

ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДИК РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

А. Н. Разин, Ю. А. Трутнев

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Дается краткая характеристика современных численных методик и методов расчета турбулентного перемешивания, которые используются как для описания модельных опытов, так и для решения конкретных практических задач. Отмечаются ключевые моменты, которые необходимо учитывать при обосновании результатов численного моделирования турбулентных течений, развивающихся из неустойчивости Рихтмайера – Мешкова, а также при разработке новых физических моделей и численных методик.

Введение

В последние два десятилетия интенсивно развиваются методики расчета турбулентных течений. Ежегодно появляются новые публикации, в которых модели турбулентности применяются для описания различных классов турбулентных течений. Для совершенствования физических моделей и численных методик результаты численного моделирования сравниваются с экспериментальными данными, выявляются недостатки существующих моделей и предлагаются способы их устранения. В процессе уточнения моделей турбулентности методики расчета усложняются, а наиболее развитые модели турбулентности включают в себя все большее число уравнений.

Первые расчеты развитой турбулентности с использованием уравнений Эйлера или Навье-Стокса (прямое численное моделирование турбулентности) показали ограниченность такого подхода из-за невозможности смоделировать все масштабы турбулентности на существующих вычислительных системах ввиду недостатка быстродействия и объема памяти (для решения всех масштабов турбулентности нужны очень мелкие разностные сетки).

Помимо методов прямого численного моделирования турбулентности разрабатываются полуэмпирические модели разного уровня сложности, в которых система уравнений для средних газодинамических величин дополняется уравнениями для пульсаций. Первые полуэмпирические модели были весьма простыми ввиду использования при их выводе серьезных упрощающих предположений. Многочисленные экспериментальные расчеты показали, что область применимости простых моделей существенно ограничена, а точность моделирования характеристик турбулентности оставляет желать лучшего. Тем не менее для грубой оценки развития ширины зоны турбулентного перемешивания (без

учета изменения анизотропии турбулентности, пульсаций плотности, скорости диссипации и т. д.) в некоторых случаях могут быть использованы простейшие полуэмпирические модели с одним уравнением, например уравнением переноса кинетической энергии турбулентности или турбулентной вязкости. Практика использования таких моделей показала, что входящие в модель константы требуют уточнения при моделировании нового класса решаемых задач. Кроме того, при численном моделировании турбулентного перемешивания (ТП) в многослойных системах простейшие модели оказываются неприменимыми в ситуации, когда возможно смыкание зон ТП.

Следующей по сложности полуэмпирической моделью турбулентности является широко известная К-ε модель. Для расчета турбулентных величин в К-ε модели используются два уравнения: для кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации. Первый вариант модели опубликован более тридцати лет назад (смотри, например, [1]). С тех пор развито несколько вариантов модели, однако возможности модели при описании характеристик турбулентности остаются ограниченными. В частности, модель неприменима для описания течений, в которых необходимо учитывать анизотропию вихрей, отсутствуют удовлетворительные результаты моделирования взаимодействия УВ с турбулентным полем.

Попытки улучшить качество численного моделирования турбулентных течений при наличии УВ привели к созданию ряда сложных полуэмпирических моделей турбулентности (краткое рассмотрение этих моделей дано ниже). В РФЯЦ-ВНИИЭФ наибольшее развитие получила модель В. В. Никифорова [2–4]. К числу ее особенностей следует отнести учет влияния анизотропии турбулентности, пульсаций плотности, сжимаемости и теплового расширения вещества на динамику ТП. В настоящее время для моделирования одно-

мерных и двумерных течений с учетом ТП создано несколько пакетов программ [5], в которых эволюция ТП рассчитывается по модели В. В. Никифорова. При этом в одних методиках используется подход Эйлера, в других расчеты ТП выполняются на эйлерово-лагранжевой сетке. О качестве численного моделирования ТП в одномерных течениях с использованием модели В. В. Никифорова можно судить по опубликованным результатам [2, 6, 7].

В последние годы совершенствованием модели В. В. Никифорова занимался В. И. Козлов, программная реализация модели выполнялась И. В. Сапожниковым в рамках методики ВИХРЬ [4]. В процессе модификации были разработаны схема описания взаимодействия УВ с турбулентным полем [8] и алгоритм инициализации ТП, основанный на анализе развития возмущения на контактной границе [9]. Кроме того, предложена модификация ряда корреляций, используемых в модели Никифорова, таких, как обменный тензор и коэффициент турбулентной диффузии. Численное моделирование известных модельных опытов, выполненное по усовершенствованной модели, продемонстрировало повышение точности расчета характеристик турбулентности при обеспечении сходимости решения на последовательности сгущающихся сеток. В настоящее время усовершенствованная В. И. Козловым модель В. В. Никифорова реализована в нескольких одномерных и двумерных методиках [5].

Помимо методик прямого численного моделирования, К- ϵ модели и модели В. В. Никифорова существует еще ряд других методик, разработанных в аналогичных ВНИИЭФ научных центрах Англии, США, Франции. Для изучения возможностей современных методик расчета ТП, развивающегося на КГ из неустойчивости Рихтмайера – Мешкова, привлекаются данные экспериментов. Для такого класса турбулентных течений экспериментальная информация представлена, например, в работах [2, 10–19]. В большей части указанных работ изучалось лишь развитие ширины зоны турбулентного перемешивания (ЗТП) в широком диапазоне чисел Маха падающей на КГ ударной волны при изменении чисел Атвуда и различной сжимаемости контактирующих газов. Такие эксперименты позволяют протестировать рост ширины зоны ТП в расчетах, но не дают информации о правильности моделирования отдельных характеристик турбулентности. Существует немногочисленная экспериментальная информация [18, 19], которая специально извлекалась из опытов с целью верификации отдельных уравнений полуэмпирических моделей: уравнений для изменения продольной и поперечной кинетической энергии, уравнения для скорости диссипации как в безударных течениях, так и при наличии УВ.

Работа состоит из двух частей. В первой части кратко описываются современные методики и модели расчета ТП, возникающего из неустойчивости Рихтмайера – Мешкова. При описании современных методик расчета ТП использовались труды международных

конференций по физике сжимаемого турбулентного перемешивания (материалы последних пяти конференций), а также публикации в периодических журналах. Во второй части рассмотрены ключевые проблемы численного моделирования: инициализация ТП (расчет этапа развития неустойчивости и переход к ТП) и уменьшение погрешности численных методик. На взгляд автора от качества решения отмеченных проблем будет зависеть дальнейший прогресс в развитии физических моделей и в повышении точности описания ТП.

1. Современные методы расчета ТП

Для численного моделирования развития неустойчивости и ТП, возникающих после прохождения УВ через КГ, в научных центрах различных стран разработано значительное число методик, основанных на тех или иных методах учета ТП. Ниже рассматривается краткое описание только тех методик, которые использовались при описании наиболее интересных и информативных экспериментальных данных.

В численных методиках расчета ТП сложной проблемой является инициализация ТП (проблема корректного задания начальных данных). Как правило, по опубликованным данным сложно судить, насколько близко к эксперименту выполнена инициализация ТП, особенно в тех случаях, когда отсутствует экспериментальная информация о начальных значениях амплитуды и длины волны возмущения КГ при проведении опыта. Известно, что результаты численного моделирования ТП зависят не только от физической модели ТП и точности численной методики, но и от используемого метода инициализации и опыта пользователя той или иной расчетной методикой. По этой причине мы не будем говорить о возможностях рассматриваемых методик, а будем лишь констатировать, что авторам расчетов удалось получить по используемой модели приведенный в публикации результат.

Прямое численное моделирование. В последние несколько десятилетий интенсивно развивается направление исследования развития неустойчивости и ТП на КГ на основе теоретического анализа, экспериментальных данных и прямого численного интегрирования уравнений Эйлера или Навье-Стокса (DNS – direct numerical simulations). Для интегрирования дифференциальных уравнений используются различные подходы: методы конечных разностей и конечных объемов, спектральные методы и т. д.

Широкое применение в численных расчетах нашли методы интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса с дроблением разностной сетки в окрестности больших градиентов газодинамических величин и использования грубой сетки в области гладкости течения (AMR-Adaptive Mesh Refinement). Следует иметь в виду, что при использовании AMR подхода в расчете может возникать нефизическая "сеточная турбулентность" (паразитические осцилляции из-за неравномерности

сетки), а для явных схем интегрирования такой подход приводит к уменьшению счетного шага (для обеспечения условий устойчивости) и, как следствие, к удорожанию расчета. Некоторые возможности такого подхода продемонстрированы в работе [20] на примере моделирования неустойчивости, возникающей на КГ тонкого газового слоя, ускоряемого УВ. Как показали результаты численного моделирования, при постановке расчета во всех случаях для качественного описания данных экспериментов необходимо использовать достоверную информацию о величине амплитуды и длины волны начального возмущения.

Возможности численного описания развития ширины зоны ТП в известных экспериментах с использованием DNS методов можно оценить по результатам работ [21–24]. В работе [21] представлены результаты 2D моделирования опытов по развитию ТП на границе Air-SF₆ при числе Маха падающей на КГ ударной волны M = 1,21. Получено хорошее согласие между экспериментальными, теоретическими и численными результатами по развитию ширины зоны ТП после прохождения УВ через КГ (до момента взаимодействия сформировавшейся ЗТП с УВ, отраженной от торца трубы). Там же приведены 2D и 3D результаты расчетов экспериментов [15]. Демонстрируется, что результаты 3D моделирования лучше описывают экспериментальную ширину ЗТП, чем данные 2D расчета.

В работе [22] сообщаются данные по сравнению ширины зоны ТП на КГ SF₆-Air, полученные в эксперименте, 2D и 3D расчетах. Авторы отмечают хорошее согласие между 2D вычислениями и экспериментальными данными. В то же время 3D результаты дают несколько меньшую ширину зоны ТП. Наблюдаемые расхождения авторы объясняют использованием в расчете недостаточно подробной разностной сетки. Развитие ТП под действием УВ, падающей на КГ Kr-Xe при M = 3,5 и на КГ SF₆-Air при M = 1,45, исследовалось в 2D расчетах [23, 24]. Моделирование ТП выполнено с применением эйлерово-лагранжевого (ALE-Arbitrary Lagrangian Eulerian) подхода в сочетании с методом концентраций.

Анализируя данные, приведенные в рассмотренных работах, можно заключить, что авторам в большинстве случаев удалось получить с помощью прямого численного моделирования согласие численных результатов

с экспериментальными данными по ширине зоны ТП. Однако немногочисленные опубликованные результаты DNS моделирования характеристик турбулентности оставляют желать лучшего.

Методы моделирования крупных вихрей. При высоких числах Re турбулентное течение содержит вихри самых различных размеров. Вследствие неустойчивости основного течения в потоке генерируются большие вихри. Движение этих крупных вихрей также неустойчиво и порождает мелкие вихри, которые, в свою очередь, передают энергию к еще более мелким вихрям. В результате многократных превращений крупных вихрей в мелкие (при этом происходит кас-

кадный перенос энергии от крупных вихрей к мелким) размеры вихрей становятся настолько малыми, что основную роль в их движении начинают играть силы вязкости, которые приводят к диссипации кинетической энергии турбулентности в тепловую (внутреннюю) энергию.

Как отмечалось выше, DNS моделирование на недостаточно подробной сетке пригодно для моделирования крупных вихрей, но не позволяет разрешить мелкомасштабную турбулентность, когда размеры вихрей меньше линейного размера счетной точки. Для преодоления трудностей, связанных с разрешением мелкомасштабной турбулентности, в последние годы развиваются методы моделирования крупных вихрей (LES – Large-Eddy Simulation).

Рассмотрим идею LES методов на примере решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемых жидкостей и уравнения неразрывности, записанных в тензорной форме

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right];$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Известно, что в турбулентных течениях поля газодинамических величин пульсируют около некоторого среднего положения. Как обычно представим мгновенные поля скорости (u_i) и давления (p) в виде суммы осредненного (фильтрованного) и пульсационного полей

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad p = \bar{p} + p'.$$

Для того чтобы получить относительно простые уравнения для фильтрованных величин, скорость усредняется по Фавру (усреднение с весовой функцией – плотностью). Применяя к выписанным исходным уравнениям Навье-Стокса и неразрывности операцию фильтрации, получим

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right];$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0.$$

При выводе последних уравнений использовались определения $\bar{u}' = 0$, $\bar{p}' = 0$. Введем обозначение

$$\tau_{ij} = -\rho \left(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \right).$$

В методе моделирования крупных вихрей τ_{ij} называется подсеточным напряжением Рейнольдса (SCS – SubGrid Scale stress). С учетом принятого обозначения, фильтрованные уравнения перепишем в виде

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right];$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0.$$

Сравнивая исходные и фильтрованные уравнения, замечаем, что в фильтрованных уравнениях вместо мгновенных значений скорости и давления используются осредненные значения этих величин и присутствует одно дополнительное слагаемое. Это указывает на то, что фильтрованные уравнения будут (как и исходные уравнения) пригодны для описания крупномасштабных вихрей, а для описания мелкомасштабной турбулентности следует использовать возможности дополнительного слагаемого.

Для разрешения мелкомасштабной турбулентности на грубых разностных сетках Смагоринский [25] предложил вычислять τ_{ij} через вихревую вязкость:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = 2\mu_t \bar{S}_{ij};$$

$$\mu_t = \rho (C_s \Delta)^2 |\bar{S}|; \quad |\bar{S}| = \sqrt{\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}},$$

где μ_t – вихревая вязкость; Δ – ширина фильтра, который пропорционален линейному размеру ячейки; C_s – постоянная Смагоринского. Общий класс фильтров для LES методов рассмотрен в работе [26] и здесь не обсуждается. Предполагается, что при таком подходе, в отличие от методов прямого численного моделирования, уже не требуется измельчения сетки, чтобы описать мелкомасштабную турбулентность.

Модель Смагоринского для определения вихревой вязкости использовалась многими авторами при моделировании различного класса турбулентных течений. В результате было установлено, что одно и то же значение постоянной Смагоринского непригодно для описания различных классов рассчитываемых течений. В работе [27] для определения вихревой вязкости предложен динамический метод, в котором коэффициент вихревой вязкости не является постоянной величиной, а зависит от характеристик течения и вычисляется для каждой ячейки разностной сетки.

В настоящее время модели турбулентности с масштабами меньшими линейного размера счетной ячейки, все более совершенствуются. Для получения высокой разрешимости в LES методах используются разностные схемы высокого порядка точности (смотри, например, [28]). Повышение точности LES методов направлено на уменьшение диссипативной ошибки и устранение "сеточной турбулентности".

К-ε модель. В методах прямого численного моделирования и LES методах существует проблема описания мелкомасштабной турбулентности. В этой связи для численного моделирования турбулентных течений разрабатываются альтернативные подходы. Одним из таких подходов является построение математических моделей, основанных на разбиении системы уравнений Навье-Стокса на две подсистемы: одна – для определения осредненного течения, другая – для вычисления

пульсационных составляющих. Для получения уравнений мгновенные (истинные) значения газодинамических величин представляются в виде

$$\phi = \bar{\phi} + \phi',$$

где $\bar{\phi}$ – усредненное по ансамблю реализаций значение, а ϕ' – флуктуации (пульсации) соответствующей величины.

Такой подход имеет принципиальный недостаток: система уравнений для осредненного течения является незамкнутой. К настоящему времени проблема замыкания системы не разрешена строго математически. Поэтому для замыкания уравнений привлекаются какие-либо приближенные теоретические гипотезы, которые строятся на анализе экспериментальных данных. Построенные таким образом модели называются полуэмпирическими. Одной из наиболее известных и широко используемых полуэмпирических моделей турбулентности является К-ε модель.

Идея описывать турбулентность локальными характеристиками турбулентности как кинетическая энергия (К) и ее масштаб принадлежит А. Н. Колмогорову [29, 30]. Уравнение для К было получено А. Н. Колмогоровым из энергетических соображений. Впервые уравнение для скорости диссипации турбулентной энергии (ε) получил Б. И. Давыдов [31, 32]. Впоследствии Launder с соавторами [1, 33] развили модель с двумя уравнениями для К и ε и использовали ее при расчете свободных сдвиговых и пристенных течений. С тех пор над совершенствованием модели работало много авторов. В результате на сегодняшний день существует несколько версий К-ε модели (смотри, например, [34–36]).

Работы, в которых К-ε модель используется для моделирования ТП, возникающего на КГ газовых слоев под действием УВ, на сегодняшний день практически отсутствуют. Отметим работу [37], в которой рассчитывается ТП на границе ПВ-Air (ПВ-продукты взрыва) и приводятся сравнительные данные по ширине ЗТП (см. рис. 5 в [37]).

Довольно ясно, что возможности К-ε модели для описания сложных турбулентных течений ограничены. Во-первых, К-ε модель не моделирует анизотропию турбулентных вихрей, что сужает класс рассчитываемых течений. Во-вторых, К-ε модель не учитывает пульсации плотности в турбулентном поле, что важно в расчетах развития ТП на КГ с большими перепадами плотностей. Как было отмечено выше, численное моделирование турбулентности в газовых системах при наличии ударных волн с использованием К-ε модели вызывает затруднения, а имеющиеся проблемы связаны с большими градиентами газодинамических величин на фронте конечно-разностной УВ. Для преодоления отмеченных трудностей в работе [36] на фронте УВ величина турбулентных потоков ограничивается алгебраическими соотношениями с использованием условий реализуемости. В таком виде К-ε модель апробирова-

лась на известных экспериментах [2, 12]. Сравнение результатов численного моделирования выполнено по ширине зоны ТП. Можно отметить удовлетворительное согласие с данными экспериментов.

Multiple-time-scale подход. Как было отмечено выше, полуэмпирические модели турбулентности используют подход Рейнольдса, основанный на представлении мгновенных значений газодинамических величин в виде суммы осредненной и пульсационной составляющих. В результате такого представления мгновенных значений газодинамических величин исходная система уравнений Навье-Стокса разбивается на две подсистемы: одна – для определения осредненного течения, другая – для вычисления пульсационных составляющих. Таким образом, классические модели используют для описания турбулентного поля один масштаб турбулентности (один временной масштаб). Физически это означает использование гипотезы об универсальности формы спектра. В действительности турбулентность характеризуется широким спектром флуктуаций с различными амплитудами и длинами волн и турбулентных взаимодействий, связанных с различными частями спектра.

В работе [38] описывается оригинальная идея, основанная на представлении мгновенных значений газодинамических величин в виде суммы конечного ряда. Например, для компонент скорости это представление записывается в виде

$$u_i = \bar{u}_i + u_i^1 + u_i^2 + u_i^3 + \dots + u_i^n,$$

где \bar{u}_i – усредненное по ансамблю реализаций значение мгновенной скорости, а u_i^m – флуктуации скорости в диапазоне волновых чисел $k_{m-1} < K < k_m$, $1 \leq m \leq n$, $k_0 = 0$. Границы разбиения пульсаций по волновым числам в процессе вычислений изменяются, поскольку диапазон распределения энергии по спектру с течением времени может отличаться от начального. При таком подходе для моделирования турбулентности в каждом диапазоне волновых чисел можно использовать какую-либо модель ТП.

Идея работы [38] в упрощенном виде была реализована и представлена в [39]. При описании турбулентного поля использовались два характерных масштаба длины. Энергетический спектр разделяется на два диапазона по волновым числам: первый диапазон связан с малыми волновыми числами (энергосодержащими вихрями), второй – со средними и большими волновыми числами (вихри конечного размера в диапазоне переноса и диссипации энергии). Для моделирования турбулентного поля как в первом, так и во втором диапазонах используются уравнения К-ε модели. Связь уравнений на границах диапазонов осуществляется через поток энергии между первым и вторым спектральными диапазонами и через поток энергии между второй спектральной областью и диссипативной областью, соответствующей колмогоровскому масштабу.

В работе [40] two-time-scale подход с К-ε моделью турбулентности использовался при моделировании опыта Ватге [18]. Получены близкие к эксперименту результаты.

Модель В. В. Никифорова. В начале 70-х годов прошлого столетия сотрудниками теоретического и математического отделений ВНИИЭФ были начаты работы по разработке методик и программ для моделирования одномерных течений с учетом ТП. Среди предложенных моделей наибольшее развитие получила полуэмпирическая модель В. В. Никифорова [41]. Отметим три важные проблемы численного моделирования ТП, которые не удалось должным образом решить В. В. Никифорову из-за отсутствия быстродействующих вычислительных систем с большой памятью, неразвитостью теоретических моделей для расчета этапа развития неустойчивости, недостатком экспериментальной информации для всесторонней верификации модели. Первая проблема связана с методом инициализации ТП, вторая проблема заключается в построении сходящегося разностного решения уравнений ТП на последовательности измельчающихся сеток, третья проблема – взаимодействие турбулентного поля с УВ (подробности смотри в [5]).

Начиная с 1999 г., В. И. Козловым в рамках методики ВИХРЬ [4] ведется работа по совершенствованию полуэмпирической модели ТП, предложенной В. В. Никифоровым. В результате были разработаны схема описания взаимодействия УВ с турбулентным полем и алгоритм инициализации ТП, основанный на анализе развития возмущения контактной границы (второй способ инициализации ТП предложен в работе [42]). Кроме того, предложена модификация ряда корреляций, используемых в модели Никифорова, таких, как обменный тензор и коэффициент турбулентной диффузии. Предложенные В. И. Козловым модификации модели В. В. Никифорова позволили улучшить качество моделирования некоторых характеристик турбулентности и обеспечить сходимость решения на последовательности сгущающихся сеток [8, 9].

При численном описании взаимодействия турбулентного поля с УВ в модифицированной В. И. Козловым модели ТП интегрируется уравнение для скорости диссипации отличное от уравнения вне фронта. Для определения точек конечно-разностной сетки, принадлежащих фронту УВ, в рамках методики ВИХРЬ было разработано несколько алгоритмов (см., например, [5, 8]).

Дальнейшее уточнение модели В. В. Никифорова и улучшение точности результатов расчетов будет связано с совершенствованием диагностических методов и приборов, предназначенных для обработки экспериментальных данных (необходимо извлекать более точную информацию о характеристиках турбулентности), повышением качества теоретических исследований и доработкой численных методик.

На сегодняшний день усовершенствованная модель В. В. Никифорова является единственной, которая с удовлетворительной точностью описывает характери-

стики турбулентности как в опыте Varge [18], так и в опыте Roggi [19].

BHR модель. Отправной точкой для вывода полуэмпирической модели BHR (Besnard, Harlow, Rauen-zahn) служат уравнения Навье-Стокса для сжимаемой жидкости, уравнение неразрывности, энергии и уравнение для массовой концентрации [43, 44]. Подобно многим другим классическим моделям турбулентности BHR модель основана на разложении гидродинамических переменных на средние и пульсационные составляющие. Как и при выводе модели В. В. Никифорова, в BHR модели мгновенные значения плотности представляются в виде суммы $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, где $\bar{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \rho_n$ – усреднение по ансамблю реализаций, $\bar{\rho}' = 0$. Мгновенные значения скорости (U), внутренней энергии (E) и массовой концентрации (c) усредняются по Фавру (усреднение с весовой функцией – плотностью). Отличительная особенность модели состоит в том, что она включает все корреляции второго порядка, которые могут быть выведены из флуктуаций скорости и плотности.

При замыкании системы уравнений корреляции высокого порядка выражаются через корреляции второго порядка. Система уравнений состоит из четырех уравнений для средних величин (ρ , U , E , c) и восьми уравнений для корреляций k , k_{\perp} , a_x , B , D , D_{\perp} , D_{ax} , D_B , где $k = Tr(K_{ij}) = K_{xx} + K_{yy} + K_{zz}$ – турбулентная кинетическая энергия (след тензора K_{ij}); x , y , z – пространственные координаты; $K_{ij} = (\overline{\rho u_i u_j} - \rho u_i u_j) / \rho$; $k_{\perp} = k - (\overline{\rho u_x u_x} - \rho u_x u_x) / \rho$; $a_x = \overline{\rho' u_x'} / \rho$ – поток турбулентной массы в основном направлении течения; $B = \overline{\rho' \rho'} / \rho$ – двойная корреляция пульсаций плотности; $D = Tr(D_{ij}) = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}$ – диссипативная функция для k ; $D_{\perp} = D - \frac{\partial u_x'}{\partial x_k} \frac{\partial u_x'}{\partial x_k}$ – диссипативная функция для k_{\perp} ; $D_{ax} = \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial u_x'}{\partial x_k}$ – диссипативная функция для a_x ; $D_B = \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial \rho'}{\partial x_k}$ – диссипативная функция для B . BHR модель содержит 17 модельных констант.

Можно отметить, что в BHR модели для описания характеристик турбулентности используется уравнений больше, чем в модели В. В. Никифорова. Как отмечают авторы [45], модель создавалась для описания течений, в которых неустойчивость развивается под действием УВ. Отметим, что пока по BHR модели не удалось получить описание экспериментальных данных по харак-

теристикам турбулентности.

Модель с пятью уравнениями. Следующая модель (будем называть ее GSG моделью), предложенная французскими исследователями, представлена в работах [46, 47]. В GSG модели каждая величина является случайной переменной и представляется в виде суммы среднего значения и пульсационной составляющей. Как обычно, плотность и давление усредняются по ансамблю реализаций, скорость (u), внутренняя энергия (e) и массовая концентрация (c) – по Фавру. Помимо уравнений для средних газодинамических величин модель включает в себя пять уравнений для описания турбулентных величин: $R_{11} = \overline{\rho u'' u''} / \bar{\rho}$, $R_{22} = \overline{\rho v'' v''} / \bar{\rho}$ – две компоненты тензора напряжений Рейнольдса; ε – скорость диссипации в предположении изотропности турбулентности; $\overline{u''} = -\overline{\rho' u''} / \bar{\rho}$ – поток турбулентной массы; $\overline{\rho'^2}$ – квадрат пульсаций плотности (один штрих у величины означает осреднение по Рейнольдсу, два штриха – осреднение по Фавру). Уравнения для корреляций получены из усредненных уравнений Навье-Стокса, уравнения неразрывности и внутренней энергии. Для учета анизотропии тензора напряжений Рейнольдса используется тензорная турбулентная диффузия. GSG модель содержит 15 модельных констант.

Одномерная версия модели реализована в пакете программ MELT-20. GSG модель использовалась для моделирования опытов [15, 19], проведено сравнение с данными DNS моделирования. Удовлетворительные результаты достигнуты при описании опыта Roggi.

Многокомпонентные (многофазные) методики. В английском научном центре (Atomic Weapons Establishment, Aldermaston) для моделирования турбулентных течений с 1982 года группой D. Youngs разрабатывается 3D методика (TURMOIL 3D), основанная на интегрировании системы уравнений Эйлера для двух компонент [48–50]. Модель включает два уравнения неразрывности (для каждой компоненты смеси), два уравнения переноса импульса, два уравнения для переноса внутренней энергии, уравнение для кинетической энергии турбулентности и уравнение для определения турбулентного масштаба длины [51]. Для замыкания системы уравнений используются феноменологические связи между компонентами (фазами) с учетом сил сопротивления, диффузии (массовой, турбулентной), диссипации, добавочной массы. Уравнение для кинетической энергии турбулентности берется как и в К- ε модели. Для скорости диссипации кинетической энергии используется простейшее соотношение

$\varepsilon = 0,09 \rho k^{0,5} / \ell_t$, где ℓ_t – турбулентный масштаб длины. Дальнейшие подробности описания физической модели, численной методики и некоторых результатов расчетов можно найти в работах [52–54]. Следует отметить, что каких-либо данных о сравнении результатов расчетов, полученных с использованием многокомпонентных методик, с экспериментальной информацией по моделированию характеристик турбулентности, возникающей из неустойчивости Рихтмайера – Мешкова,

не было опубликовано.

Спектральные методы. В последние годы исследователи обратили внимание на важность минимизации погрешности аппроксимации дифференциальных уравнений (при их замене конечно-разностным методом) при численном моделировании турбулентности с использованием DNS и LES методов. В работе [55] отмечается, что успех применения LES методов зависит не только от выбранной подсеточной модели для вычисления напряжений Рейнольдса, но и определяется точностью используемой численной модели.

В качестве альтернативы использования конечно-разностных методов решения дифференциальных уравнений рассматриваются спектральные методы (с целью минимизации погрешности аппроксимации). Главным достоинством спектральных методов следует считать высокую скорость сходимости решения. Вследствие высокой точности спектральных методов при одном и том же объеме вычислений можно исследовать течения с более высокими числами Рейнольдса. Спектральные методы в основном используются при расчете простых турбулентных течений, но в силу своей неразвитости не имеют применения в численном моделировании ТП при наличии УВ [56, 57].

Методика ВНИИТФ. Как и в РФЯЦ-ВНИИЭФ, развитие методик расчета ТП в РФЯЦ-ВНИИТФ имеет давнюю историю. В методиках РФЯЦ-ВНИИТФ реализовано несколько моделей учета ТП. Первая модель (ℓ -v модель), предназначенная для оценки ширины зоны ТП, развита В. Е. Неуважаевым [58] как обобщение модели Беленького-Фрадкина [59]. Помимо ℓ -v модели, для расчета одномерных турбулентных течений В. Е. Не-уважаев и В. Г. Яковлев [34] широко использовали также К- ϵ модель. Эти модели совершенствовались авторами на протяжении длительного времени, оставаясь основным инструментом для численного исследования широкого класса течений с учетом ТП.

В последние годы в рамках одномерной методики MUZA М. Анучин и М. Анучин [60] развивают более сложную полуэмпирическую модель, основанную на представлении мгновенных значений газодинамических величин в виде суммы усредненной и пульсационной составляющих. О возможностях разрабатываемой модели можно будет говорить, когда появятся результаты моделирования каких-либо экспериментов.

2. Проблемы численного моделирования

В предыдущем разделе рассмотрено несколько подходов и методов моделирования турбулентных течений. Разумеется, приведенная в работе информация является неполной. Дополнительная информация по методам моделирования ТП представлена в [61]. Таким образом, на сегодняшний день существует довольно много подходов для моделирования турбулентных течений. Тем не менее качество численного моделирова-

ния не всегда удовлетворяет желаниям исследователей. В связи с этим остановимся на некоторых проблемах численного моделирования течений с учетом ТП, которые оказывают заметное влияние на качество решения.

О разрешимости масштабов турбулентности. Некоторое время назад на основе теоретических оценок был сделан пессимистический вывод о возможности численного моделирования развитой турбулентности на основе DNS методов на существующих вычислительных машинах. Действительно, при больших числах Рейнольдса (Re) наибольший масштаб турбулентности (L) в случае однородной турбулентности составляет величину линейного размера наибольших вихрей. В качестве наименьшего масштаба длины (ℓ) в турбулентности принимается диаметр вихрей, вклад которых максимален в процесс диссипации турбулентной энергии в тепловую энергию. Для течений при больших числах Re была получена оценка числа точек разностной сетки, необходимых для разрешения в одномерном расчете всех масштабов турбулентности $M \sim L/\ell \approx \text{Re}^n$, где $n \approx 3/4$ в случае однородной турбулентности [62] и $n \approx 7/8$ в случае течения в канале. В настоящее время величина M^3 используется как нижний предел для числа точек разностной сетки, необходимых при использовании DNS методов для описания всех масштабов в трехмерных турбулентных течениях. Согласно этой оценке для моделирования развитой однородной турбулентности ($\text{Re} \sim 10^6 \div 10^8$) следует использовать сетку с числом точек $M^3 \sim \text{Re}^{9/4} \approx 3 \cdot 10^{13} \div 10^{18}$, что требует нереально больших затрат компьютерного времени. Из этой оценки (и данные расчетов это подтверждают) также вытекает, что DNS методы можно с успехом использовать при моделировании течений жидкостей, имеющих большую вязкость (малые числа Re). Отсюда можно заключить, что расчеты развитой турбулентности на грубых сетках позволяют разрешить крупномасштабную турбулентность, но остаются неразрешенными масштабы турбулентности, которые меньше минимального размера счетной ячейки.

Чтобы устранить проблему разрешимости масштабов были разработаны методы подсеточного моделирования (LES), которые позволяют на грубой сетке получить разрешение масштабов турбулентности, близкое к DNS моделированию, выполненному на более подробной сетке.

Неравномерная разностная сетка, возникновение "сеточной турбулентности", преобладание схемной вязкости над физической. Рассмотрим, какую роль оказывают ошибки разностной аппроксимации дифференциальных уравнений на качество численного решения. Известно [63], что в погрешность разностных схем входят дисперсионные слагаемые, которые являются причиной немонотонности численного решения

в окрестности больших градиентов газодинамических величин или при использовании в расчете неравномерной разностной сетки. Для подавления паразитических

осцилляций численного решения в разностные схемы, как правило, вводится дополнительное диссипативное

слагаемое (счетная вязкость), которое увеличивает дис-

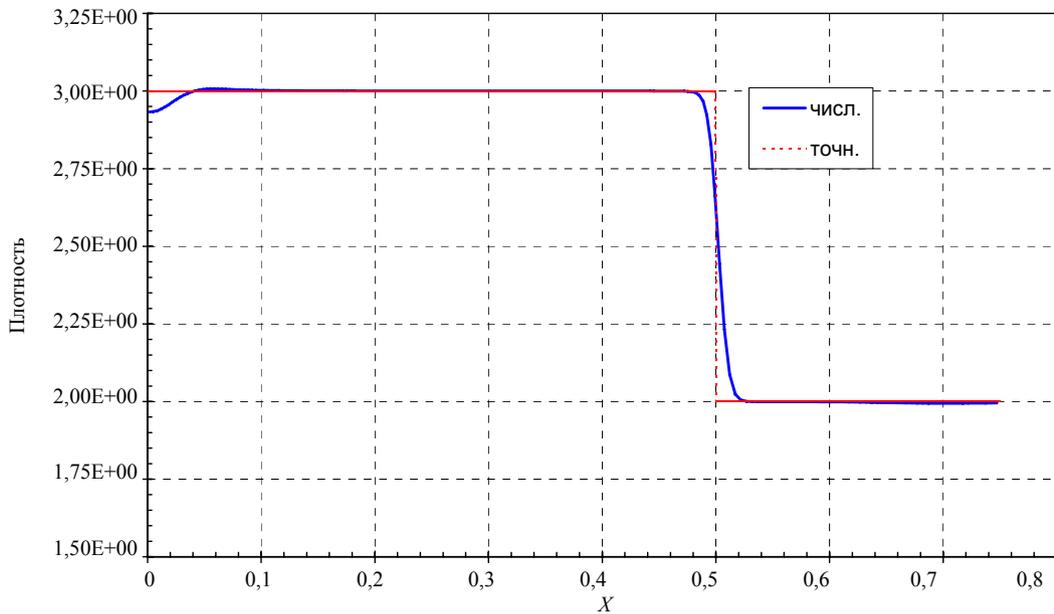


Рис. 1. Профиль плотности, $M = 200$, $t = 1,25$

диссипативную ошибку. Более сложный в реализации способ уменьшения амплитуды осцилляций заключается в уменьшении дисперсионной ошибки используемой разностной схемы.

Чтобы продемонстрировать влияние дисперсионной ошибки на качество решения одномерных уравнений газовой динамики по схеме второго порядка точности, рассмотрим следующую задачу. В области $0 \leq x \leq 2$ находится газ с параметрами: $\rho_1 = 1,0$, $u_1 = 0$, $E_1 = 0,0$. Левая граница – жесткая стенка. К правой границе прикладывается постоянное давление $p_2 = 2$. Уравнение состояния – идеальный газ с $\gamma = 3$. В результате приложенного давления на правой границе формируется УВ, которая движется по направлению к левой границе, отражается от левой границы при $t = 1$ и затем движется направо. Задача считалась на равномерной и неравномерной разностных сетках с использованием квадратичной искусственной вязкости. Для уменьшения энтропийного следа, возникающего на левой границе счетной области в процессе формирования УВ, в расчете использовался метод искусственной теплопроводности.

Профиль плотности, полученный в расчете на равномерной сетке с числом точек $M = 200$, на момент времени $t = 1,25$ приведен на рис. 1. Как следует из рис. 1, на равномерной разностной сетке рассчитанный профиль плотности является монотонной функцией координаты.

Эта задача была также решена на неравномерной разностной сетке. В интервале $0 \leq x \leq 0,5$ сетка была расставлена равномерно по расстоянию ($M_1 = 33$). В интервале $0,5 \leq x \leq 1,0$ было взято 70 точек со знаменателем геометрической прогрессии $q = 0,975$. В интервале $1,0 \leq x \leq 1,5$ было взято 70 точек со знаменателем

геометрической прогрессии $q = 1,025$. В интервале $1,5 \leq x \leq 2,0$ сетка была расставлена равномерно по расстоянию ($M_4 = 33$). Результаты этих расчетов без использования метода искусственной теплопроводности представлены на рис. 2. Приведенные результаты демонстрируют появление "сеточной турбулентности" во всей области течения за фронтом УВ.

Сопоставление результатов, приведенных на рис. 1 и 2, показывает, что наличие "сеточной турбулентности" в расчетах течений с учетом ТП, выполненных на неравномерных сетках, может заметно изменить характеристики турбулентного поля по сравнению с расчетами, выполненными на равномерной сетке.

Второй тип погрешности – диссипативная ошибка разностной схемы – в расчетах развитой турбулентности приводит к преобладанию схемной (счетной) вязкости над физической. Поскольку на неравномерных сетках счетное число Re является функцией линейного размера ячейки и характеристик течения, а не физической вязкости, рассчитанные DNS или LES методами характеристики турбулентности могут не соответствовать физике процесса.

Чтобы уменьшить влияние схемных погрешностей на качество моделирования в последние годы уделяется все большее внимание вопросам повышения точности численных методик и обоснованию результатов расчетов. Например, в работе [64] развита оптимизированная разностная методика для LES моделирования турбулентных течений при наличии сильных УВ.

Инициализация ТП. При численном моделировании ТП в слоистых системах с использованием как полумэмпирических моделей турбулентности, так и мето-

дов прямого численного моделирования существует проблема инициализации ТП. Действительно, полуэмпирические модели турбулентности предназначены

лишь для расчета развитой турбулентности и не пригодны для расчета этапа развития неустойчивости. Этап

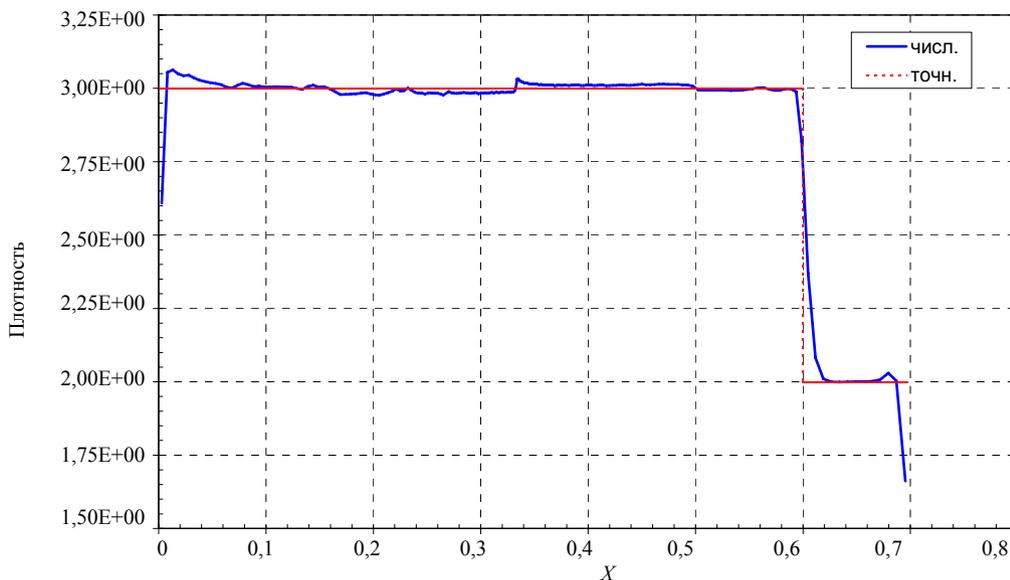


Рис. 2. Профиль плотности, $t = 1,3$

развития неустойчивости и переход к ТП в таких методиках должен рассчитываться с использованием каких-либо теоретических моделей или путем прямого численного моделирования. В такой ситуации к моменту включения в расчет полуэмпирической модели турбулентности необходимо на каждой контактной границе определить параметры инициирования ТП: время перехода от этапа развития неустойчивости к ТП (время включения уравнений ТП в расчет), ширину начальной (возмущенной) зоны и значения турбулентных величин в начальной зоне (начальные и граничные условия для корректной постановки дифференциально-разностной задачи). В DNS и LES методах этап развития неустойчивости рассчитывается без привлечения других методов, а инициализация ТП заключается лишь в задании начальной шероховатости на КГ.

В настоящее время для расчета этапа развития неустойчивости в методиках ИТМФ, основанных на модели В. В. Никифорова, используются два метода инициализации ТП [8, 42], которые позволяют определить начальную информацию для решения уравнений ТП. В методах инициализации [8, 42] предполагается, что шероховатость падающей на контактную границу УВ равна нулю (фронт УВ является идеально плоским). В некоторых задачах это не так. Например, встречаются опыты, в которых УВ формируется из детонационной волны, образующейся при инициировании взрывчатого вещества в конечном числе точек, расположенных на некотором удалении друг от друга. В таких опытах фронт УВ перестает быть плоским, и требуется уточнение модели для расчета развития неустойчивости.

Основная неопределенность методов инициализа-

ции ТП [8, 42] обусловлена отсутствием точных знаний о значениях амплитуды (a_0) и волнового числа (k_0) начального возмущения. Однако следует иметь в виду, что при расчете линейного этапа развития неустойчивости по теоретическим моделям вместо двух неопределенных параметров (a_0 и k_0) требуется задать лишь их комбинацию $a_0 k_0$ (в линейной теории скорость роста амплитуды зависит от произведения $a_0 k_0$). При этом в большинстве случаев можно дополнительно привлекать условие малости амплитуды начального возмущения $a_0 k_0 \ll 1$. В расчетах нелинейной стадии развития неустойчивости значения амплитуды и длины начального возмущения выбираются на основе накопленного опыта при численном моделировании экспериментов.

Сложность моделирования турбулентных течений настолько значительна, что каждый расчет задачи представляет собой небольшое научное исследование и требует обязательного обоснования полученных результатов (сравнение с теоретическими моделями расчета этапа развития неустойчивости и данными экспериментов, выполнение расчетов на сходимости при измельчении разностной сетки и т. д.).

Отметим, что полуэмпирические модели турбулентности имеют, по крайней мере, два важных преимущества перед DNS и LES моделированием:

- нет проблемы разрешимости масштабов и, следовательно, не требуется мелкой разностной сетки при проведении расчета;

- несмотря на то, что “сеточная турбулентность” имеет место при расчете мгновенных значений газодинамических величин, она не может оказывать заметного влияния на точность описания характеристик турбу-

Заключение

В работе дано краткое описание современных методик расчета ТП. При разработке новых методик или сопоставлении возможностей уже существующих не следует забывать, что имеются, по крайней мере, две проблемы, без решения которых нельзя с уверенностью сказать, какая методика точнее моделирует турбулентные течения. Первая проблема (проблема инициализации турбулентности) касается всех без исключения физических моделей и численных методик. Ввиду отсутствия точных знаний о величине амплитуды и длины волны начального возмущения контактной границы, критерия перехода от неустойчивости к ТП эта проблема остается до сих пор острой. Вторая проблема (повышение точности численных методик для устранения "сеточной турбулентности") в большей степени важна при использовании DNS и LES методов, чем при использовании полуэмпирических моделей турбулентности. Это означает, что какую бы физическую модель турбулентности мы ни разработали, результаты расчетов по модели будут зависеть от качества решения указанных проблем.

Работа выполнялась при частичной финансовой поддержке научной школы академика РАН Ю. А. Трутнева (код школы: НШ-5406.2006.2).

Список литературы

1. Launder B. E., Reece G. J., Rodi W. // *J. Fluid Mech.* 1975. Vol. 68. Part 3. P. 537.
2. Андронов В. А., Бахрах С. М., Мешков Е. Е., Никифоров В. В., Певницкий А. В., Толшмяков А. И. Экспериментальное исследование и численное моделирование турбулентного перемешивания в одномерных течениях // Докл. АН СССР, 1982. Т. 264, N 1. С. 76–82.
3. Никифоров В. В. Турбулентное перемешивание на контактной границе разноплотных сред // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1985. Вып. 1. С. 3.
4. Андронов В. А., Козлов В. И., Никифоров В. В., Разин А. Н., Юдин Ю. А. Методика расчета турбулентного перемешивания в одномерных течениях (методика ВИХРЬ) // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 2. С. 59.
5. Разин А. Н., Долголева Г. В., Мжачих С. В., Рожков А. А., Шапоренко Е. В., Юдинцев В. Ф. Развитие методик и программ расчета турбулентных течений с использованием модели В. В. Никифорова // Там же. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2007. Вып. 1. С. 121.
6. Козлов В. И., Разин А. Н. Поведение средних квадратов пульсаций скорости при взаимодействии зоны турбулентного перемешивания с ударными волнами // Там же. 2001. Вып. 3. С. 3.
7. Разин А. Н. Численное моделирование турбулентного перемешивания по модели В. В. Никифорова. Проблемы и пути развития // Там же. 2003. Вып. 1–2. С. 3.
8. Козлов В. И. Моделирование взаимодействия ударных волн и турбулентности // 8^е Харитоновские тематические научные чтения. 2006. С. 258.
9. Козлов В. И., Сапожников И. В. Моделирование нестационарных турбулентных течений на основе модифицированной модели Никифорова // 8^е Харитоновские тематические научные чтения. 2006. С. 266.
10. Мешков Е. Е. Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1969, N 5. С. 151.
11. Зайцев С. Г., Лазарева Е. В., Чернуха В. В., Беляев В. М. // Докл. АН СССР. 1985, N 1. Т. 283. С. 94.
12. Brouillette M., Sturtevant B. // *Phys. Fluids A.* 1993. Vol. 5(4). P. 916.
13. Bliznetsov M. V., Vlasov Y. A., Dudin V. I. et al // *Proceedings 6th IWPCTM, Marseille, France.* 1997. P. 90.
14. Erez L., Sadot O. et al // *Shock Wave.* 2000. Vol. 10. P. 241.
15. Vetter M., Sturtevant B. // *Shock Wave.* 1995. Vol. 4. P. 247.
16. Houas L., Chemouni I. // *Phys. Fluids.* 1996. Vol. 8(2). P. 614.
17. Jourdan G., Houas L., Haas J.-F., Ben-Dor G. // *J. Fluid Mech.* 1997. Vol. 349. P. 67.
18. Barre S., Alem D. and Bonnet J. P. Experimental Study of a Normal Shock/Homogeneous Turbulence Interaction // *AIAA Journal.* 1996. Vol. 34, N 5. P. 968.
19. Poggi F., Thorembe M.-H., Rodriguez G. // *Phys. Fluids.* 1998. Vol. 10, N 11. P. 2698.
20. Baltusaitis R.M., Gittings M.L., Weaver R.P. et al // *Phys. Fluids.* 1996. Vol. 8. P. 2471.
21. Schilling O., Latini M., Don Wai-Sun, Bihari B. Investigation of the large-scale and statistical properties of Richtmyer-Meshkov instability-induced mixing // *Proceedings 9th IWPCTM, 2004, Cambridge, UK.*
22. Lacassin G., Poggi F., Rodriguez G. Experiment and numerical computation on a large-scale Richtmyer-Meshkov instability // *Proceedings 6th IWPCTM, 1997, Marseille, France.* P. 289.
23. Mugler C., Gauthier S. 2D Navier-Stokes Simulation of Richtmyer-Meshkov Instability in Shock Tube // *Proceedings 6th IWPCTM, 1997, Marseille, France.* P. 356.
24. Mugler C., Gauthier S. Two-dimensional Navier-Stokes simulation of gaseous mixture induced by Richtmyer-Meshkov instability // *Physics of Fluids.* 2000. Vol. 12(7). P. 1783.
25. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment // *Mon. Weather Rev.* 1963. Vol. 91. P. 99.
26. Vasilyev O., Lund T., Moin P. A General Class of Commutative Filters for LES in Complex Geometries // *J. Comput. Phys.* 1998. Vol. 146. P. 82.
27. Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model // *Phys. Fluids.* 1991. Vol. 3(7). P. 1760.
28. Hill D., Pantano C., Pullin D. Large-eddy simula-

- tion and multiscale modeling of Richtmyer-Meshkov instability with end-wall re-shock // Proceedings 10th IWPCTM, Paris, France, 2006.
29. Колмогоров А. Н. // Докл. АН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299.
30. Колмогоров А. Н. // Изв. АН СССР. Сер. Физическая. 1942. Т. 6, № 1–2. С. 56.
31. Давыдов Б. И. // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 4. С. 768.
32. Давыдов Б. И. // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 5. С. 980.
33. Jones W. P., Launder B. E. // Int. J. Heat Mass Transfer. 1972. Vol. 15. P. 301.
34. Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1988. Вып. 1. С. 28.
35. Янилкин Ю. В., Никифоров В. В., Жарова Г. В. // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 4. С. 79.
36. Gauthier S., Bonnet M. A K-ε model for turbulent mixing in shock-tube flows induced by Rayleigh-Taylor instability // Physics of Fluids. 1990. Vol. 2(9). P. 1685.
37. Stadnik A. L., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmailo V. A. Proceedings 7th IWPCTM. 1999. P. 326, St. Petersburg, Russia.
38. Schiestel R. Multiple-time-scale modeling of turbulent flows in one point closures // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30(3). P. 722.
39. Gleize V., Schiestel R., Couaillier V. Multiple scale modeling of turbulent nonequilibrium boundary layer flows // Phys. Fluids. 1996. Vol. 8(10). P. 2716.
40. Gregoire O., Souffland D., Gauthier S., Schiestel R. A two-time-scale turbulence model for compressible flows: Turbulence dominated by mean deformation interaction // Physics of Fluids. 1999. Vol. 11(12). P. 3793.
41. Andronov V. A., Zhidov I. G., Meshkov E. E., Nevmerzhitskii N. V., Nikiforov V. V., Razin A. N., Rogatchev V. G., Tolshmyakov A. I., Yanilkin Yu. V. Computational and Experimental Studies of Hydrodynamic Instabilities and Turbulent Mixing, LANL (Los Alamos National Laboratory), 1995.
42. Разин А. Н. Развитие неустойчивости Рихтмайера – Мешкова и турбулентное перемешивание в плоской трехслойной газовой системе // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2005. Вып. 1–2. С. 34.
43. Valerio E., Zeitoun D., Jourdan G., Houas L., Besnard D. Comparison between numerical and experimental results for turbulent mixing induced by Richtmyer-Meshkov instability // Proceedings 6th IWPCTM, 1997, Marseille, France. P. 498.
44. Besnard D. C., Haas J. F., Rauenzahn R. M. // Physica. 1989. D 37. P. 227.
45. Valerio E., Jourdan G., Houas L., Zeitoun D., Besnard D. Modelling of Richtmyer-Meshkov instability-induced turbulent mixing in shock-tube experiments // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11(1). P. 214.
46. Souffland D., Gregoire O., Gauthier S., Poggi F., Koenig J. Measurements and simulations of the turbulent energy levels in mixing zones generated in shock tubes // Proceedings 6th IWPCTM, 1997, Marseille, France. P. 486.
47. Gregoire O., Souffland D. Simulations of compressible mixing flows using a second order turbulence model // Proceedings 7th IWPCTM, 1999, St.-Petersburg, Russia. P. 252.
48. Youngs D. // Physica. 1984. D 12. P. 32.
49. Youngs D. // Physica. 1989. D 37. P. 270.
50. Youngs D. // Phys. Fluids A. 1991. Vol. 3(5). P. 1312.
51. Youngs D. // Laser and Particle Beams. 1994. Vol. 12, N 4. P. 725.
52. Williams R., Youngs D. Shock propagation through multiphase media // Proceedings 9th IWPCTM, Cambridge, UK, 2004.
53. Williams R., Youngs D. Richtmyer-Meshkov mixing at stably accelerated interfaces // Proceedings 10th IWPCTM, Paris, France, 2006.
54. Vold E. Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov aspects of interface deceleration mixing // Proceedings 9th IWPCTM, Cambridge, UK, 2004.
55. Ghosal S. Mathematical and physical constraints on large-eddy simulations of turbulence // AIAA J. 1999. Vol. 37(4). P. 425.
56. Guillard H., Male J.-M., Peyret R. Adaptive spectral methods with application to mixing layer computation // J. Comput. Phys. 1992. Vol. 102. P. 114.
57. Creurer B., Gauthier S., Labrosse G. // Proceedings 10th IWPCTM, Paris, France, 2006.
58. Неуважаев В. Е. К теории турбулентного перемешивания // Докл. АН СССР. 1975, № 5. Т. 222. С. 1053.
59. Беленький С. З., Фрадкин Е. С. // Труды ФИАН. 1965. Т.29. С. 207.
60. Anuchin Mikhail., Anuchin Maksim. Second order closure turbulence model (1D code MUZA), empiric constants fitting // Proceedings 9th IWPCTM, Cambridge, UK, 2004.
61. Cheng B. An overview of mix models // Proceedings 10th IWPCTM, Paris, France, 2006. P. 52.
62. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1986.
63. Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985.
64. Hill D. J., Pullin D. I. Hybrid tuned center-difference-WENO method for large eddy simulations in the presence of strong shocks // J. Comput. Phys. 2004. Vol. 194. P. 435.

Статья поступила в редакцию 11.12.2007.