

СТАТИСТИКА ЦАЛЛИСА И СКОРОСТИ ТЕРМОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

А. И. Артемов, А. Ю. Мадянов, С. А. Холин
РФЯЦ-ВНИИЭФ

Проанализировано влияние замены функции распределения Максвелла на функцию распределения Цаллиса при вычислении скорости термоядерных реакций (DD и TD) для различных значений параметра Цаллиса.

В 1988 г. Цаллис [1] предложил новое обобщенное определение энтропии, зависящее от параметра Цаллиса q и переходящее при $q \rightarrow 1$ в обычную энтропию Больцмана. При $q \rightarrow 1$ статистика Цаллиса переходит в статистику Максвелла.

Когда в статистической физике рассматривается давление газа на стенку сосуда, то давление есть результат большого числа столкновений молекул со стенкой сосуда. При описании упругого столкновения двух частиц влиянием остальных частиц пренебрегают и используют функцию распределения Максвелла для анализа последствий столкновений. Параметр Цаллиса q в функции распределения учитывает воздействие соседних частиц на поведение сталкивающихся частиц. Если имеет место «трение», потеря энергии при столкновении, то это значит $q < 1$. Если, наоборот, из-за каких-то корреляций энергия увеличивается, то $q > 1$.

Например, в работе [2] использование статистики Цаллиса с $q = 0,99$ уменьшает число реакций в центре Солнца (плотность 150 г/см^3 , температура $1,3 \text{ кэВ}$), приводящих к образованию нейтрино. Это позволяет объяснить уменьшение в 3 раза количества солнечных нейтрино при их регистрации на современных подземных устройствах по сравнению с предсказанием стандартной солнечной модели. В работе [3] переход от статистики Максвелла к статистике Цаллиса с $q = 1,1$ позволяет значительно увеличить скорость pD – реакции в центре Юпитера и объяснить выход энергии через поверхность Юпитера горением дейтерия вблизи центра Юпитера.

В работах [4] приведен анализ особенностей статистики Цаллиса с $q > 1$. Показано, что функция распределения по импульсам адронов, рождающихся при электрон-позитронных столкновениях с энергией $\sim 10 \text{ ГэВ}$, соответствует функции распределения Цаллиса с $q = 1,3$.

В статье обсуждается влияние замены функции распределения Максвелла на функцию распределения Цаллиса с $0,9 \leq q \leq 1,1$ на скорости термоядерных реакций DD и DT .

1. Неэкстенсивная статистическая механика

В 1988 г. Цаллис предложил новое определение энтропии, зависящее от параметра Цаллиса и переходящее при $q \rightarrow 1$ в обычную энтропию Больцмана

$$S_q(p) = -\frac{k}{q-1} \left(\sum_i p_i^q - 1 \right), \quad (1.1)$$

где k – постоянная Больцмана; p_i – вероятность того, что система находится в i -состоянии, а q – параметр Цаллиса, отклонение которого от 1 характеризует неэкстенсивность системы.

$$\text{При } q \rightarrow 1 \quad S_q(p) \rightarrow -k \sum_i p_i \ln(p_i).$$

$S_q(p)$ имеет почти все свойства, характерные для обычной энтропии $S(p)$, за исключением аддитивности. Предположим, что систему можно разбить на две самостоятельные подсистемы A и B с распределением вероятностей p_j^a и p_j^b . Полная система описывается факторизованным распределением вероятностей $p_{ij} = p_j^a p_j^b$. Тогда можно показать, что энтропия Цаллиса (1) не будет удовлетворять требованию аддитивности

$$S_q(A \cup B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{1}{k}(1-q)S_q(A)S_q(B). \quad (1.2)$$

Система неэкстенсивна, т. е. неаддитивна, пока $q \rightarrow 1$.

Используя новое определение энтропии, можно получить функцию распределения Цаллиса $\left(\beta = \frac{1}{kT} \right)$

$$f_q(\varepsilon_i, kT) = \frac{\left(1 + (1-q) \frac{\varepsilon_i}{kT} \right)^{\frac{1}{1-q}}}{z_q(kT)}; \quad (1.3)$$

$$z_q(kT) = \sum_i \left(1 + (1-q) \frac{\varepsilon_i}{kT} \right)^{\frac{1}{1-q}}, \quad (1.4)$$

где N – число состояний; ε_i – энергия i – состояния; T – температура.

Переход от обычной статистики (Максвелла, Ферми–Дирака, Бозе–Эйнштейна) к статистике Цаллиса

осуществляется заменой экспоненты $\frac{E}{kT}$

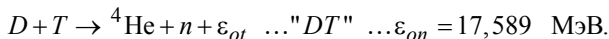
$$\frac{E}{kT} \rightarrow \left(1 + (1-q) \frac{E}{kT}\right)^{\frac{1}{1-q}} \Phi \left(1 - (1-q) \frac{E}{kT}\right), \quad (1.5)$$

где $\Phi(y)$ – функция Хевисайда. Очевидно,

$$\lim_{q \rightarrow 1} \left(1 + (1-q) \frac{E}{kT}\right)^{\frac{1}{1-q}} = \frac{E}{kT}. \quad (1.6)$$

2. Скорости термоядерных реакций

В устройствах магнитного удержания плазмы (токамак), инерционного термоядерного синтеза (ЛТС, ИТС) и т. д. протекают следующие основные термоядерные реакции:



В литературе имеется несколько рабочих формул для вычисления скоростей этих реакций $DD(p)$, $DD(n)$ и DT : Б. Н. Козлов [5, 1962 г.]; Л. М. Хивли [6, 1977 г.]. В справочнике С. Ангул и др. [7, 1999 г.], подготовленном группой ученых, приведены сечения термоядерных реакций. Используя их и максвелловскую функцию распределения, можно вычислить скорости реакции [8, 9].

Кроме того, скорости реакций можно получить с помощью функции распределения при усреднении сечений с астрофизическим фактором, взятым из программы PRSABA МАГАТЭ. Например, для DT -реакции S -фактор (в МэВ·барн) в программе PRSABA МАГАТЭ выглядит так:

$$S(x) := 10^{-3} \exp \left[\begin{array}{l} 9,2ifx < 0,001 \\ 16,756 + 3,6743 \ln(x) + .6127 \ln(x)^2 + 3,3772 \cdot 10^{-2} \ln(x)^3 \text{ if } (x \geq 0,002) \wedge (x \leq 0,02) \\ 14,546 + 1,9786 \ln(x) + .179 \ln(x)^2 + 3,1935 \cdot 10^{-3} \ln(x)^3 \text{ if } (x > 0,02) \wedge (x \leq 0,04) \\ -540,39 - 520,45 \ln(x) - 163,7636 \ln(x)^2 - 17,152 \ln(x)^3 \text{ if } (x > 0,041) \wedge (x \leq 0,048) \\ -7,9447 - 13,778 \ln(x) - 3,247 \ln(x)^2 - .2238 \ln(x)^3 \text{ if } (x > 0,048) \wedge (x \leq 0,096) \\ 42,59 + 51,02 \ln(x) + 24,45 \ln(x)^2 + 3,72 \ln(x)^3 \text{ if } (x > 0,096) \wedge (x \leq 0,119) \\ 6,045 - .488 \ln(x) + .25 \ln(x)^2 - 6,77 \cdot 10^{-2} \ln(x)^3 \text{ if } (x > 0,119) \wedge (x \leq 0,947) \\ 6,045 - .486 \ln(x) + .29 \ln(x)^2 + 18 \ln(x)^3 \text{ if } (x > 0,947) \wedge (x \leq 3,488) \\ 7,47 - 1,88 \ln(x) + .88 \ln(x)^2 - .129 \ln(x)^3 \text{ if } (x > 3,488) \wedge (x \leq 11,393) \\ 14,6 - 10,67 \ln(x) + 4,49 \ln(x)^2 - .62 \ln(x)^3 \text{ if } x > 11,393 \end{array} \right],$$

где x – энергия, МэВ.

3. Сравнение известных скоростей термоядерных реакций

Так как зависимость скоростей реакций $DD(n)$ от энергии слабо отличается от зависимости для $DD(p)$, то графики для $DD(p)$ не приводятся. Сравнение скоростей реакций осуществляется вычислением зависимости от времени отношения сравниваемых скоростей. Некоторые характерные зависимости приведены на рис. 1, 2, 3.

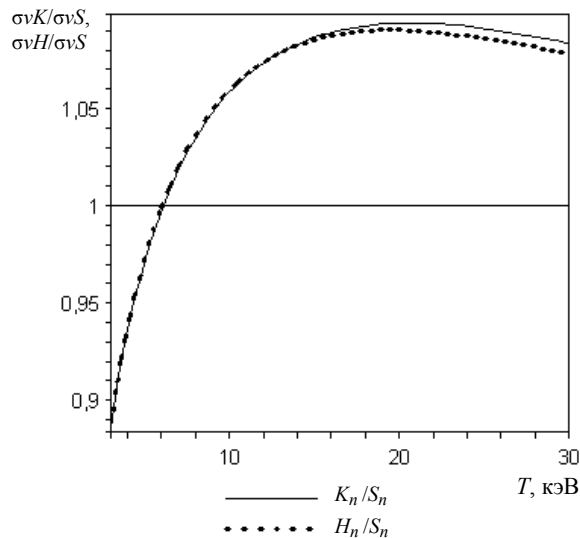


Рис. 1. Отношение скоростей $DD(n)$ реакций по Б. Н. Козлову ([5], 1962 г., K_n) и справочнику ([7], 1999 г., S_n); по Л. М. Хивли ([6], 1977 г., H_n) и справочнику ([7], 1999 г., S_n) при $T = 3 \div 30$ кэВ

1) На рис. 1 сравниваются скорости $DD(n)$ реакций, приведенные Б. Н. Козловым, Л. М. Хивли и в справочнике 1999 г. Ниже 7 кэВ формулы Козлова занижают сечения реакций до 25 %, выше – завышают до 10 %.

2) На рис. 2 сравниваются скорости DT -реакций Хивли (1977 г.) и справочника 1999 г. Здесь также Хивли занижает скорости реакции при $T < 28$ кэВ и завышает при других температурах, хотя масштабы невелики (< 10 %).

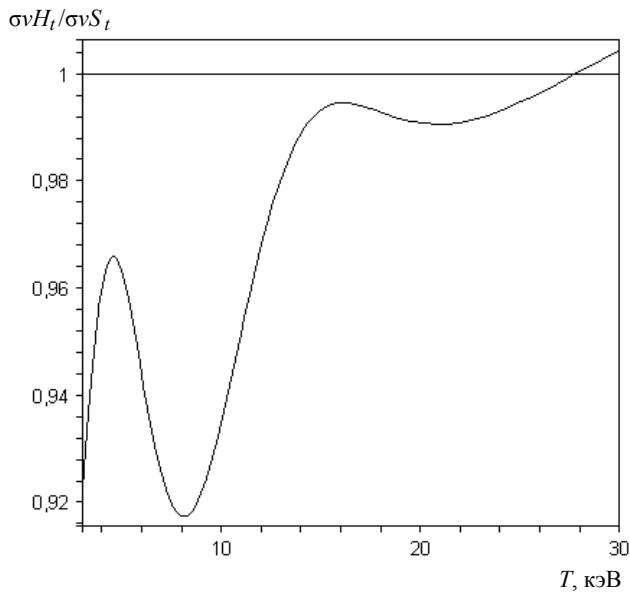


Рис. 2. Отношение скоростей DT -реакций по Л. М. Хивли ([8], 1977 г.) и справочнику ([9], 1999 г.) при $T = 3\text{--}30$ кэВ

3) На рис. 3 сравниваются скорости реакций $DD(n)$ и DT , получаемые усреднением сечений по максвелловскому распределению с астрофизическим фактором МАГАТЭ и скорости реакций в справочнике 1999 г.

При $T < 13$ кэВ скорости $DD(n)$ реакций в справочнике выше, при $T > 13$ кэВ – ниже, чем по Максвеллу с константами МАГАТЭ. Скорости DT -реакций не отличаются больше чем на 7 %.

Проведенное сравнение показывает, что все известные выражения для скоростей термоядерных реакций близки между собой в интервале энергий от 1 до 30 кэВ, наиболее существенном для термоядерного синтеза.

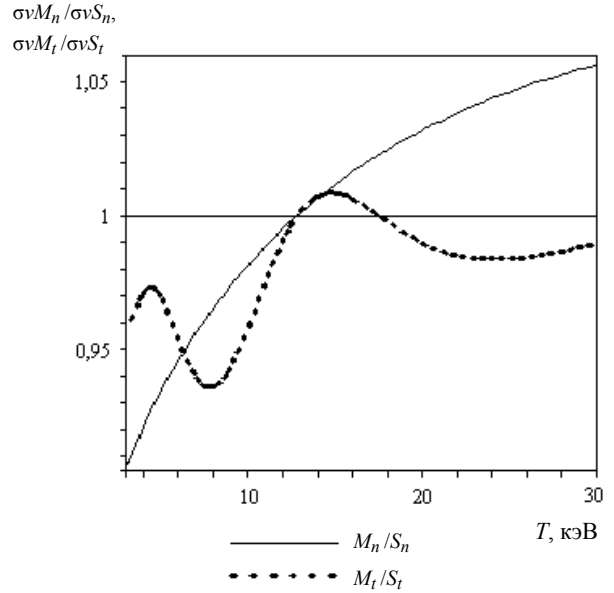


Рис. 3. Отношение скоростей $DD(n)$ и DT -реакций, усредненных по Максвеллу с астрофизическим фактором МАГАТЭ (M_n и M_t) и справочнику ([9], 1999 г., S_n и S_t) при $T = 3\text{--}30$ кэВ

Переход к статистике Цаллиса может значительно изменить скорости термоядерных реакций.

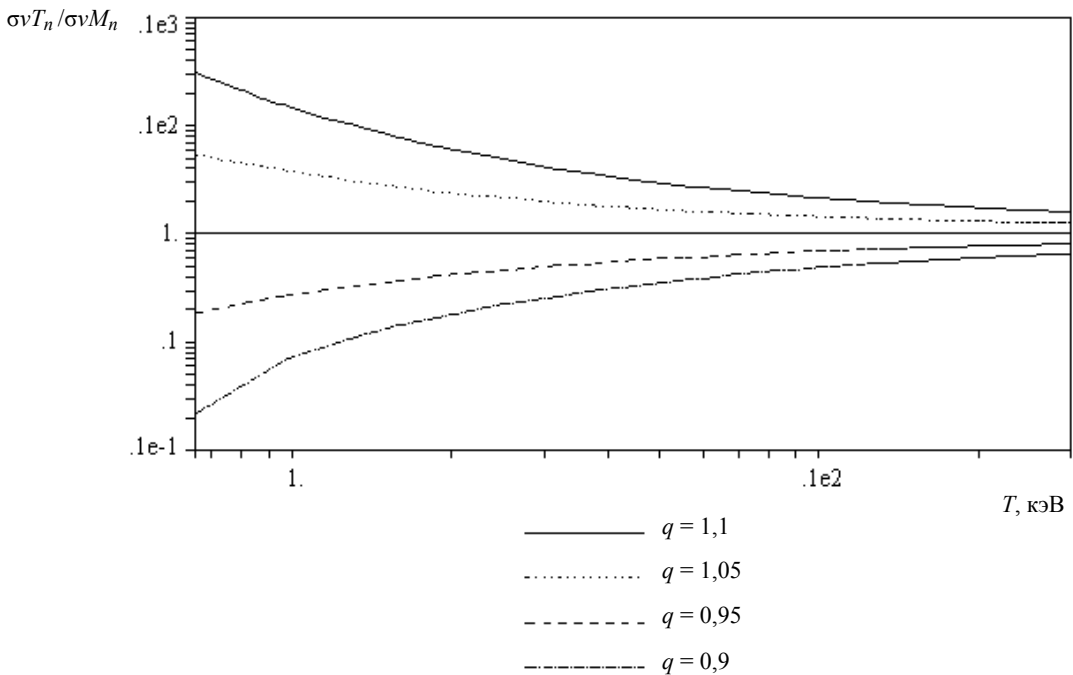


Рис. 4. Зависимость от температуры (0,6–30 кэВ) отношения скоростей $DD(n)$ реакции, усредненных по распределениям Цаллиса и Максвелла для $q = 1,1; 1,05; 0,95; 0,9$

4. Влияние параметра Цаллиса на скорости термоядерных реакций

В литературе нет правил, как определить величину параметра Цаллиса. Обычно решается обратная задача: подбирают такое значение параметра Цаллиса q , которое при использовании статистики Цаллиса позволяет описать эксперимент. Ниже проанализирован наиболее вероятный интервал изменения параметра Цаллиса $0,9 < q < 1,1$. При $q < 1$ скорости термоядерных реакций уменьшаются, при $q > 1$ – увеличиваются. И уменьшение, и рост скоростей может достигать двух порядков. При $q \rightarrow 1$ статистика Цаллиса переходит в статистику Максвелла.

Так как представляет интерес относительное влияние параметра Цаллиса, то проведено сравнение скоростей реакций, усредненных по распределению Максвелла, с астрофизическим фактором, взятым из данных

МАГАТЭ, и по распределению Цаллиса с тем же астрофизическим фактором.

На рис. 4 приведены зависимости от температуры 1–30 кэВ отношения скоростей $DD(n)$ реакции для $q = 0,9; 0,95; 1,05; 1,1$.

На рис. 5 приведены зависимости от параметра q , $0,9 < q < 1,1$, отношения скоростей реакции DT при нескольких температурах $T = 0,5, 1, 2, 5, 10$ кэВ.

Анализ рисунков показывает, что имеет место значительное влияние параметра Цаллиса на скорость термоядерных реакций.

Так, при $T = 0,5$ кэВ скорости реакции горения дейтерия может уменьшиться в ~ 100 раз, если $q = 0,9$, или – возрасти в 100 раз при $q = 1,1$. В области горения дейтерия при $T = 10$ кэВ влияние параметра слабее – уменьшение до 2 раз при $q = 0,9$, увеличение до 2 раз при $q = 1,1$.

Примерно такая же зависимость от параметра Цаллиса скорости DT -реакции.

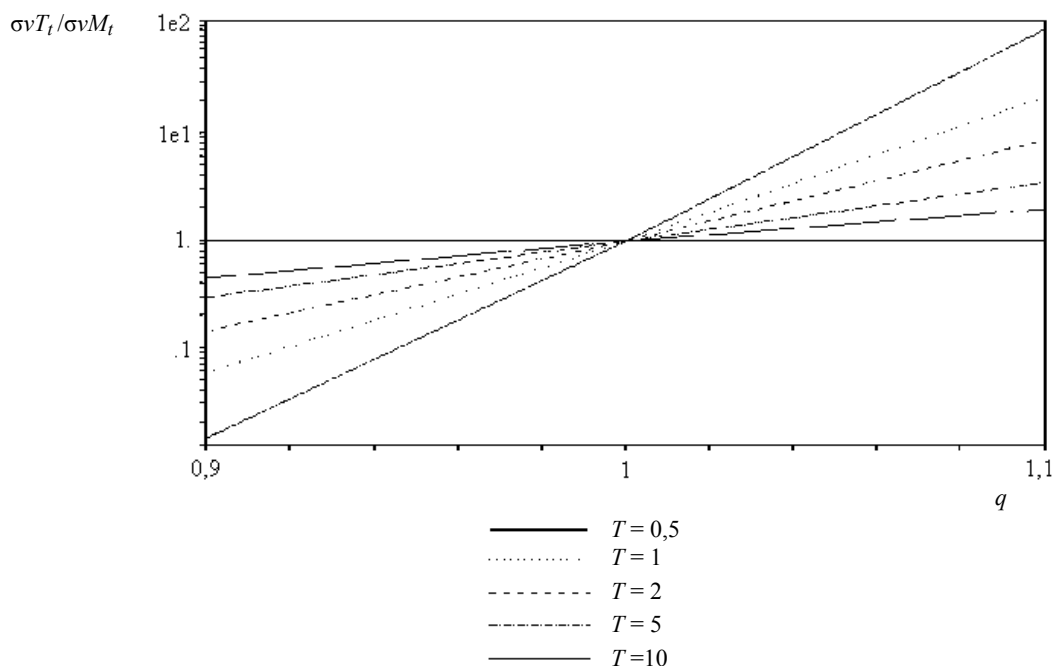


Рис. 5. Зависимость от параметра Цаллиса ($0,9 < q < 1,1$) отношения скоростей DT -реакции усредненных по распределениям Цаллиса и Максвелла для $T = 0,5; 1; 2; 5; 10$ кэВ

Список литературы

1. Tsallis C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics // J. Stat. Phys. 1988. Vol. 52. P. 479.
2. Lavagno A., Quarati H. Solar reaction rates, non-extensivity and quantum uncertainty, arXiv: nucl-th/0102016 v1 8 Feb 2001, с 8.
3. Coraddu, Lissia M., Mezzorani G., Quarati P. «Deuterium burning in Jupiter interior», preprint from arXiv: physics/0112018 v1 6 Dec 2001.
4. Tsallis C. Nonextensive statistical mechanics: A brief review of its present status, arXiv:cond-mat/0205571 v1 27 May 2002, с.18.

5. Козлов Б. Н.// Скорости термоядерных реакций. Атомная энергия. 1962. Т. 12. С. 238.
6. Hively L. M.// Nuclear Fusion. 1977. Vol. 17. P. 873
7. Angul C., Arnould V., Rayet M., Descouvemont P., Baye D. etc. A compilation of charged particle induced thermonuclear reaction rates // Nuclear Physics. 1999. Vol. A, 656. P. 3–183.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, М.: Наука, 1964.
9. Внутреннее строение звезд: Сборник статей/ Под ред. Л. Аллера и Д. Б. Мак-Лафлина. М.: Мир, 1978.