УДК 539.1.01; 514.83

КОНФОРМНАЯ ГЕОМЕТРОДИНАМИКА: ТОЧНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

М. В. Горбатенко

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Рассмотрена нестационарная сферически-симметричная задача для уравнений конформной геометродинамики и получены общие точные решения в квадратурах. Подключение вейлевских степеней свободы позволяет рассматривать задачу при произвольных начальных данных, поскольку для уравнений конформной геометродинамики задача Коши ставится без связей на начальные данные. В явном виде выписаны два точных нестационарных частных решения. Результаты данной работы не ограничены рамками теории возмущений и открывают новые возможности для исследования процесса эволюции пространственно-временных сингулярностей во времени.

1. Введение. Уравнения КГД

Известно, что уравнениями общей теории относительности (ОТО) для пустого риманова пространства может быть описана динамическая эволюция лишь тех пространств, которые на начальной пространственно-подобной гиперповерхности удовлетворяют четырем связям. В случае сферически-симметричной (СфС) задачи наличие связей приводит к тому, что с помощью уравнений ОТО невозможно рассмотреть эволюцию пространства с произвольным сферически симметричным распределением компонент метрического тензора в начальный момент.

Выход из такой ситуации разные исследователи ищут по различным направлениям. Одни – на пути учета в уравнениях ОТО квадратичных по тензору Римана членов (см., например, [1]). Другие – на пути учета флуктуаций поля, нарушающих сферическую симметрию и уносящих мультипольные моменты частиц вблизи горизонта событий в виде теплового излучения Хокинга (см., например, [2]). При этом обычно используемый метод исследования полевых конфигураций (в том числе и сингулярных) состоит в использовании понятия наблюдателя, представляющего собой пробное материальное тело, оснащенное атрибутами системы отсчета и свободно движущееся в рассматриваемом пространстве. То есть используется такой метод, при котором полевая конфигурация считается уже возникшей, ее история возникновения во внимание не принимается. Еще одно направление выхода ведется на пути поиска точных решений уравнений ОТО для тела, порождающего поле Шварцшильда, и частицы, возмущающей это поле независимо от того, сколь малым не было бы отличие от сферичности (см., например, [3]).

Может оказаться, что рассматриваемые во всех этих подходах все или некоторые полевые конфигурации в принципе никогда не могут реализоваться. Это может происходить, например, если динамические уравнения приводят к появлению и развитию поверхностей разрыва вблизи от потенциально возможных мест возникновения сингулярностей. В этих случаях поверхности разрыва по существу могут играть роль регуляризаторов полевых конфигураций, препятствующих формированию сингулярностей.

Однако отмеченный механизм противодействия возникновению сингулярностей заведомо не может возникнуть, если в качестве динамических уравнений используются уравнения ОТО для пустого пространства. Эти уравнения, как известно, допускают лишь слабые разрывы (разрывы только вторых производных от компоненты метрики по нормали) и только на светоподобных поверхностях.

В качестве кандидата на более общие динамические уравнения особый интерес представляют уравнения конформной геометродинамики (КГД), полученные в работе [4] (без лямбда-члена) и в [5] (с лямбда-членом). Уравнения КГД описывают динамику пустого пространства Вейля и, как показано в [6], допускают постановку задачи Коши без связей на начальные данные. Именно это свойство уравнений КГД и позволяет рассматривать временную эволюцию риманова пространства с произвольными начальными данными.

В данной работе мы для простоты рассмотрения ограничимся уравнениями КГД без лямбда-члена. Согласно работе [4], уравнения КГД в этом случае имеют вид

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = T_{\alpha\beta}\,, \tag{1}$$

где

$$T_{\alpha\beta} = -2A_\alpha A_\beta - g_{\alpha\beta}A^2 - 2g_{\alpha\beta}A^\nu{}_{;\nu} + A_{\alpha;\beta} + A_{\beta;\alpha}. \quad (2)$$

Наряду с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ в $T_{\alpha\beta}$, как следует из соотношения (2), входит вектор A_α. Уравнения КГД (1) с тензором $T_{\alpha\beta}$ вида (2) отличаются от уравнений ОТО для пустого пространства

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 0 \quad (3)$$

двумя моментами. Во-первых, наличием в правой части ненулевого тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$. Во-вторых, специфической структурой этого тензора. Вследствие этой структуры уравнения КГД обладают инвариантностью относительно конформных преобразований

$$\left.\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\to g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}e^{2\sigma}; \\ A_\alpha &\to A'_\alpha = A_\alpha - \sigma_{,\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Здесь σ – произвольная скалярная функция.

Первое отличие $\left(T_{\alpha\beta} \neq 0\right)$ ведет к тому, что динамические уравнения начинают допускать существование пространственно-подобных поверхностей разрыва, например, в виде ударных волн. В то же время используемые нами динамические уравнения описывают динамику пустого пространства Вейля. Таким образом, уравнения КГД являются, по существу, реализацией идеи Уилера о чисто геометродинамическом описании материи, но не в римановом пространстве, а в пространстве Вейля. Второе отличие (инвариантность относительно конформных преобразований) приводит к однозначности конструкции тензора $T_{\alpha\beta}$.

Перейдем к рассмотрению СфС задачи.

Напомним, прежде всего, что в ОТО доказано утверждение, известное под названием теоремы Израэля (см. [7]), согласно которому (см., например, [8–10]), решение СфС задачи при плоской асимптотике на бесконечности автоматически является статическим. В такой задаче ничего, кроме решения Шварцшильда или эквивалентного ему (с точностью до координатного преобразования на некоторой карте), получено вообще быть не может.

СфС задача в случае уравнений КГД обладает бо̀льшим разнообразием решений. Статические СфС решения уравнений КГД, дополненных так называемым лямбда-членом, детально рассмотрены в работе [11]. Показано, что эти решения включают три ветви, каждая их которых определяется пятью константами интегрирования. В этой работе мы займемся исследованием другого обширного класса СфС решений уравнений КГД – нестационарных СфС решений. Аналоги нестационарных СфС решений в случае ОТО могут быть получены только при ненулевых по всему пространству тензорах энергии-импульса. Уравнение КГД (1) с точки зрения ОТО является вариантом уравнений ОТО с тензором энергии-импульса некоторой материи.

2. Сферически-симметричная задача для уравнений КГД

2.1. Общий вид метрики и вектора Вейля в СфС задаче

Мы не будем заниматься здесь выводом сферически-симметричной метрики. Такие выводы имеются во многих распространенных монографиях по ОТО (см., например, [8]). Та метрика, которая будет называться далее сферически-симметричной, имеет вид

$$ds^2 = -e^\gamma dt^2 + e^\alpha dx^2 + e^\beta\left[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right]. \quad (5)$$

Помимо предположений о метрике при решении уравнений КГД необходимо сделать определенные предположения относительно структуры вектора A_α. Мы предполагаем, что из четырех независимых компонент вектора A_α в случае СфС остаются только две, т. е.

$$A_\alpha = \left(A_0, A_1, A_2, A_3\right) \to A_\alpha = \left(\varphi, f, 0, 0\right). \quad (6)$$

Все пять введенных функций α, β, γ, φ, f являются функциями от времени t и радиальной переменной x. Метрика в форме (5) детально рассмотрена в работе [8], там же приведены выражения для символов Кристоффеля, которые мы будем использовать в последующем изложении, а также для компонент тензора Римана.

2.2. Уравнения КГД для нестационарной СфС задачи

Выписываем уравнения КГД в форме (1) с тензором энергии-импульса (2) в предположении, что метрика имеет вид (5), а вектор A_α – вид (6).

$$\boxed{G_0^0 = T_0^0}$$

$$e^{-\gamma}\left[-\frac{\dot\beta^2}{4} - \frac{\dot\alpha\dot\beta}{2}\right] + e^{-\alpha}\left[\beta'' + \frac{3}{4}\beta'^2 - \frac{\alpha'\beta'}{2}\right] - e^{-\beta} =$$
$$= e^{-\gamma}\left[3\varphi^2 + \left(\dot\alpha + 2\dot\beta\right)\varphi\right] + e^{-\alpha}\left[-f^2 - 2f' + \left(\alpha' - 2\beta'\right)f\right]; \quad (7)$$

$$\boxed{G_1^1 = T_1^1}$$

$$e^{-\gamma}\left[-\ddot\beta - \frac{3}{4}\dot\beta^2 + \frac{\dot\beta\dot\gamma}{2}\right] + e^{-\alpha}\left[\frac{1}{4}\beta'^2 + \frac{\beta'\gamma'}{2}\right] - e^{-\beta} =$$
$$= e^{-\gamma}\left[\varphi^2 + 2\dot\varphi + \left(-\dot\gamma + \dot\beta\right)\varphi\right] + e^{-\alpha}\left[-3f^2 + \left(\gamma' - 2\beta'\right)f\right]; \quad (8)$$

$$\boxed{G_0^1 = T_0^1}$$

$$-\dot\beta' - \frac{1}{2}\dot\beta\beta' + \frac{1}{2}\dot\alpha\beta' + \frac{1}{2}\dot\beta\gamma' =$$
$$= -2\varphi f + \varphi' + \dot f - \gamma'\varphi - \dot\alpha f; \quad (9)$$

$$\boxed{G_2^2 = T_2^2}$$

$$e^{-\gamma}\left[-\frac{\ddot\beta}{2}-\frac{\dot\beta^2}{4}-\frac{\ddot\alpha}{2}-\frac{\dot\alpha^2}{4}-\frac{\dot\alpha\dot\beta}{4}+\frac{\dot\beta\dot\gamma}{4}+\frac{\dot\alpha\dot\gamma}{4}\right]+$$
$$e^{-\alpha}\left[\frac{\beta''}{2}+\frac{\beta'^2}{4}+\frac{\gamma''}{2}+\frac{\gamma'^2}{4}+\frac{\beta'\gamma'}{4}-\frac{\alpha'\beta'}{4}-\frac{\alpha'\gamma'}{4}\right]=$$
$$=e^{-\gamma}\left[\varphi^2+2\dot\varphi+\left(-\dot\gamma+\dot\alpha+\dot\beta\right)\varphi\right]+$$
$$+e^{-\alpha}\left[-f^2-2f'+\left(-\gamma'+\alpha'-\beta'\right)f\right]. \qquad (10)$$

2.3. Упрощение метрики с помощью двух преобразований

Если исходить из метрики в форме (5), то можно заметить, что радиальная переменная определяется этой формой не однозначно. Выполняя преобразование радиальной переменной, замечаем, что вид метрики сохраняется, но меняются соотношения между компонентами g_{11} и g_{22}. Можно так выбрать радиальную переменную, чтобы функции α и β совпали,

$$\alpha=\beta. \qquad (11)$$

В последующем полагаем, что выбор радиальной переменной произведен именно таким образом, т. е. так, чтобы выполнялось соотношение (11).

Координатное преобразование, о котором говорилось выше, может быть произведено и в ОТО, и в КГД. Но в случае уравнений КГД "свобода" преобразований функций α, β, γ, φ, f не ограничивается возможностью добиться выполнения соотношения (11). Можно выполнить еще одно преобразование – конформное преобразование с функцией σ (см. (4)), равной

$$\sigma=-\frac{1}{2}\beta. \qquad (12)$$

После выполнения двух указанных выше преобразований в случае уравнений КГД метрическая форма будет включать в себя всего одну функцию γ,

$$ds^2=-e^{\gamma}dt^2+dx^2+\left[d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right], \qquad (13)$$

вид вектора A_α (6) при этом не меняется.

Итак, в последующем считаем, что в уравнениях КГД (7)–(10) величины $\alpha=0,\ \beta=0$, так что из пяти функций α, β, γ, φ, f остаются только три: γ, φ, f. После этого уравнения КГД для трех указанных функций записываются в следующем виде:

$$\boxed{G_0^0 = T_0^0} \qquad (14)$$
$$-1=e^{-\gamma}3\varphi^2-f^2-2f';$$

$$\boxed{G_1^1 = T_1^1} \qquad (15)$$
$$-1=e^{-\gamma}\left[\varphi^2+2\dot\varphi-\dot\gamma\varphi\right]-3f^2-\gamma' f;$$

$$\boxed{G_0^1 = T_0^1} \qquad (16)$$
$$0=-2\varphi f+\varphi'+\dot f-\gamma'\varphi;$$

$$\boxed{G_2^2 = T_2^2} \qquad (17)$$
$$\frac{\gamma''}{2}+\frac{\gamma'^2}{4}=e^{-\gamma}\left[\varphi^2+2\dot\varphi-\dot\gamma\varphi\right]-f^2-2f'-\gamma' f.$$

Вместо функции γ удобно ввести новую функцию C, определив ее как

$$C=\sqrt{-g}=\sqrt{e^{\gamma}}=e^{\gamma/2}. \qquad (18)$$

Получаем уравнения (14)–(17) в новой форме

$$-1=3\frac{\varphi^2}{C^2}-f^2-2f'; \qquad (19)$$

$$-1=\frac{1}{C^2}\left[\varphi^2+2\dot\varphi-2\varphi\frac{\dot C}{C}\right]-3f^2-2f\frac{C'}{C}; \qquad (20)$$

$$0=-2\varphi f+\varphi'+\dot f-2\varphi\frac{C'}{C}; \qquad (21)$$

$$\frac{C''}{C}=\frac{1}{C^2}\left[\varphi^2+2\dot\varphi-2\varphi\frac{\dot C}{C}\right]-f^2-2f'-2f\frac{C'}{C}. \qquad (22)$$

Если из выражения (22) вычесть (19) и (20), то получим

$$\frac{C''}{C}=-2-3\frac{\varphi^2}{C^2}+3f^2. \qquad (23)$$

Таким образом, вместо уравнения (22) можно далее рассматривать уравнение (23).

2.4. Следствия из уравнений КГД в случае СфС задачи

В работе [12] показано, что из уравнений КГД в форме (1) с тензором энергии-импульса (2) следует уравнение

$$F^{\alpha\sigma}{}_{;\sigma}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{-g}\,F^{\alpha\sigma}\right)=0. \qquad (24)$$

Запишем это уравнение по компонентам. Полагая в формуле (24) $\alpha=0$, $\alpha=1$, получаем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varphi'-\dot f}{C}&=F(t);\\ \frac{\varphi'-\dot f}{C}&=\Phi(x).\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Здесь $F(t)$, $\Phi(x)$ – произвольные функции времени и радиальной переменной, соответственно. Из выражения (25) следует, что

$$\frac{\varphi' - \dot{f}}{C} = \mathrm{const} \equiv \phi_0\,, \tag{26}$$

т. е.

$$\dot{f} = \varphi' - C\phi_0\,. \tag{27}$$

Подчеркнем, что соотношение (27) следует из уравнений КГД (19)–(21), (23). Особое внимание, которое уделено соотношению (27), связано с его простотой.

2.5. Запись уравнений с использованием функций z и T

Перепишем уравнения (19)–(21), (23), сделав еще одну замену функции,

$$z \equiv \frac{\varphi}{C}\,, \tag{28}$$

и используя соотношение (27) для исключения $\dot{f}$. Уравнение (19) примет вид

$$f' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}f^2\,. \tag{29}$$

Уравнение (20) примет вид

$$\frac{\dot{z}}{C} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{2}f^2 + f\left(\frac{C'}{C}\right). \tag{30}$$

Уравнение (21) примет вид

$$z' = \frac{\phi_0}{2} + fz\,. \tag{31}$$

Наконец, уравнение (23) примет вид

$$\frac{C''}{C} = -2 + 3T\,, \tag{32}$$

где

$$T \equiv f^2 - z^2\,. \tag{33}$$

Используя определение (33) для функции T и формулу (27) для $\dot{f}$, уравнение (30) можно записать в виде

$$\frac{\dot{T}}{C} = \left(z - \phi_0 f - zT\right). \tag{34}$$

Уравнения (27), (29)–(32) (или эквивалентные им уравнения (27), (29), (31)–(34)) и составляют ту систему уравнений, к нахождению решений которой мы сейчас и перейдем.

2.6. Нахождение искомых функций

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что из уравнений (29), (31) следует соотношение

$$\left(z - \phi_0 f - zT\right)' = 0\,. \tag{35}$$

Таким образом, между функциями z, f, T существует связь

$$z - \phi_0 f - zT = F_1(t)\,, \tag{36}$$

где $F_1(t)$ – произвольная функция времени. По существу, соотношение (36) является первым интегралом уравнений (29), (31). И оно может быть использовано для нахождения всей совокупности искомых функций. Дальнейшие выкладки удобно производить с использованием введенных выше функций z и T.

Подставляем (36) в (34).

$$\dot{T} = F_1(t)C\,. \tag{37}$$

Отсюда следует, что для получения стационарного СфС решения необходимо положить функцию $F_1(t)$ тождественно равной нулю. Другими словами:

$$\text{Ñòàöèîíàðíîå ðåøåíèå} \;\to\; F_1(t) \equiv 0\,. \tag{38}$$

Мы ищем нестационарное решение, поэтому в последующем полагаем, что $F_1(t) \neq 0$. При таком предположении из уравнений (32) и (37) следует, что

$$\frac{\dot{T}''}{\dot{T}} = -2 + 3T\,,$$

т. е.

$$\dot{T}'' + \left(2 - 3T\right)\dot{T} = 0\,.$$

Если это уравнение записать как

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[T'' + 2T - \frac{3}{2}T^2\right] = 0\,,$$

то из него будет следовать, что

$$T'' + 2T - \frac{3}{2}T^2 = F_2(x)\,, \tag{39}$$

где $F_2(x)$ – некоторая функция от радиальной переменной. Найдем эту функцию. Из определения T следует, что

$$T' = 2\left(ff' - zz'\right),$$

$$T'' = 2\left(ff'' + f'^2 - zz'' - z'^2\right).$$

Выражения для f' и z' определены уравнениями (29), (31) соответственно. Вторые производные f'', z'' находим из этих же уравнений простым дифференцированием. После подстановок выражений для производных в формулу (39) получаем

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \phi_0^2\right). \tag{40}$$

Здесь ϕ_0 – та же константа, что появилась в соотношении (27). Подставляем (40) в (39).

$$T'' = -2T + \frac{3}{2}T^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \phi_0^2\right). \tag{41}$$

Умножим полученное уравнение (41) на $2T'$.

$$2T''T' = \left[-4T + 3T^2 + \left(1-\phi_0^2\right)\right]T'. \qquad (42)$$

Уравнение (42) может быть проинтегрировано

$$\left(T'\right)^2 = -2T^2 + T^3 + \left(1-\phi_0^2\right)T + F_3(t). \qquad (43)$$

Здесь $F_3(t)$ – некоторая функция от времени. Эта функция может быть найдена. Для этого заменяем T' в (43) через производные f' и z', а для этих производных используем уравнения (29), (31). В результате устанавливаем, что

$$F_3(t) = F_1^2(t). \qquad (44)$$

Подставляем найденное выражение для $F_3(t)$ в уравнение (43) и приходим к уравнению

$$\frac{dT}{\sqrt{-2T^2 + T^3 + \left(1-\phi_0^2\right)T + F_3(t)}} = dx. \qquad (45)$$

Интегрируем

$$x + F_4(t) = \int \frac{dT}{\sqrt{T^3 - 2T^2 + \left(1-\phi_0^2\right)T + F_3(t)}}. \qquad (46)$$

Стоящий справа интеграл выражается через известную двоякопериодическую функцию Вейерштрасса (см., например, [13]). Один период у этой функции вещественный, другой чисто мнимый. Периоды зависят от $F_1(t)$ и ϕ_0.

Если перейти к переменной интегрирования

$$s = T - \frac{2}{3}, \qquad (47)$$

то соотношение (46) приводится к виду

$$x + F_4(t) = -2 \int\limits_{T-\frac{2}{3}}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}. \qquad (48)$$

Здесь

$$g_2 = \frac{4}{3} + 4\phi_0^2; \quad g_3 = -\frac{8}{27} - 4F_1^2. \qquad (49)$$

В стандартных обозначениях $\wp$ для функции Вейерштрасса имеем

$$T - \frac{2}{3} = \wp\left(-\frac{x + F_4(t)}{2}; g_2; g_3\right). \qquad (50)$$

Функция $F_4(t)$, входящая в $\wp$, а также функция $F_1(t)$ и константа ϕ_0, входящие в выражения для g_2 и g_3, произвольны.

Формула (50) дает ответ на вопрос об общем решении для функции T. Выражение для функции C находится с использованием формулы (37). Остается найти функции z и f. С этой целью соотношение (33) и выражения для первого интеграла (36) рассматриваем как два алгебраические уравнения для нахождения функций z и f. Решая эти соотношения, устанавливаем, что

$$z = \frac{F_1(1-T) + \eta\phi_0\sqrt{T^3 - 2T^2 + \left(1-\phi_0^2\right)T + F_1^2}}{\left[(1-T)^2 - \phi_0^2\right]}; \qquad (51)$$

$$f = \frac{\phi_0 F_1 + \eta(1-T)\sqrt{T^3 - 2T^2 + \left(1-\phi_0^2\right)T + F_1^2}}{\left[(1-T)^2 - \phi_0^2\right]}. \qquad (52)$$

В этих соотношениях функции z и f выражены только через функцию T, произвольную функцию времени $F_1(t)$ и некоторую константу ϕ_0. Величина η в этих выражениях принимает значения либо $\eta = 1$, либо $\eta = -1$.

Подставляя полученные выражения для функций z и f в исходные динамические уравнения, можно убедиться в том, что эти уравнения превращаются в тождества, если функция T определяется соотношением (50), а функция C вычисляется с использованием формулы (37). Эти преобразования достаточно просты, но громоздки, поэтому мы их здесь приводить не будем.

Таким образом, найдены общие решения для всех функций, определяющих нестационарное СфС решение.

3. Частное решение в виде цуга движущихся солитонов

3.1. Частное решение со светоподобным вектором Вейля

Приведем одно из возможных частных нестационарных СфС решений уравнений КГД. Процедуру его нахождения мы могли бы изложить, пользуясь приведенным выше общим подходом. Однако, решение настолько просто, что может быть получено более простым способом.

Предположим, что в используемой калибровке вектор A_α является светоподобным. Условие светоподобности в нашем случае записывается как

$$-\varphi^2 e^{-\gamma} + f^2 = 0 \quad \to \quad f^2 - z^2 = 0 \quad \to \quad T = 0. \qquad (53)$$

Отсюда

$$z = \xi f, \quad \xi = \pm 1. \qquad (54)$$

Из формулы (32) следует

$$C'' + 2C = 0, \qquad (55)$$

т. е.

$$C(t,x)=C_0(t)\cos\left[\sqrt{2}\,x+C_1(t)\right]. \qquad (56)$$

Из соотношения (29) следует, что

$$\xi z'=\frac{1}{2}+z^2. \qquad (57)$$

Из выражения (31) следует, что

$$\xi z'=\xi\frac{\phi_0}{2}+z^2. \qquad (58)$$

Сравниваем (58) и (57); приходим к выводу о том, что в рассматриваемой задаче должно быть

$$\phi_0=\xi. \qquad (59)$$

Решая дифференциальное уравнение (57), получаем

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\left(\frac{\xi x}{\sqrt{2}}+z_0(t)\right). \qquad (60)$$

Проверяем, что выражение для $z(t,x)$ в виде (60) действительно является решением уравнения (57). Подстановка (60) в уравнение (57) дает

$$\xi\frac{\frac{\xi}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{\xi x}{\sqrt{2}}+z_0(t)\right)}\overset{?}{=}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\xi x}{\sqrt{2}}+z_0(t)\right).$$

Знак вопроса над знаком равенства означает, что нужно доказать, что левая часть в этом соотношении равна правой. Очевидно, так оно и есть, т. е. выражение для $z(t,x)$ в виде (60) действительно является решением уравнения (57).

Теперь необходимо проверить, удовлетворяет ли выражение для $z(t,x)$ в виде (60) и выражение для $C(t,x)$ в виде (56) уравнению (30), которое с учетом (54) записывается в виде

$$\dot z=C\left[-\frac{1}{2}+z^2\right]+\xi zC'. \qquad (61)$$

Вычисляем отдельные слагаемые, входящие в соотношение (61)

$$\dot z=\frac{\dot z_0(t)}{\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{\xi x}{\sqrt{2}}+z_0(t)\right)}.$$

$$C\left[-\frac{1}{2}+z^2\right]=C\frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}^2\left(\frac{\xi x}{\sqrt{2}}+z_0(t)\right)-1\right]=$$

$$=-\frac{C_0(t)}{2}\;\frac{\cos\left(\sqrt{2}\xi x+2z_0(t)\right)\cos\left[\sqrt{2}\,x+C_1(t)\right]}{\cos^2\left(\frac{\xi x}{\sqrt{2}}+z_0(t)\right)}\cdot$$

$$\xi zC'=-\xi\operatorname{tg}\left(\frac{\xi x}{\sqrt{2}}+z_0(t)\right)C_0(t)\sin\left[\sqrt{2}\,x+C_1(t)\right].$$

Вычисляем теперь правую часть соотношения (61).

$$C\left[-\frac{1}{2}+z^2\right]+\xi zC'=$$

$$=-\frac{C_0(t)}{2}\;\frac{\cos\left(\sqrt{2}\xi x+2z_0(t)\right)\cos\left[\sqrt{2}\,x+C_1(t)\right]}{\cos^2\left(\frac{\xi x}{\sqrt{2}}+z_0(t)\right)}-$$

$$-\xi\operatorname{tg}\left(\frac{\xi x}{\sqrt{2}}+z_0(t)\right)C_0(t)\sin\left[\sqrt{2}\,x+C_1(t)\right]=$$

$$=-\frac{C_0(t)}{2\cos^2\left(\frac{\xi x}{\sqrt{2}}+z_0(t)\right)}\times$$

$$\times\Big(\cos\left(\sqrt{2}\xi x+2z_0(t)\right)\cos\left[\sqrt{2}\,x+C_1(t)\right]+$$

$$+\sin\left(\sqrt{2}\xi x+2z_0(t)\right)\sin\left[\sqrt{2}\,x+C_1(t)\right]\Big).$$

Правая часть совпадет с левой только в том случае, если будут выполняться следующие соотношения:

$$\xi=+1, \qquad (62)$$

$$\dot z_0(t)=-\frac{C_0(t)}{\sqrt{2}}, \qquad (63)$$

$$C_1(t)=2z_0(t). \qquad (64)$$

Итак, приводим рассмотренное решение в окончательном виде

$$T=0. \qquad (65)$$

$$z=f=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+z_0(t)\right). \qquad (66)$$

$$C(t,x)=-\sqrt{2}\,\dot z_0(t)\cos\left[2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+z_0(t)\right)\right]. \qquad (67)$$

Полученное частное решение определяется, как видно из уравнений (65)–(67), одной произвольной функцией $z_0(t)$. Положив

$$z_0(t)=\frac{t}{\sqrt{2}},$$

и введя новую переменную

$$u=t+x,$$

приводим найденное частное решение к решению типа "бегущей волны"

$$z=f=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right). \qquad (68)$$

$$C(t,x)=-\cos\left[\sqrt{2}\,u\right]. \qquad (69)$$

Функции z и f имеют сингулярности в точках $u=k\left(\pi/\sqrt{2}\right)$, где k – любое целое.

Подстановка выражений (68), (69) в уравнения (27), (29)–(32) обращает эти уравнения в тождества. Таким образом, найденные выражения для C, z и f

являются решением уравнений КГД.

3.2. Другие формы представления решения

Полученное в предыдущем пункте одно из возможных точных решений СфС задачи для уравнений КГД приводит к метрике

$$ds^2 = -\cos^2\left[\sqrt{2}\left(t+x\right)\right]dt^2 + dx^2 + \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \tag{70}$$

и вектору Вейля

$$A_\alpha = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left[\sqrt{2}\left(t+x\right)\right]\mathrm{tg}\left(\frac{\left(t+x\right)}{\sqrt{2}}\right),\right. \tag{71}$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}\left(\frac{\left(t+x\right)}{\sqrt{2}}\right),\quad 0,\quad 0\right).$$

Инвариант $\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$, где $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$, для решения (70), (71) равен

$$\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = -2\,. \tag{72}$$

Из формул (70), (71) следует, что в координатах $\left(t,x\right)$ решение представляет собой бесконечную серию (цуг) бегущих к центру солитонов. Каждый из солитонов локализован в сферическом слое, на границах которого пространство из 4-мерного становится 3-мерным. Световые лучи не могут вырваться из сферических слоев, в которых локализованы солитоны.

Выражения (70), (71) представляют собой лишь одну из возможных форм записи решения нестационарной СфС задачи. Квадрат интервала (70) может быть приведен к виду, в котором пространственная часть метрики станет евклидовой. Для этого необходимо сделать конформное преобразование с фактором $\exp\left(2x\right)$, после чего заменить радиальную переменную x на переменную $R = \exp\left(x\right)$. В результате квадрат интервала примет следующий вид

$$\begin{aligned} ds^2 = -R^2\cos^2\left[\sqrt{2}\left(t+\ln R\right)\right]dt^2 + dR^2 + \\ +R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \end{aligned} \tag{73}$$

Компоненты вектора Вейля станут равными

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left[\sqrt{2}\left(t+\ln R\right)\right]\mathrm{tg}\left(\frac{\left(t+\ln R\right)}{\sqrt{2}}\right); \\ A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}\left(\frac{\left(t+\ln R\right)}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{R}. \end{aligned}\right\}. \tag{74}$$

Покажем, что решение (70), (71) может быть записано в калибровке, в которой вектор Вейля удовлетворяет условию Лоренца. Для этого сделаем конформное преобразование. Метрику и вектор Вейля после такого преобразования будем помечать звездочкой

$$\left.\begin{aligned} g^*_{00} &= -\cos^2\left[\sqrt{2}\left(t+x\right)\right]\exp\left(2\sigma\right); \\ g^*_{11} &= \exp\left(2\sigma\right); \\ g^*_{22} &= \exp\left(2\sigma\right); \\ g^*_{33} &= \sin^2\theta\exp\left(2\sigma\right); \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

$$\sqrt{-g^*} = \exp\left(4\sigma\right)\cos\left[\sqrt{2}\left(t+x\right)\right]\sin\theta\,; \tag{76}$$

$$\left.\begin{aligned} A^*_0 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left[\sqrt{2}\left(t+x\right)\right]\mathrm{tg}\left(\frac{\left(t+x\right)}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\partial\sigma}{\partial t}; \\ A^*_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}\left(\frac{\left(t+x\right)}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\partial\sigma}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Если нам удастся подобрать функцию $\sigma\left(t,x\right)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g^*}\,g^{*\alpha\beta}A^*_\beta\right) = 0\,, \tag{78}$$

то мы и получим решение в калибровке Лоренца. Такой функцией, как оказывается, является функция

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\cos\left(u\sqrt{2}\right)}{\sin\left(u\sqrt{2}\right)}\left\{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\sin\left(u/\sqrt{2}\right)\right\}\right\}du\,. \tag{79}$$

Итак, если в формулах (75), (77) использовать в качестве функции $\sigma(u)$ функцию вида (79), то получим метрику и вектор Вейля в калибровке, при которой вектор Вейля удовлетворяет условию Лоренца.

4. Частное решение в виде перемещающегося импульса

Приведем пример еще одного частного нестационарного СфС решения. Его особенность состоит в том, что, во-первых, он описывает движущийся к центру одиночный импульс кривизны, во-вторых, инварианты этого решения регулярны по всему пространству.

Предположим, что все функции решения зависят от переменной $u \equiv t + x$. Из этого предположения следует, что функция $F_1(t)$ является константой. В этом случае решение уравнения (43), записанного с учетом (44)
в виде

$$T^3 - 2T^2 + \left(1-\phi_0^2\right)T + F_1^2 - \left(T'\right)^2 = 0\,, \tag{80}$$

может быть найдено в классе функций вида

$$T = \frac{B}{\mathrm{ch}^2\left(\alpha u\right)} + D\,. \tag{81}$$

Здесь B, D – некоторые константы. Подставляем (81) в (80).

$$\left(\frac{B}{\operatorname{ch}^2(\alpha u)}+D\right)^3-2\left(\frac{B}{\operatorname{ch}^2(\alpha u)}+D\right)^2+$$

$$+\left(1-\phi_0^2\right)\left(\frac{B}{\operatorname{ch}^2(\alpha u)}+D\right)+F_1^2-4\alpha^2B^2\frac{\operatorname{sh}^2(\alpha u)}{\operatorname{ch}^6(\alpha u)}=0.$$

Приравниваем нулю множители при $\frac{1}{\operatorname{ch}^6(\alpha u)}$, $\frac{1}{\operatorname{ch}^4(\alpha u)}$, $\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\alpha u)}$, $\frac{1}{\operatorname{ch}^0(\alpha u)}$.

$$\left.\begin{aligned}&B^3+4\alpha^2B^2=0;\\&3B^2D-2B^2-4\alpha^2B^2=0;\\&3BD^2-4BD+\left(1-\phi_0^2\right)B=0;\\&D^3-2D^2+\left(1-\phi_0^2\right)D+F_1^2=0.\end{aligned}\right\}. \quad (82)$$

Из первого уравнения в системе (82) следует, что

$$B=-4\alpha^2. \quad (83)$$

Решая второе уравнение в системе (82) и учитывая (83), получаем

$$D=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\alpha^2. \quad (1)$$

Третье уравнение в системе (82) удобно решать, предварительно сократив его на B

$$3\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\alpha^2\right)^2-4\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\alpha^2\right)+\left(1-\phi_0^2\right)=0. \quad (85)$$

Отсюда находим выражение для α

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(1+3\phi_0^2\right)^{1/4}. \quad (86)$$

Подстановка (86) в (83) и (84) дает

$$B=-\left(1+3\phi_0^2\right)^{1/2}; \quad (87)$$

$$D=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(1+3\phi_0^2\right)^{1/2}. \quad (88)$$

Из четвертого уравнения в системе (82) следует

$$F_1=\pm\sqrt{\frac{2}{27}\left\{\left(1+3\phi_0^2\right)^{3/2}-1+9\phi_0^2\right\}}. \quad (89)$$

Таким образом, все константы выражены через константу ϕ_0. Выражение для искомой функции T принимает вид

$$T=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{1+3\phi_0^2}-\frac{\sqrt{1+3\phi_0^2}}{\operatorname{ch}^2(\alpha u)}. \quad (90)$$

Подставляем (90) в уравнение $C=\dot{T}/F_1$. Получаем

$$C=\frac{\left(1+3\phi_0^2\right)^{3/4}}{F_1}\frac{\operatorname{sh}(\alpha u)}{\operatorname{ch}^3(\alpha u)}. \quad (91)$$

Здесь α определена соотношением (86), а F_1 – соотношением (89). Подставляя выражение (90) для T и (89) для F_1 в формулы (51), (52), находим явные выражения для z и f соответственно.

5. Обсуждение

В данной работе получены общие выражения для функций $T(t,x)$, $C(t,x)$, $z(t,x)$, $f(t,x)$, появляющихся при рассмотрении нестационарной СфС задачи. Выражения для перечисленных функций находятся по формулам (50), (37), (51), (52) соответственно.

Построены два частных решения. Одно из них может быть ассоциировано с цугом сферически-симметричных волн, сходящихся к центру, а другое – с одиночным импульсом, также сходящимся к центру. В обоих случаях конформный инвариант $\left(F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\right)$ не равен нулю, так что решения заведомо не относятся к категории конформно-плоских. В обоих решениях этот инвариант имеет конечное значение.

В связи с полученными результатами отметим, что решения со сферической симметрией для пустого пространства относятся к числу наиболее простых точных решений как в ОТО, так и в КГД. В случае ОТО СфС решение единственно и сводится к решению Шварцшильда. В случае КГД множество СфС решений состоит из двух классов: стационарных и нестационарных. Первые являются аналогами решения Шварцшильда. Что касается нестационарных решений, исследованных в данной работе, то в ОТО отсутствуют их аналоги для случая пустых римановых пространств. В то же время ясно, что для исследования таких феноменов, как взрывы сверхновых, испарение Хокинга вблизи горизонтов событий и т. д., именно нестационарные решения, по-видимому, могут представить наибольший интерес. Такое предположение может оказаться справедливым, если перечисленные выше феномены могут возникнуть лишь эволюционным путем, т. е. как результат завершения какого-то этапа эволюции нестационарного решения. Поэтому обращение к нестационарным СфС решениям уравнений КГД открывает новые возможности для исследования отмеченных выше феноменов.

Возникновение нового класса нестационарных СфС решений при переходе от уравнений ОТО к уравнениям КГД не случайно. Это связано с тем, что в случае уравнений КГД задача Коши ставится без связей на данные Коши на начальной пространственно-подобной гиперповерхности. Исчезновение четырех связей на данные Коши, которые имеются в случае уравнений ОТО, размораживает те степени свободы, которые и делают возможным появление нестационарных СфС решений. Другими словами, пользуясь уравнениями КГД, можно численно рассчитать эволюцию метрики и вектора Вейля при произвольных начальных и граничных условиях. Это свойство уравнений КГД представляется нам принципиально важным и служит, по нашему мнению, весомым аргументом в пользу того, чтобы при космологических исследованиях учитывались вейлевские степени свободы пространства-времени.

В заключение заметим, что используя результаты данной работы, по-видимому, можно попытаться проверить высказанную в работе [14] гипотезу о неустойчивости процесса неограниченной кумуляции энергии. В наших динамических уравнениях механизм ограничения кумуляции связан с вейлевскими степенями и возникновением поверхности разрыва в геометродинамической сплошной среде с теми уравнениями состояния, которые генерируются самими уравнениями.

Список литературы

1. Bach R. and Weyl H. // Math. Z. 1922. Vol. 13. P. 134.

2. Hawking S.W. // Commun. Math. Phys. 1975. Vol. 43. P. 199.

3. Herrera L. Possible way out of the Hawking paradox: Erasing the information at the horizon. arXiv: 0709.4674v1 [gr-qc] 28 Sep 2007.

4. Горбатенко М. В., Пушкин А. В. Динамика пространства линейной аффинной связности и конформно-инвариантное расширение уравнений Эйнштейна // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1984. Вып. 2/2. С. 40.

5. Романов Ю. А. Динамика пространства аффинной связности // Там же. 1996. Вып. 3. С. 55.

6. Горбатенко М. В., Романов Ю. А. Задача Коши для уравнений, описывающих динамику пространства аффинной связности // Там же. 1997. Вып. 2. С. 34.

7. Israel W. // Phys. Rev. 1967. Vol. 164. P. 1776.

8. Синг Дж. Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.. Теория поля. М.: Наука, 1988.

10. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.

11. Gorbatenko M. V. Discontinuous solutions in conformally invariant geometrodynamics // Advances in Mathematics Research. Vol. 6. Editors: Oyibo, Gabriel. Nova Science Publishers, Inc. 2005.

12. Gorbatenko M. V., Pushkin A. V. Conformally Invariant Generalization of Einstein Equation and the Causality Principle // General Relativity and Gravitation. 2002. Vol. 34, N 2. P. 175–188.

13. Уиттекер Э Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 2. М.: ГИФМЛ, 1963.

14. Забабахин Е. И. // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 97.

Статья поступила в редакцию 11.12.2007.