УДК 539.1.01; 514.83

ДВИЖЕНИЕ СПИНОВЫХ ЧАСТИЦ В ОТО, СОГЛАСОВАННОЕ С РЕШЕНИЕМ КЕРРА

М. В. Горбатенко, Т. М. Горбатенко
РФЯЦ-ВНИИЭФ

Приводятся уравнения, определяющие в постньютоновском приближении эволюцию спинов частиц в задаче о движении двух частиц, обладающих массами и спинами. Уравнения получены методом Эйнштейна – Инфельда – Гоффманна из условия симметричности метрического тензора. Рассмотрение проведено с использованием условия гармоничности координат и совпадения метрики вблизи от частиц с разложениями решения Керра, записанного в гармонических координатах. Полученные уравнения дают, например, для гироскопов на спутнике Gravity Probe B отклонение оси вращения, во-первых, в 2 раза меньшее того значения, которое получил J. L. Anderson в работе gr-qc/0511093, а во-вторых, отклонение имеет противоположное направление. Из полученных уравнений следует, что полный угловой момент системы спиновых частиц, вообще говоря, не сохраняется, начиная уже с постньютоновского приближения. Результаты кратко обсуждаются.

Введение

Рассматривается система из двух частиц, обладающих массами и собственными угловыми моментами. Для описания движения таких частиц в рамках ОТО необходимы динамические уравнения двух типов: определяющие движение центра масс частиц и эволюцию спина каждой из них.

Уравнения первого типа могут быть получены либо методом Фока, либо методом Эйнштейна-Инфельда-Гоффманна (ЭИГ). Относительно этих уравнений разногласий, как правило, не возникает.

Ситуация с уравнениями, описывающими эволюцию спинов, совершенно иная. Имеется несколько версий этих уравнений для самосогласованного движения двух спиновых частиц (например, [1–4]) и большое количество версий уравнений, описывающих динамику спина пробной спиновой частицы (например, [5–17]). Все версии различаются между собой, и далеко не очевидно, какая из всех этих версий правильная.

Нами решена задача о самосогласованном движении двух спиновых частиц в постньютоновском (ПН[1]) приближении методом ЭИГ. Отличительные особенности нашего рассмотрения состоят в следующем.

Все операции, предусмотренные в методе ЭИГ, выполняются с использованием условия де Дондера для метрики

$$\left(\sqrt{-g}\; g^{\lambda\sigma}\right)_{,\sigma} = 0\,, \tag{1}$$

которое совпадает с условием гармоничности координат.

2. Для определения неизвестных коэффициентов в аппроксимационных выражениях, используемых в методе ЭИГ, используются разложения решения Керра, записанного в гармонических координатах в работах [18, 19]. Коэффициенты в разложениях решения Керра берутся из работы [20].

3. Динамические уравнения для спинов получаются из условий симметричности метрики в рассматриваемых приближениях.

Полученные нами динамические уравнения для спинов частиц и вытекающие из них динамические уравнения для пробной спиновой частицы отличаются от всех других тем, что согласованы с исходным постулатом ОТО о симметричности метрического тензора. Обеспечивая симметричность метрики, мы сталкиваемся с альтернативой «либо симметричность метрики, либо закон сохранения углового момента». В результате сделанного выбора мы приходим к несохранению вектора полного углового момента системы частиц уже в ПН приближении. Этот вопрос интересен сам по себе, и мы его кратко обсуждаем. Кроме того, приводятся и обсуждаются также оценки для гироскопов, эксперименты с которыми выполнялись на спутнике Gravity Probe B (GP-B).

Мы предполагаем, что читатели знакомы с методом ЭИГ, поэтому ограничиваемся минимальными пояснениями на этот счет. В данную работу не включены также громоздкие материалы по технике применения метода ЭИГ. Все такие материалы и детали расчетов будут представлены в отдельной работе.

[1] Под ПН приближением понимается приближение, в котором начинают появляться поправки к ньютоновскому приближению независимо от порядка малости этих поправок.

1. Обозначения

В данной работе решаются уравнения ОТО с нулевым тензором энергии-импульса. Эти уравнения, как и в работах [21, 22], запишем с использованием $\eta_{\alpha\beta}$ – метрического тензора пространства Минковского

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = 0\,. \tag{2}$$

Здесь $R_{\alpha\beta}$ – тензор Риччи, определяемый стандартным образом. В фоновом пространстве будут использоваться декартовы координаты, поэтому

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\left[-1,1,1,1\right]. \tag{3}$$

Используются два типа величин: $h_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$. Эти величины определяются посредством соотношений

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\,,\;\; \gamma_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu})\,. \tag{4}$$

Поднимание и опускание индексов у величин $h_{\alpha\beta}$ и $\gamma_{\alpha\beta}$ производится с помощью тензоров (3). Так, под величиной $h^{\alpha\beta}$ понимается $h^{\alpha\beta} \equiv \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}h_{\mu\nu}$.

Рассматривается система из двух частиц. В фоновом пространстве выбираем произвольным образом декартовы координаты $\left(ct, x_k\right)$. Координаты радиус-векторов частиц обозначаем через $\xi_k; \eta_k$ соответственно. Длину вектора с координатами $R_k = \eta_k - \xi_k$ обозначаем через R. Производную по ct обозначаем либо точкой над величиной (например, $\dot{\xi}_k$), либо как нижний индекс «0», отделенный запятой (например, $\xi_{k,0} \equiv \dot{\xi}_k$).

Массы первой и второй частицы обозначаются через $\tilde{M}, \tilde{m}$ соответственно. Величины

$$M = \frac{G\tilde{M}}{c^2};\;\; m = \frac{G\tilde{m}}{c^2}$$

равны половинам радиусов Шварцшильда частиц. Здесь G – гравитационная постоянная, c – скорость света. Величины M, m будем далее называть массами, хотя они имеют размерность длины. Аксиальные векторы собственных угловых моментов частиц записываем в виде

$$\tilde{M}cS_k;\;\; \tilde{m}cs_k\,.$$

Величины $S_k; s_k$ имеют размерность длины; будем называть их приведенными векторами собственных угловых моментов или просто спинами.

Уравнения (2) в λ^k-порядке обозначаются как $\left[00;\lambda^2\right]$, $\left[0k;\lambda^3\right]$, $\left[mn;\lambda^4\right]$ и т. д. Координатные условия обозначаются далее как $\left[c.c.;0;\lambda^3\right]$, $\left[c.c.;k;\lambda^4\right]$ и т. д.

2. Параметры малости

Основным параметром малости в методе ЭИГ является величина

$$\lambda = v/c\,, \tag{5}$$

где v – характерная относительная скорость частиц. Наряду с параметром λ рассматриваемая система имеет еще четыре безразмерных и априори независимых параметра

$$u \equiv M/r\,;\;\; v \equiv S/r\,;\;\; m/r\,;\;\; s/r\,. \tag{6}$$

При достаточно больших значениях радиальной переменной r эти параметры становятся малыми. Однако относительные соотношения между ними в принципе произвольны, поскольку не зависят от величины r и определяются характеристиками частиц. В данной работе рассмотрение будет проводиться в следующих предположениях:

$$M/r \sim \lambda^2;\;\; m/r \sim \lambda^2\,; \tag{7}$$

$$S/r \sim \lambda;\;\; s/r \sim \lambda\,. \tag{8}$$

Мы не будем останавливаться на пояснении физического смысла этих предположений, эти пояснения изложены во многих работах и носят стандартный характер. Заметим лишь, что во многих реальных ситуациях предположения (7), (8) выполняются не в полном объеме. Тем не менее и в этих случаях динамические уравнения, получаемые при предположениях (8), (9), могут быть использованы как источник информации о движении спиновых частиц.

3. Расстановка порядков малости

Необходимо сделать определенные предположения относительно расстановки порядков малости отдельных членов, входящих в функции $\gamma_{00}, \gamma_{0k}, \gamma_{mn}$. Конструкция членов низшего приближения однозначно определяется ассортиментом имеющихся в задаче параметров (6). Порядки малости других членов выбираются так, чтобы процедура ЭИГ была самосогласованной. В нашем рассмотрении будут использоваться следующие расстановки порядков малости:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{00} &= \underset{2}{\gamma}_{00} + \underset{4}{\gamma}_{00} + \underset{5}{\gamma}_{00} + \ldots, \\ \gamma_{0k} &= \underset{3}{\gamma}_{0k} + \underset{5}{\gamma}_{0k} + \underset{6}{\gamma}_{0k} + \ldots, \\ \gamma_{mn} &= \underset{4}{\gamma}_{mn} + \underset{5}{\gamma}_{mn} + \underset{6}{\gamma}_{mn} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Обычно в методе ЭИГ разложения функций $\gamma_{00}, \gamma_{0k}, \gamma_{mn}$ состоят из членов одной четности по λ. В нашем случае учтены результаты [20], из которых следует, что разложения функций $\gamma_{00}, \gamma_{0k}, \gamma_{mn}$ должны содержать члены всех порядков малости, начиная с $\underset{4}{\gamma}_{00}, \underset{5}{\gamma}_{0k}, \underset{4}{\gamma}_{mn}$ соответственно.

Напомним некоторые «технические» приемы, используемые в методе ЭИГ.

В методе ЭИГ при дифференцировании любой функции по x^0 ее порядок малости повышается на единицу по сравнению с тем, который эта функция имела до дифференцирования. При дифференцировании по пространственным координатам x^k порядок малости функции сохраняется.

Все выражения должны быть симметричны относительно замены первой частицы на вторую и второй на первую, т. е. одновременно выполняемых замен:

$$\left.\begin{array}{l} M \to m; \quad m \to M; \quad S \to s; \quad s \to S; \\ \xi_k \to \eta_k; \ \eta_k \to \xi_k; \ R_k \to -R_k. \end{array}\right\} \qquad (10)$$

При обращении в нуль параметров *m*, *s* получаемые методом ЭИГ выражения должны совпадать с соответствующими разложениями решения Керра, записанными для частицы с параметрами *M*, *S*.

Если неравенства выполняются для первой частицы, а параметры второй частицы удовлетворяют неравенствам

$$m/r \sim \lambda^4; \ s/r \sim \lambda^3, \qquad (11)$$

то в ПН-приближении вторую частицу можно рассматривать как пробную. В этом случае присутствие в системе второй частицы никак не влияет на динамические уравнения для первой частицы; что касается второй частицы, то она движется в гравитационном поле, создаваемом первой частицей, как во внешнем поле. Вторая частица является при этом пробной спиновой частицей.

Исходные уравнения (2) записываются в каждом порядке приближения в виде одного уравнения 00, трех уравнений $0k$ и шести уравнений mn. Согласованность расстановки порядков малости (9) с уравнениями (2) проявляется в том, что выписанная цепочка уравнений $\left[00;\lambda^{2k}\right]$, $\left[0k;\lambda^{2k+1}\right]$, $\left[mn;\lambda^{2k+2}\right]$ позволяет находить последовательно величины $\underset{2k}{\gamma}_{00}$, $\underset{2k+1}{\gamma}_{0k}$, $\underset{2k+2}{\gamma}_{mn}$. При этом предполагается, что используются координатные условия, согласованные с этой процедурой.

4. Явный вид разложения решения Керра

Приведем в явном виде главные члены разложений величин $\gamma_{\alpha\beta}$ по параметрам малости $u = m/r$, $v = a/r$, где $a \equiv \sqrt{\left(s_k s_k\right)}$. Разложения заимствованы из работы [20]. В выражениях для γ_{00}, γ_{0k}, γ_{mn} ограничиваемся выписыванием только тех членов, которые содержат множители вида u, u^2. vu, vu^2, $v^2 u$, $v^3 u$.

Тензор собственного углового момента s_{mn}, приведенного к единичной массе, имеет в решении Керра только одну отличную от нуля компоненту s_{12}, значение которой совпадает с величиной a. Таким образом,

$$s_{12} = a; \ s_{23} = s_{31} = 0; \ s_1 = s_2 = 0; \ s_3 = a. \qquad (12)$$

Аксиальный вектор момента s_k связан с тензором s_{mn} стандартным соотношением

$$s_{mn} = \varepsilon_{mnc} s_c; \ s_c = \frac{1}{2}\varepsilon_{cab} s_{ab}; \ s_3 = a. \qquad (13)$$

Из выражений (12), (13) следует, что имеют место соотношения

$$1 = \frac{\left(s_c s_c\right)}{a^2}; \qquad (14)$$

$$\cos^2\theta = \frac{\left(s_a x_a\right)\left(s_b x_b\right)}{a^2 r^2}. \qquad (15)$$

Выражение для γ_{00} в декартовых координатах записывается в следующем виде:

$$\gamma_{00} = 4u + u^2 - 6\frac{s_a s_b}{a^2}\left(\frac{x_a x_b}{r^2} - \frac{1}{3}\delta_{ab}\right)v^2 u + \ldots =$$

$$= 4\frac{m}{r} + \frac{m^2}{r^2} - 6\frac{m}{r^3} s_a s_b \left(\frac{x_a x_b}{r^2} - \frac{1}{3}\delta_{ab}\right) + \ldots \qquad (16)$$

Выражения для $\gamma_{01}, \gamma_{02}, \gamma_{03}$ в декартовых координатах записываются в следующем виде:

$$\gamma_{0k} = 2\frac{m\left(s_{ka} x_a\right)}{r^3} - 2\frac{m^2\left(s_{ka} x_a\right)}{r^4} -$$

$$-5\frac{m\left(s_{kc} x_c\right)\left(s_a x_a\right)\left(s_b x_b\right)}{r^7} + \frac{m\left(s_{ka} x_a\right)}{r^5}\left(s_a s_a\right) + \ldots \qquad (17)$$

Выражения для $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ в декартовых координатах записываются в следующем виде:

$$\gamma_{mn} = \frac{m^2 x_m x_n}{r^4} - 2\frac{m^2}{r^2}\delta_{mn} +$$

$$+ \frac{m^2\left[\left(s_{mc} x_c\right) x_n + \left(s_{nc} x_c\right) x_m\right]}{r^5} + \ldots \qquad (18)$$

При обращении в нуль величины s_{mn} выражения (16)–(18) переходят в разложения решения Шварцшильда.

5. Построение решения уравнений Эйнштейна, соответствующего двум керровским частицам

5.1. Подход к использованию метода ЭИГ в задаче о двух керровских частицах

Подход в принципиальном плане ничем не отличается от подхода, использованного при рассмотрении двух частиц, имеющих ненулевые массы, но не обладающих собственными угловыми моментами (шварцшильдовых частиц). Специфика задачи состоит в следующем:

1) функции $\gamma_{00}, \gamma_{0k}, \gamma_{mn}$ во всех порядках малости расщепляются на две части,

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{00} = \hat{\gamma}_{00} + \bar{\gamma}_{00} \\ \gamma_{0k} = \hat{\gamma}_{0k} + \bar{\gamma}_{0k} \\ \gamma_{mn} = \hat{\gamma}_{mn} + \bar{\gamma}_{mn} \end{array}\right\}. \qquad (19)$$

Первые части (с крышкой) являются решениями соответствующей задачи для двух шварцшильдовых частиц. Вторые части (с чертой) являются добавками, обязанными своим появлением собственным моментам частиц. Расщепление (19) может быть выполнено всегда без ограничения общности;

2) разложения каждой из частей функций (19) по параметрам малости производятся так, чтобы они совпадали с разложениями точных решений Керра по используемым в процедуре ЭИГ двум параметрам малости (напомним, что в задаче о двух шварцшильдовых частицах использовался один параметр малости). В соответствии с разложениями точного решения (9) будет использоваться следующая расстановка порядков малости:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{00} &= \left[\underset{2}{\hat{\gamma}}_{00}+\underset{4}{\hat{\gamma}}_{00}+\underset{6}{\hat{\gamma}}_{00}+\ldots\right]+\left[\underset{4}{\overline{\gamma}}_{00}+\underset{6}{\overline{\gamma}}_{00}+\ldots\right];\\
\gamma_{0k} &= \left[\underset{3}{\hat{\gamma}}_{0k}+\underset{5}{\hat{\gamma}}_{0k}+\ldots\right]+\left[\underset{3}{\overline{\gamma}}_{0k}+\underset{5}{\overline{\gamma}}_{0k}+\ldots\right];\\
\gamma_{mn} &= \left[\underset{4}{\hat{\gamma}}_{mn}+\underset{6}{\hat{\gamma}}_{mn}+\ldots\right]+\left[\underset{4}{\overline{\gamma}}_{mn}+\underset{5}{\overline{\gamma}}_{mn}+\underset{6}{\overline{\gamma}}_{mn}+\ldots\right].
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

В разложении γ_{mn} для точного решения нечетный порядок появляется в λ^5-приближении;

3) точные решения записываются при тех координатных условиях, которые используются в процедуре ЭИГ. В нашем рассмотрении это будут гармонические координатные условия.

4) функции (20) подставляются в динамические уравнения и в координатные условия и находятся динамические уравнения и координатные условия, которым обязаны удовлетворять вторые части функций (с крышкой).

5) полученные уравнения и условия решаются. Удовлетворяются при этом также и условия разрешимости динамических уравнений и координатных условий.

5.2. Нахождение величины $\underset{5}{\gamma}_{0k}$

Процедуры метода ЭИГ могут быть применены практически в стандартной форме до того момента, пока не потребуется нахождение величины $\underset{5}{\gamma}_{0k}$. Мы не будем выписывать соответствующих выражений из-за их громоздкости. Эти выражения с деталями их нахождения будут приведены в препринте, который готовится к публикации.

В данном разделе приведем лишь явное выражение для величины $\underset{5}{\gamma}_{0k}$. Функция $\underset{5}{\gamma}_{0k}$ находится из уравнения $\left[0k;\lambda^5\right]$ и координатного условия $\left[c.c.;0k;\lambda^5\right]$. Вычисление поверхностных интегралов от координатного условия приводит к следующим условиям разрешимости:

$$\underset{4}{M}=\frac{1}{2}M\left(\dot{\xi}_l\dot{\xi}_l\right)-\frac{1}{2}\frac{mM}{R};\quad \underset{4}{m}=\frac{1}{2}m\left(\dot{\eta}_l\dot{\eta}_l\right)-\frac{1}{2}\frac{mM}{R}. \quad (21)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
\underset{5}{\hat{\gamma}}_{0k} \underset{\kappa\geq 0}{=} & +8\frac{mM\dot{\eta}_k}{Rr_1}-4\frac{mM\dot{\xi}_k}{Rr_1}-4\frac{M\left(\dot{\xi}_l\dot{\xi}_l\right)\dot{\xi}_k}{r_1}+\\
&+2\frac{M\left(X_l\dot{\xi}_l\right)^2\dot{\xi}_k}{r_1^3}-\frac{M^2\left(X_l\dot{\xi}_l\right)X_k}{r_1^4}+\frac{M^2\dot{\xi}_k}{r_1^2}+\\
&+2\frac{mM\left(X_lR_l\right)\dot{\xi}_k}{R^3r_1}-2\frac{mM\left(X_l\dot{\xi}_l\right)R_k}{R^3r_1}-\\
&-6\frac{mM\left(R_l\dot{\eta}_l\right)X_k}{R^3r_1}+8\frac{mM\left(X_l\dot{\eta}_l\right)R_k}{R^3r_1}+\\
&+8\frac{mM\left(R_l\dot{\xi}_l\right)X_k}{R^3r_1};
\end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
\underset{5}{\overline{\gamma}}_{0k} \underset{\kappa\geq 0}{=} & 2\frac{M\left(\underset{3}{S}_{ka}X_a\right)}{r_1^3}-5\frac{M\left(S_{kc}X_c\right)\left(S_aX_a\right)\left(S_bX_b\right)}{r_1^7}+\\
&+\frac{M\left(S_{ka}X_a\right)}{r_1^5}\left(S_aS_a\right)+6\frac{M\left(S_lX_l\right)\left(X_l\dot{\xi}_l\right)S_k}{r_1^5}-\\
&-2\frac{M\left(S_l\dot{\xi}_l\right)S_k}{r_1^3}+2\frac{M\left(X_l\dot{\xi}_l\right)\left(S_{kl}\dot{\xi}_l\right)}{r_1^3}+4\frac{mM\left(s_{kl}R_l\right)}{R^3r_1}+\\
&+\frac{mM\left(S_{kl}R_l\right)}{R^3r_1}-3\frac{M\left(X_l\dot{\xi}_l\right)^2\left(S_{kl}X_l\right)}{r_1^5}-2\frac{M^2\left(S_{kl}X_l\right)}{r_1^4}-\\
&-\frac{mM\left(X_lR_l\right)\left(S_{kl}X_l\right)}{R^3r_1^3}+4\frac{mM\left(X_aS_{ab}R_b\right)X_k}{R^3r_1^3}+\\
&+4\frac{mM\left(s_{kl}X_l\right)}{R^3r_1}+12\frac{mM\left(X_as_{ab}R_b\right)R_k}{R^5r_1}+\\
&+6\frac{mM\left(X_lR_l\right)\left(X_aS_{ab}R_b\right)X_k}{R^5r_1^3}+\\
&+6\frac{mM\left(X_aS_{ab}R_b\right)R_k}{R^5r_1}+4\frac{mM\left(S_{kl}X_l\right)}{R^3r_1}-\\
&-6\frac{mM\left(X_lR_l\right)\left(S_{kl}R_l\right)}{R^5r_1}.
\end{aligned} \quad (23)$$

6. Способ нахождения динамических уравнений в ПН приближении

Приведенное выше выражение для $\underset{5}{\gamma}_{0k}$ необходимо для нахождения динамических уравнений, определяющих движение центров масс частиц, а также уравнений, определяющих производные по времени от спинов, т. е. величины $\underset{3}{\dot{S}}_{mn}$ и $\underset{3}{\dot{s}}_{mn}$.

В выражение для $\underset{5}{\gamma}_{0k}$ входят не величины $\underset{3}{\dot{S}}_{mn}$, $\underset{3}{\dot{s}}_{mn}$, а величины $\underset{3}{S}_{mn}$, $\underset{3}{s}_{mn}$. Уравнения для $\underset{3}{\dot{S}}_{mn}$ и $\underset{3}{\dot{s}}_{mn}$ возникают после того, как величина $\underset{5}{\gamma}_{0k}$ подставляется в координатное условие, связывающее $\underset{5}{\gamma}_{0k,0}$ и $\underset{6}{\gamma}_{ks,s}$, и это условие используется для нахождения $\underset{6}{\gamma}_{mn}$. Но полное выражение для $\underset{6}{\gamma}_{mn}$ нет необходимости находить, достаточно найти только антисимметричную часть от $\underset{6}{\gamma}_{mn}$ и потребовать обращения ее в нуль. Это условие и даст динамические уравнения для эволюции спинов.

Уравнения поступательного движения частиц получаются по-прежнему путем интегрирования уравнения $\left[mn;\lambda^6\right]$. Новое в том, что, во-первых, имеет место иная разбивка членов этого уравнения на роторную комбинацию и часть, обозначенную через $\sum_{i=1}^{18}\alpha_i$ (иное количество α_i и иной их явный вид). Во-вторых, при интегрировании $\sum_{i=1}^{18}\alpha_i$ следует иметь в виду, что вклады вносят не только шварцшильдовы части $\hat{\gamma}_{\mu\nu}$, но и керровские части $\overline{\gamma}_{\mu\nu}$. Стратегия нахождения уравнений поступательного движения частиц состоит в нахождении $\hat{\gamma}_{\mu\nu}$, $\overline{\gamma}_{\mu\nu}$, которые вносят вклад в интеграл от $\left[mn;\lambda^6\right]$, и в вычислении этого интеграла. Заметим, что вклад величины $\underset{6}{\gamma}_{mn}$ в интеграл равен нулю, поэтому для этой цели $\underset{6}{\gamma}_{mn}$ находить в явном виде нет необходимости.

Результирующие динамические уравнения, определяющие движение центров масс частиц, совпадают с теми, которые приведены во многих работах. Например, в работе [1]. Поэтому мы их не выписываем. Заметим лишь, что из этих уравнений следуют законы сохранения энергии и вектора импульса частиц.

7. Динамические уравнения для спинов

Результирующие уравнения, определяющие динамику спинов, полученные по изложенному выше способу, имеют следующий вид:

$$\underset{3}{\dot{S}}_c = 9\frac{m}{R^3}\left(R_l\dot{\xi}_l\right)S_c + 2\frac{m}{R^3}\left(R_l\dot{\eta}_l\right)S_c - 2\frac{m}{R^3}\left(S_l\dot{\xi}_l\right)R_c; \quad (24)$$

$$\underset{3}{\dot{s}}_k = -9\frac{M}{R^3}\left(R_l\dot{\eta}_l\right)s_k - 2\frac{M}{R^3}\left(R_l\dot{\xi}_l\right)s_k + 2\frac{M}{R^3}\left(s_l\dot{\eta}_l\right)R_k. \quad (25)$$

8. Изменение со временем полного момента

Подстановка полученных динамических уравнений для спинов в уравнения для производной по времени от полного момента системы частиц приводит к следующему выражению для $\dot{\mathrm{M}}_c$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{M}}_c = &+\frac{mM}{R^3}\left\{-2\left(S_l\dot{\xi}_l\right)R_c + 9\left(R_l\dot{\xi}_l\right)S_c + 2\left(R_l\dot{\eta}_l\right)S_c\right\} - \\ &-\frac{mM}{R^3}\left\{-2\left(s_l\dot{\eta}_l\right)R_c + 9\left(R_l\dot{\eta}_l\right)s_c + 2\left(R_l\dot{\xi}_l\right)s_c\right\} + \\ &+\varepsilon_{cmn}\left\{-6\frac{mM\left(s_{ml}R_l\right)\left(R_l\dot{R}_l\right)}{R^5}R_n - 4\frac{mM\left(s_{ml}\dot{\xi}_l\right)}{R^3}R_n + \right. \\ &\left. +3\frac{mM\left(s_{ml}\dot{\eta}_l\right)}{R^3}R_n\right\} + \varepsilon_{cmn}\left\{-6\frac{mM\left(S_{ml}R_l\right)\left(R_l\dot{R}_l\right)}{R^5}R_n - \right. \\ &\left. -3\frac{mM\left(S_{ml}\dot{\xi}_l\right)}{R^3}R_n + 4\frac{mM\left(S_{ml}\dot{\eta}_l\right)}{R^3}R_n\right\} - \\ &-3\frac{mM}{R^5}\left(\left(S_l + s_l\right)R_l\right)\left(S_{cl} + s_{cl}\right)R_l. \qquad (26)\end{aligned}$$

Анализ структуры правой части уравнения для $\dot{\mathrm{M}}_c$ показал, что никаким переопределением полного момента импульса системы частиц невозможно добиться выполнения закона сохранения момента в ПН приближении.

Для системы спиновых частиц, находящейся в фоновом пространстве с плоской асимптотикой, вероятно, можно построить сохраняющуюся величину, аналогичную полному угловому моменту. Однако эта величина, как следует из нашего рассмотрения, заведомо не будет сводиться к сумме орбитальных моментов частиц и их собственных угловых моментов.

Полученный результат о несохранении полного углового момента системы частиц в ПН приближении выглядит необычно, однако этот результат, по-видимому, не противоречит первым принципам ОТО. Скорее всего, аналогичные эффекты возникнут и в отношении энергии и импульса на каком-то этапе приближения.

9. Численные оценки для гироскопов на спутнике GPB

Для численных оценок будем использовать те же исходные данные для гироскопов, которые приведены в работе Андерсона [3]. Согласно этой работе, гироскопы представляли собой шары радиусом $r_g = 1{,}9$ см и массой $m = 75$ г. Начальная угловая скорость ω = 27000 рад/с. Спутник запущен на почти идеальную полярную орбиту радиусом $R = 7027$ км. Орбитальная скорость гироскопов $v = 7{,}5\cdot 10^5$ см/с. Отношение $v/c = 2{,}5\cdot 10^{-5}$. Отношение половины радиуса Шварцшильда Земли к радиусу орбиты гироскопов равно

$$\frac{M}{R} = 6,5 \cdot 10^{-10}. \qquad (27)$$

Оси гироскопов находились в плоскости орбиты спутника.

Уравнение, которое использовано в работе [3] для оценки отклонения оси вращения гироскопов, выведено в самой работе с использованием псевдотензора энергии-импульса Ландау–Лифшица [23]. Оно имеет вид

$$\dot{s}_k = \frac{1}{5}\frac{M}{R^3}\left\{-\left(s_l \dot{R}_l\right)R_k - 19\left(s_l R_l\right)\dot{R}_k + 16 s_k \left(R_l \dot{R}_l\right)\right\}. \qquad (28)$$

Совместим плоскость орбиты спутника с плоскостью (x, y) и запишем изменение радиус-вектора в виде

$$R_1 = R\cos\left(\Omega t\right);\, R_2 = R\sin\left(\Omega t\right);\, \Omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (29)$$

Из этих уравнений следует, что

$$\dot{\eta}_1 = -R\Omega\sin\left(\Omega t\right);\, \dot{\eta}_2 = R\Omega\cos\left(\Omega t\right). \qquad (30)$$

В начальный момент времени ориентация оси вращения гироскопов совпадает с осью x,

$$s_{1(0)} = s_0;\, s_{21(0)} = 0. \qquad (31)$$

Из уравнения Андерсона следует, что вклад в производные по времени от спина вносят два первых слагаемых в правой части (28). После усреднения этих слагаемых по орбите за время одного оборота получаем, что

$$\frac{\dot{s}_1}{s_0}T = 0;\; \frac{\dot{s}_2}{s_0}T = \frac{M}{R}. \qquad (32)$$

Таким образом, за один оборот вокруг Земли ось гироскопа смещается на угол $\Delta\theta$, равный

$$\Delta\theta = 2M/R = 1,27 \cdot 10^{-9}. \qquad (33)$$

Поскольку спутник GPB в функционирующем состоянии должен был совершить около 5000 оборотов, то отсюда следует, что в эксперименте должны быть измерены углы отклонения гироскопов порядка $6 \cdot 10^{-6}$ рад.

Из уравнений для спинов (24), (25), полученных по методу данной работы, следует, что, во-первых, отклонение должно быть в 2 раза меньше, а во-вторых, что оси гироскопов отклоняются в сторону, противоположную той, которая следует из уравнений (28).

Выводы

Насколько нам известно, процедура разложения решения Керра, записанного в гармонических координатах, никем до нашей работы (20) не производилась и, естественно, не использовалась для нормировки выражений, получаемых методом ЭИГ. Это дает нам право высказать предположение, что правильность результатов по движению спинов частиц, приводимых в других работах, должна быть проверена путем сравнения с разложениями решения Керра в разд. 4.

Другим тестом правильности уравнений для спинов, приводимых в литературе, является также отсутствие антисимметричной части в выражении для $\underset{6}{\gamma}_{mn}$, которая может появиться из координатного условия $\left[c.c.; \lambda^6\right]$.

Теперь о величине отклонения направления оси вращения гироскопа на спутнике GP-B. Из проведенного в разд. 9 рассмотрения следует, что наши уравнения (24), (25) дают для отклонения (в расчете на один оборот вокруг Земли) величину $\Delta\theta = -M/R$, а уравнения (28) – величину $\Delta\theta = +2M/R$. Мы считаем, что ОТО предсказывает эффект, согласующийся с нашими уравнениями (24), (25). Крайне интересно дождаться результатов эксперимента с гироскопами на спутнике Gravity Probe B!

Из полученных результатов следует, что речь должна идти не только об эффектах отклонения от движения по геодезической прецессии и изменении ориентации осей вращения, но и об изменении длин собственных моментов, т. е. величин угловой скорости вращения. Убыстрение-замедление вращения гироскопов на различных участках мировой линии можно было бы зафиксировать и в лабораторных условиях без вывода на околоземную орбиту. Для этого нужно набрать достаточную статистику количества оборотов, совершаемых за одно и то же время гироскопом вокруг своей оси на участках, на которых проекция спина на радиус-вектор положительна и отрицательна. Сравнение числа оборотов на этих двух участках может служить тестом по проверке ОТО.

Авторы благодарят Л. С. Мхитарьяна за обсуждение результатов работы.

Список литературы

1. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972.
2. Рябушко А. П. Движение тел в общей теории относительности. Минск: Вышэйшая школа. 1979.
3. Anderson J. L. Approximate Equations of Motion for Compact Spinning Bodies in General relativity. ArXiv: gr-qc/0511093.
4. Gorbatenko M. V.//Theor. and Math. Physics. 1994. Vol. 101. P. 1245.
5. Fock V. A. //J. Phys. U.S.S.R. 1939. Vol. 1. P. 81.
6. Papapetrou A.//Proc. Phys. Soc. 1951. Vol. 64. P. 7.
7. Papapetrou A.//Proc. Roy. Soc. Lond. 1951. Vol. A209. P. 248.
8. Corinaldesi E. and Papapetrou A.//Proc. Roy. Soc. Lond. 1951. Vol. A209. P. 259.
9. Pirani F.//Acta Phys. Polon. 1956. Vol. 15. P. 389.
10. Schiff L. I.//Phys. Rev. Lett. 1960. Vol. 4. P. 215.
11. Schiff L. I.//Proc. Nat. Acad. Sci. 1960. Vol. 46. P. 871.
12. Dixon W. G. Proc. Roy. Soc. Lond. 1970. Vol. A314. P. 499.

13. Weinberg S. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory Relativity. New York. Wiley, 1972.

14. Владимиров Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоатомиздат, 1982.

15. Gal'tsov D. V., Petukhov V. I. and Aliev A. N.// Phys. Letters. 1984. Vol. 105A, No. 7. P. 346.

16. Новиков И. Д., Фролов В. П. Физика черных дыр. М.: Наука, 1986.

17. Хриплович И. Б. Общая теория относительности. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

18. Vlasov A. A., Logunov A. A.//Theor. and Math. Physics. 1987. Vol. 70. P. 171.

19. Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.

20. Gorbatenko M. V., Gorbatenko T. M.// Theor. and Math. Physics. 2004. Vol. 140. P. 1028.

21. Einstein A., Infeld L., and Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion//Ann. Math. 1938. Vol. 39. P. 65–100.

22. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory//Can. J. Math. 1949. Vol. 1. P. 209–241.

23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988.

Статья поступила в редакцию 17.05.2006.