конструкцию величины A_0 вводится таким образом величина космологического происхождения $L = c / H$, с помощью которой определяются асимптотические выражения для компонент вектора A_α, удовлетворяющих уравнениям (7). В ОТО отсутствует вектор A_α и поэтому ввести в ней величину L естественным образом не представляется возможным.

В областях пространства-времени, в которых не выполняются приведенные два предположения, выражение (39) для A_0 может, во-первых, иметь более высокий порядок малости, во-вторых, в конструкции A_0 главными могут стать члены другого типа (например, полюсные).

Полученное выражение (53) для дополнительного ускорения пробного тела допускает прямую экспериментальную проверку. Так, оно предсказывает:

– универсальный характер дополнительного ускорения для всех тел, движущихся по круговой орбите (остается только первое слагаемое в правой части (53));

– возможность изменения направления ускорения при движении по радиусу (при удалении – по направлению к Солнцу, при приближении – по направлению от Солнца).

В заключение заметим, что в уравнениях (52), (53) дополнительное ускорение обязано своим появлением либо членам, содержащим производные от компонент вектора A_α, либо членам, обращающимся в нуль при исчезновении производных такого типа. Термодинамический анализ, проведенный, в частности, в работе [7], показал, что эти члены определяют тензор вязких напряжений геометродинамической сплошной среды. Поэтому мы делаем вывод, что дополнительное ускорение по своему происхождению обязано вязкости геометродинамической сплошной среды.

Возникновение аномальной компоненты (если оно не будет объяснено влиянием негравитационных факторов) поднимает ряд принципиальных вопросов. Например, применительно к ОТО это вопрос о степени выполнимости закона сохранения энергии и влиянии космологического разлета на эксперименты в пределах Солнечной системы.

В будущем могут быть предприняты эксперименты с КА, имеющие цель получить ответы на фундаментальные вопросы теории пространства-времени. Не исключено, что результаты данной работы могут оказаться полезными при разработке программ исследований в таких экспериментах.

Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра (Проект МНТЦ #1655).

Список литературы

1. Anderson J. D., Laing P. A., Lau E. L., Liu A. S., Nieto M. M., Turyshev S. G.// Phys. Rev. 2002. Vol. D. 65. 082004/1-50. [arXiv:gr-qc/0104064].

2. Slava G. Turyshev, Michael Martin Nieto, John D. Anderson. [arXiv:gr-qc/0503021].

3. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теор. и прикл. физика. 1984. Вып. 2/2. С. 40.

4. Романов Ю. А. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теор. и прикл. физика. 1996. Вып. 3. С. 55.

5. Петров А. З. // Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.

6. Gorbatenko M. V., Pushkin A. V., Schmidt H.-J.// General Relativity and Gravitation. 2002. Vol. 34, No 1. P. 9.

7. Gorbatenko M. V.// General Relativity and Gravitation. 2005. Vol. 37, No 1. P. 81.

8. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B.// Ann. Math. 1938. Vol. 39. P. 65.

9. Einstein A., Infeld L.// Can. J. Math. 1949. Vol. 1. P. 209.

10. Gorbatenko M. V., Gorbatenko T. M.// Theor. and Math. Physics. 2004. Vol. 140. No 1. P. 1028.

11. Gorbatenko M. V.// Theor. and Math. Physics. 2005. Vol. 142, No 1. P. 138.

Статья поступила в редакцию 05.04.2006.