

ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ИОНОВ В ПРОСТЫХ ВЕЩЕСТВАХ. IV. СРАВНИТЕЛЬНАЯ РОЛЬ РАЗЛИЧНЫХ ЭФФЕКТОВ В ОБЛАСТИ МАКСИМУМА ПОТЕРЬ

Д. К. Ковшов

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

На основе полуэмпирической формулы потерь энергии иона рассматриваются четыре поправки к формуле Бете в области 10^3 – 10^4 кэВ/а.е.м. Для легких ионов преобладают оболочечные поправки, за исключением легких веществ. Для тяжелых ионов, вопреки мнению Зигмунда и Шиннера, существенную роль играет эффективный заряд. Поправка Баркаша не превышает погрешности полуэмпирической формулы.

Введение

Торможение быстрого иона вполне описывается формулой Бете. При переходе в область максимума потерь (10 – 10^4 кэВ/а.е.м.) картина осложняется, поскольку проявляется целый ряд эффектов, которые для быстрого иона были пренебрежимо малы. Их можно свести в три основные группы:

- зарядовые эффекты, заключающиеся в частичной нейтрализации иона за счет захвата электронов из вещества;

- оболочечные эффекты, связанные с орбитальным движением электронов вещества;

- нелинейные эффекты, обусловленные возмущением волновых функций электронов вещества тормозящимся ионом за время соударения. В них, в свою очередь, выделяют поправку Блоха, связанную с точным рассмотрением почти сингулярной части резерфордова сечения, и поправку Баркаша, обусловленную поляризацией атома вещества налетающим ионом [1].

Количественной теории потерь энергии, учитывающей все эти эффекты, не существует; имеются только выражения для поправок к формуле Бете на каждый из эффектов в отдельности:

$$S_{\dot{\gamma}} = \Sigma_E Z_0 Z_{\dot{\gamma}0}^2 \frac{v_A^2}{v^2} (L_{\dot{\gamma}\dot{\gamma}0} + \Delta L_{\dot{\gamma}\dot{\gamma}0} + \Delta L_{\dot{\gamma}\dot{\gamma}0} + \Delta L_{\dot{\gamma}\dot{\gamma}0}), \quad (1)$$

где $\Sigma_E = 4\pi\hbar^2/m_e = 9,577 \cdot 10^{-15}$ эВ·см², $Z_{\dot{\gamma}0}$ – эффективный заряд иона, $L_{\text{Бете}} = \ln(2m_e v^2/I_0)$ – тормозное число в формуле Бете. Но даже с учетом всех поправок формула согласуется с экспериментом лишь при $E > 400$ – 700 кэВ/а.е.м. [2, 3], что свидетельствует об ограниченной адекватности теоретических выражений

для поправок. Поэтому предпринимались неоднократные попытки найти эти поправки из экспериментальных данных [2, 4–20].

Полуэмпирическая формула потерь энергии [21–23], являющаяся сжатым выражением большого массива экспериментальных данных, позволяет сделать некоторые выводы о сравнительном влиянии четырех названных эффектов.

Граница применимости формулы Бете

Применимость формулы Бете ограничена энергией, при которой отклонения от нее становятся сравнимы с экспериментальной погрешностью (составляющей вблизи $E_{\text{гр}}$ около 3 %, см. [23, рис. 4]):

$$\left| \frac{\Delta L}{L_{\dot{\gamma}\dot{\gamma}0}} \right| = \sigma_{\dot{\gamma}\dot{\gamma}0}. \quad (2)$$

Каждому из перечисленных эффектов соответствует своя граничная энергия; она зависит от Z_0 и Z . Сопоставляя эти зависимости с эмпирической $E_{\text{гр}}$ (см. [22]; значения показателя степени и коэффициентов уточнены)

$$E_{\dot{\gamma}0}(Z_0, Z) = k_{\dot{\gamma}0} \frac{I_0}{4m_e} + E_{\dot{\gamma}0} Z^{3/2}, \quad (3)$$

$$k_{\text{гр}} = 5,4, E_{\text{гр}0} = 307 \text{ кэВ/а.е.м.},$$

можно установить, какие именно эффекты ограничивают применимость формулы Бете.

В случае зарядовых эффектов условие (2) принимает вид $1 - Z_{\dot{\gamma}0}^2/Z^2 = \sigma_{\dot{\gamma}\dot{\gamma}0}$, откуда с помощью общепринятой эмпирической формулы эффективного заряда (см., например, [19])

$$\frac{Z_{\dot{\gamma}\delta}}{Z} = 1 - Ae^{-\lambda v/Z^{2/3}} v_{\dot{\Lambda}}, \quad A \approx 1, \quad \lambda \approx 1, \quad (4)$$

получаем

$$E_{\text{ад.сдв}} = \frac{v_{\dot{\Lambda}}^2}{2} \left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{2A}{\sigma_{\dot{\gamma}\delta}} \right)^2 Z^{4/3} \approx 440 Z^{4/3} \text{ кэВ/а.е.м.}$$

Это близко ко второму слагаемому в формуле (3), определяющему поведение $E_{\text{гр}}$ для тяжелых ионов, хотя эмпирический показатель степени $p_{\text{гр}} = 3/2$ превышает теоретическое значение $p_{\text{гр.заряд}} = 4/3$.

Оболочечную поправку возьмем в "диэлектрической" форме [24] и ограничимся старшим членом в разложении $\Delta L_{\text{обол}}$ по v^{-1}

$$\Delta L_{\text{обол}} = -\frac{3}{5} \frac{v_F^2}{v^2},$$

где v_F – скорость Ферми электронов вещества. Уравнение (2) сводится к (П1.1) и имеет решение

$$E_{\text{ад.сдв}} = \frac{3}{10} \frac{v_F^2}{\sigma_{\dot{\gamma}\delta} y_L^{(+)}(x)}; \quad x = \ln \frac{6/5 m_e v_F^2}{\sigma_{\dot{\gamma}\delta} I_0}.$$

Граничная энергия не зависит от Z (как и следовало ожидать, поскольку оболочечные эффекты связаны не с тормозящейся частицей, а с атомом вещества), а зависимость от Z_0 входит в нее через v_F и I_0 и имеет немонотонный характер. Применив для v_F формулу (П2.1), для I_0 – формулу

$$I_0 = KZ_0, \quad K = 11,7 \text{ эВ}, \quad (5)$$

и разлагая $\ln y_L^{(+)}(x)$ в ряд вблизи $x_0 = \ln(6/5 \cdot 0,59^2 m_e v_{\dot{\Lambda}}^2 / K \sigma_{\dot{\gamma}\delta}) \approx 3,48$, находим монотонную составляющую этой зависимости

$$E_{\text{ад.сдв}} \approx 68 Z_0^{0,76} \text{ кэВ/а.е.м.}$$

Сходным образом ведет себя первое слагаемое в выражении (3), доминирующее в случае легкого иона в тяжелом веществе: оно тоже подвержено осцилляциям, а его монотонная составляющая имеет вид $30 Z_0$ кэВ/а.е.м.

Для поправки Блоха воспользуемся приближением

$$\Delta L_{\text{Блох}} = -1,202 \left(\frac{Z v_{\dot{\Lambda}}}{v} \right)^2, \quad v \gg Z v_{\dot{\Lambda}}$$

(см., например, [25]); тогда

$$E_{\text{ад.сдв}} = 0,601 v_{\dot{\Lambda}}^2 \frac{Z^2}{\sigma_{\dot{\gamma}\delta} y_L^{(+)}(x)}; \quad x = \ln \frac{2,404 m_e v_{\dot{\Lambda}}^2 Z^2}{\sigma_{\dot{\gamma}\delta} I_0}.$$

Так как осцилляции I_0 малы (см. [21, рис. 1]), то и $E_{\text{гр.Блох}}$ практически монотонна:

$$E_{\text{ад.сдв}} \approx 260 Z_0^{0,20} Z^{1,59} \text{ кэВ/а.е.м.}$$

Зависимость от Z соответствует второму слагаемому формулы (3); правда, это слагаемое не зависит от Z_0 , но и у $E_{\text{гр.Блох}}$ эта зависимость выражена довольно слабо.

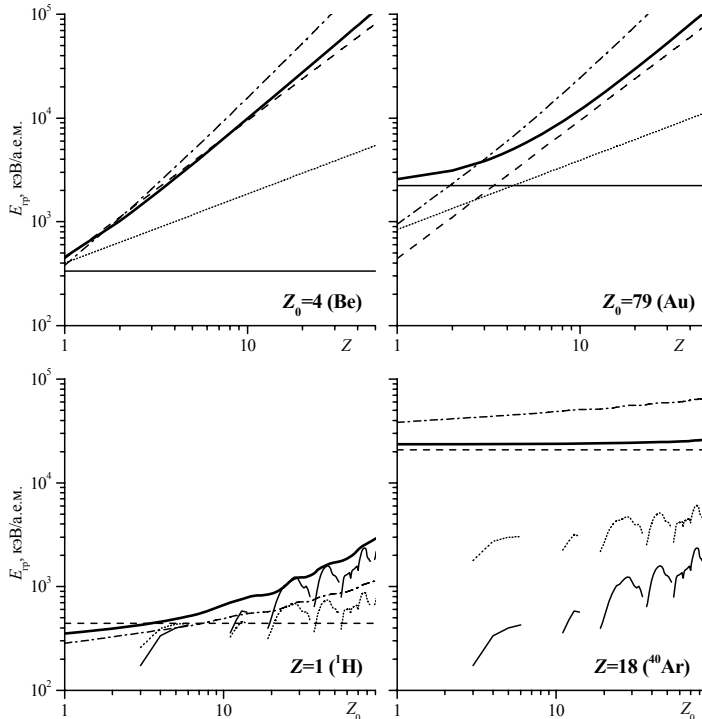


Рис. 1. Граничная энергия: --- – $E_{\text{гр.заряд}}$; — – $E_{\text{гр.обол}}$; - · - - – $E_{\text{гр.Блох}}$; – $E_{\text{гр.Баркаш}}$; — – эмпирическая (3)

Наконец, касательно поправки Баркаша различные теории сходятся в том [26], что в пределе быстрых частиц

$$\frac{\Delta L_{\text{Баркаша}}}{L_{\text{Баркаша}}} = \eta \frac{e^2 \omega_p Z}{4\pi \epsilon_0 m_e v^3},$$

где η – численный множитель, составляющий в разных теориях от π до $3\pi/2$, ω_p – плазменная частота электронов вещества. Отсюда находим

$$E_{\text{Баркаша}} = \frac{v_{\text{Л}} v_F}{(6\pi)^{1/3}} \left(\frac{\eta Z}{\sigma_{\text{Уэлл}} \pi} \right)^{2/3} \approx 180 Z_0^{1/3} Z^{2/3} \text{ кэВ/а.е.м.},$$

такая зависимость от Z_0 и Z не имеет соответствия в формуле (3).

На рис. 1 построены графики граничных энергий, обусловленных каждым из эффектов, для разных веществ и частиц (на графиках $E_{\text{Гр.обол}}(Z_0)$ и $E_{\text{Гр.Баркаш}}(Z_0)$ показаны только значения, соответствующие конденсированным средам). Построены также графики эмпирической граничной энергии (3).

Изучение графиков позволяет сделать окончательный вывод: для легких ионов в легком веществе граничная энергия определяется зарядовыми эффектами или поправкой Блоха (сделать выбор между ними невозможно, так как в этой области $E_{\text{Гр.заряд}} \approx E_{\text{Гр.Блох}}$), для легких ионов в тяжелом веществе – оболочечными эффектами (замечательно, что даже осцилляции $E_{\text{Гр}}$ совпадают по фазе с осцилляциями $E_{\text{Гр.обол}}$), а для тяжелых ионов во всех веществах – зарядовыми. Вызывает удивление тот факт, что, начиная с $Z \approx 3$, $E_{\text{Гр}} < E_{\text{Гр.Блох}}$: следовало ожидать, что эмпирическая $E_{\text{Гр}}$ будет не меньше наибольшей из граничных энергий, обусловленных отдельными эффектами. Что же касается поправки Баркаша, то она достигает уровня $\sigma_{\text{Эксп}}$ при более низких энергиях и потому в формировании $E_{\text{Гр}}$ не участвует.

Величина максимума потерь

Формула для величины максимума [22]

$$\frac{1}{S_{\text{max}}(Z_0, Z)} = \frac{1}{S'_{\text{max}}(Z_0) Z^2} + \frac{1}{\Sigma_{\text{max}0} Z_0^{2/3} Z} \quad (6)$$

также несет информацию о влиянии различных эффектов.

У легких ионов зависимость $S_{\text{max}}(Z)$ определяется первым, квадратичным слагаемым, что указывает на полную ионизацию частицы и на отсутствие нелинейных эффектов. Следовательно, максимум потерь легкой частицы вызывают оболочечные эффекты. Об этом же свидетельствует и периодичность величины S_{max} по Z_0 . Монотонная составляющая зависимости $S_{\text{max}}(Z_0) \sim Z_0^{1/3}$ может быть сопоставлена с рассуждениями Бора [27, с. 99] о том, что в торможении участвуют только

те электроны вещества, орбитальная скорость которых ниже скорости частицы, а их число для атома Томаса-Ферми составляет $\sim Z_0^{1/3} v/v_{\text{Л}}$.

У тяжелых ионов зависимость $S_{\text{max}}(Z_0)$ становится монотонной – это признак исчезновения оболочечных эффектов. Из оставшихся эффектов нейтрализация и поправка Блоха снижают потери (по сравнению с квадратичной зависимостью от Z), поправка Баркаша – повышает. Так как с ростом атомного номера зависимость $S_{\text{max}}(Z)$ слабеет, превращаясь из квадратичной в линейную, то поправку Баркаша можно исключить.

Для выбора между зарядовыми эффектами и поправкой Блоха обратимся к зависимости $S_{\text{max}}(Z_0)$. Найдем ее в предположении, что действуют только зарядовые эффекты. Для этого отбросим в формуле (1) все остальные поправки, подставим $Z_{\text{эф}}$ согласно выражению (4) и I_0 согласно (5); дифференцируя по v , после некоторых преобразований получаем искомую зависимость в параметрическом виде

$$\left. \begin{aligned} Z_0 &= \frac{2m_e v_{\text{Л}}^2 Z^{4/3}}{\lambda^2 K} u^2 \exp\left(-\frac{1 - Ae^{-u}}{1 - Ae^{-u} - Aue^{-u}}\right); \\ S_{\text{max}} &= \Sigma_E \lambda^2 Z_0 Z^{2/3} \frac{(1 - Ae^{-u})^3}{u^2 (1 - Ae^{-u} - Aue^{-u})}. \end{aligned} \right\}$$

Аналогично рассматривается влияние поправки Блоха. Поправку найдем по формуле Баско – де Феррариса – Аристы [28, 29], дающей хорошую точность при всех энергиях

$$\Delta L_{\text{Баско}} = -\frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{\Gamma Z v_{\text{Л}}}{v} \right)^2 \right],$$

где $\Gamma = e^C = 1,781$, $C = 0,5771$ – постоянная Эйлера. Получаем

$$\left. \begin{aligned} Z_0 &= \frac{2\Gamma^2 m_e v_{\text{Л}}^2 Z^2}{K} \frac{u^3}{\sqrt{1+u^2}} \exp\left(-1 - \frac{1}{2(1+u^2)}\right); \\ S_{\text{max}} &= \frac{\Sigma_E Z_0}{\Gamma^2} u^{-2} \left(1 + \frac{1}{2(1+u^2)} \right). \end{aligned} \right\}$$

Зависимость $S_{\text{max}} \text{ заряд}(Z_0)$ характеризуется показателем степени

$$p_{S_{\text{max}0} \text{ заряд}} = \frac{d \ln S_{\text{max}} \text{ заряд}}{d \ln Z_0} = 0,6 \div 0,8,$$

близким к найденному нами $p_{S_{\text{max}0}} = 2/3$. Более того, значения $S_{\text{max}} \text{ заряд}$ количественно согласуются как с формулой (6), так и со значениями S_{max} , найденными из экспериментальных работ (рис. 2). Для поправки Блоха, напротив, показатель $p_{S_{\text{max}0} \text{ Блох}} = 0,32 \div 0,35$ весьма далек от нашего значения, а значения $S_{\text{max}} \text{ Блох}$ в

легких веществах сильно завышены.

Таким образом, величина максимума потерь энергии тяжелого иона определяется зарядовыми эффектами (в тяжелых веществах, возможно, поправкой Блоха).

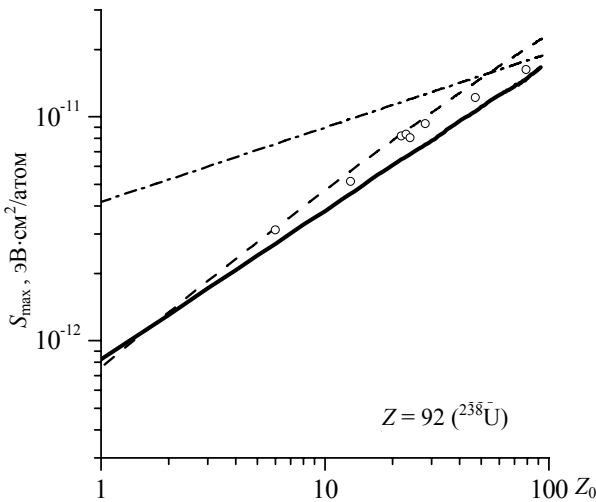


Рис. 2. Величина максимума потерь энергии для тяжелого иона: --- — S_{\max} заряд; - · - · — S_{\max} Блох; — — эмпирическая (6); o — экспериментальные данные [30, 31]

Оценим также границу между "легкими" и "тяжелыми" ионами. В качестве таковой примем значение Z , при котором первое и второе слагаемое в формуле (6) равны. Периодичностью пренебрежем; тогда $S'_{\max} \approx 15 \cdot 10^{-15} Z_0^{1/3}$ эВ·см²/атом, и получаем

$$Z \approx 0,6Z_0^{1/3}.$$

Отсюда вытекает, что в легких веществах все ионы, даже с $Z = 1$, являются "тяжелыми" — зарядовые эффекты для них преобладают над оболочечными. О том же говорят результаты Теплового с сотрудниками [32], установивших, что показатель $p_{S_{\max}} = d \ln S_{\max} / d \ln Z$ у легких ионов ($Z < 4$) зависит от вещества, снижаясь от 2,1 в золоте до 1,2 в водороде. Объяснение этим фактам будет дано ниже.

Положение максимума потерь

Исходя из установленного выше факта, что максимум потерь энергии легкого иона обусловлен оболочечными эффектами, следует ожидать, что положение максимума связано с какими-либо характерными скоростями электронов тормозящего вещества. В литературе встречаются попытки отыскать эту связь. Так, Сиротинин [33] сопоставлял точку максимума потерь с орбитальными скоростями электронов; но связь между ними (не совсем точная) обнаружилась только для инертных газов.

Причина неудачи ясна из рис. 3; на нем показана

скорость $v_{\max 0} = \sqrt{2E_{\max 0}}$ (где $E_{\max 0}$ — параметр в формуле для точки максимума [22]) и среднеквадратичские скорости внешних электронов $\langle v \rangle_{nl}$, рассчитанные в модели Хартри-Фока [34]. Из рисунка видно, что, во-первых, осцилляции $v_{\max 0}$ имеют совершенно иной характер, чем осцилляции скорости внешних электронов (которая, возрастая в пределах каждого периода, при переходе к следующему периоду претерпевает разрыв); во-вторых, с ростом Z_0 $v_{\max 0}$ в общем растет, тогда как скорость внешних электронов от периода к периоду убывает. Оба эти различия объясняются тем, что при $E \sim E_{\max}$ в торможении участвуют не только внешние электроны, но отчасти и электроны более глубоких оболочек; а потому точка максимума должна определяться скоростями не только внешних, но всех электронов вещества, каким-то образом усредненными.

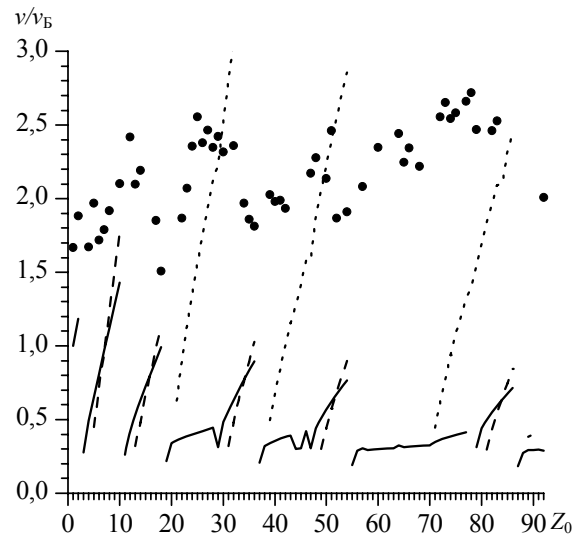


Рис. 3. Точка максимума потерь и орбитальные скорости:

- — $v_{\max 0}$; $\langle v \rangle_{nl}$ {
- — для s -электронов;
- - - для p -электронов;
- · - · — для d -электронов

Величиной, характеризующей суммарно все электроны вещества, является скорость Ферми. Арнау и Эшеник [35] предсказали, что точка максимума потерь легкого иона должна коррелировать с ней. Наши результаты подтверждают это предсказание (рис. 4): $v_{\max 0}$ и v_F близки по величине, и осцилляции их синфазны. Однако с убыванием атомного номера вещества $v_{\max 0}$ убывает медленнее, чем v_F , из-за чего в легких веществах корреляция этих величин нарушается; это указывает на действие иных эффектов, помимо оболочечных.

Коснемся также взаимосвязи между положением и величиной максимума потерь легкого иона. Эту взаимосвязь выражает формула Линдхарда-Шарффа (см., например, [36])

$$S_{\max} \sqrt{E_{\max} / Z_0} = \text{const}.$$

Согласно [37], ее удобно рассматривать как соотношение между тормозным числом L и линдхардовской универсальной переменной $x = v^2 / (v_A^2 Z_0) = 2E / (v_A^2 Z_0)$;

в этих переменных она имеет вид

$$L_{\max} = \text{const} \sqrt{x_{\max}},$$

где L_{\max} и x_{\max} – значения L и x в точке максимума потерь. В пределе $Z \rightarrow 0$ из нее следует

$$L'_{\max} = \text{const} \sqrt{x_{\max 0}}, \quad (7)$$

где $x_{\max 0} = 2E_{\max 0} / (v_A^2 Z_0)$, $L'_{\max} = (S'_{\max} / \Sigma_E) x_{\max 0}$.

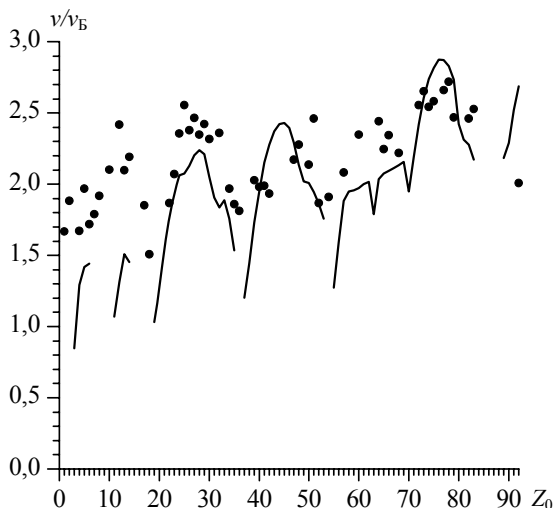


Рис. 4. Точка максимума потерь и скорость Ферми: • – $v_{\max 0}$; — — v_F

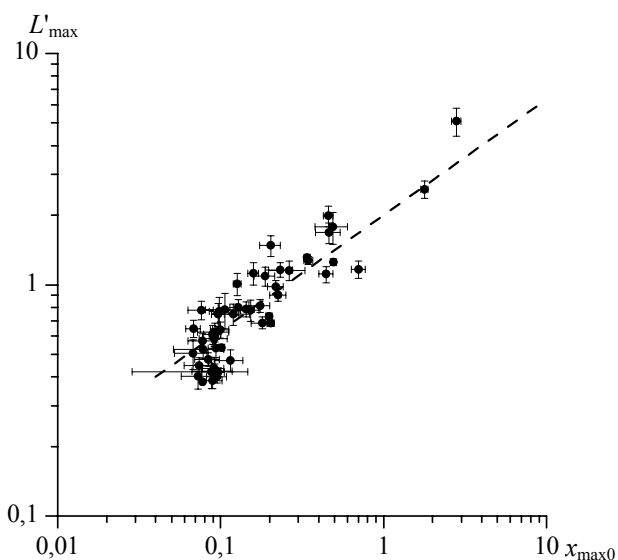


Рис. 5. Связь между положением и величиной максимума потерь

Наши результаты описываются формулой (7) с точностью $\pm 50\%$ (рис. 5); значение константы равно 2.

В области $x_{\max 0} < 0,1$ (что соответствует тяжелым веществам) наблюдается некоторый загиб графика вниз.

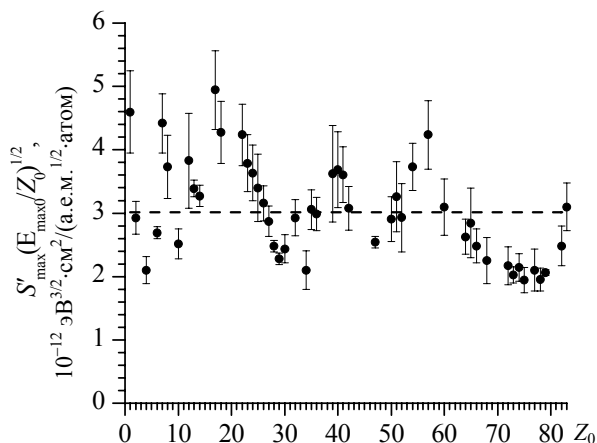


Рис. 6. Остаточная периодичность в формуле Линдхарда – Шарффа. Штриховая линия соответствует рис. 5

Формула Линдхарда – Шарффа, опирающаяся на статистическую (томас-фермиевскую) модель атома вещества, не может точно передать периодических эффектов; как показали Сиротинин с сотрудниками [33, 36], ее левая часть подвержена осцилляциям по Z_0 , хотя и более слабым, чем осцилляции E_{\max} и S_{\max} . Наличие этих остаточных осцилляций также подтвердилось (рис. 6).

Заключение

Итак, мы установили, что при энергиях от $E_{\max} \sim 100Z^{2/3}$ кэВ/а.е.м. до $E_{\text{Гр}} \sim (30Z_0 + 300Z^{3/2})$ кэВ/а.е.м. торможение легких ионов определяется оболочечными эффектами. Исключение составляют легкие вещества, в которых оболочечные эффекты отходят на второй план по сравнению с зарядовыми и с поправкой Блоха; а так как эффективный заряд слабо зависит от вещества, а поправка Блоха не зависит вовсе, то речь идет именно об ослаблении оболочечных эффектов при малых Z_0 . Оно объясняется следующим образом. Так как величина оболочечных эффектов растет с ростом орбитальной скорости (все теории сходятся в том [38], что $\Delta L_{\text{обол 1}} = -\langle v \rangle^2 / v^2$), то основной вклад в них вносят электроны внутренних оболочек. В легких веществах внутренних электронов мало, поэтому и оболочечные эффекты в них слабы.

В торможении тяжелых ионов большую роль играют зарядовые эффекты. Это необходимо особо подчеркнуть в связи с тем, что недавно Зигмунд и Шиннер [39] подвергли сомнению концепцию эффективного заряда, а на роль главного эффекта, определяющего поведение потерь энергии иона ниже границы применимости формулы Бете, выдвинули поправку Блоха. Однако мы видим (см. рис. 1, 2), что расчеты, основан-

ные на поправке Блоха, во многих случаях дают результаты, резко расходящиеся с экспериментом, тогда как использование концепции эффективного заряда, заключенной в формуле (4), приводит к правильным результатам. Это не умаляет важности поправки Блоха; но это доказывает, что ею одной, без учета эффективного заряда, правильно описать потери энергии иона невозможно.

Несколько неожиданным оказалось то, что ни при E_{\max} , ни при $E_{\text{гр}}$ мы не обнаружили никаких проявлений поправки Баркаша. Этот результат выглядит тем более убедительным, что получен без привлечения каких-либо теоретических моделей, на основе самых общих сведений (знак поправки, ее асимптотика при больших v).

С другой стороны, мы рассмотрели только предельные случаи легких ионов ($Z \rightarrow 0$) и тяжелых ионов ($Z \rightarrow \infty$); не исключено, что поправка Баркаша проявляется при промежуточных значениях Z . Так, Датц с сотрудниками [40] утверждают, что в золоте при $Z = 1 \div 2$ эта поправка преобладает над зарядовыми эффектами, что выражается в возрастании отношения S/Z^2 с ростом Z ; при $Z \geq 3$ картина обратная.

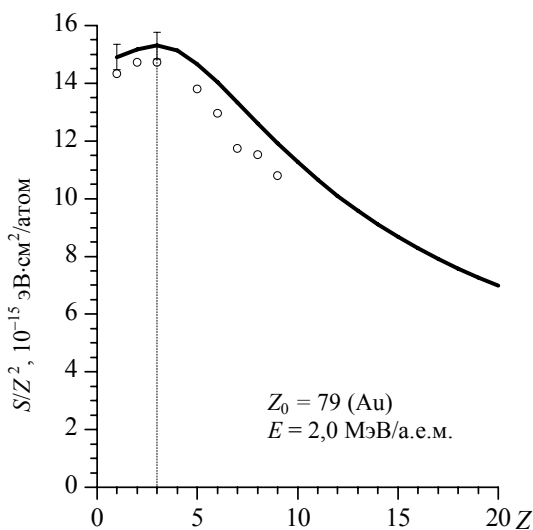


Рис. 7. К сравнению поправки Баркаша и зарядовых эффектов: — — полуэмпирическая формула; \circ — экспериментальные данные [40]

Расчеты по полуэмпирической формуле согласуются с этим наблюдением (рис. 7). Возрастающий участок на графике S/Z^2 наблюдается в достаточно тяжелых веществах ($Z_0 \geq 12$) при энергии от 400–700 кэВ/а.е.м. до $E_{\text{гр}}$; он ограничен значениями $Z < 3 \div 4$. Возрастание не является статистически значимым: превышение максимума над начальным значением даже в самых тяжелых веществах не превосходит погрешности аппроксимации. Из этого мы вправе заключить, что при существующей точности экспериментальных данных поправку Баркаша можно не принимать во внимание.

Полученные результаты могут использоваться при построении теории потерь энергии иона в области максимума потерь.

Список литературы

1. Mikkelsen H. H., Flyvbjerg H. // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 42, N 7. P. 3962–3970.
2. Andersen H. H., Ziegler J. F. The Stopping and Ranges of Ions in Matter. Vol. 3. Hydrogen Stopping Powers and Ranges in All Elements. N.Y.: Pergamon Press, 1977.
3. Sakamoto N., Ogawa H., Tsuchida H. // Nucl. Instr. Meth. B. 2000. Vol. 164–165. P. 250–258.
4. Brandt W. // Phys. Rev. 1958. Vol. 112, N 5. P. 1624–1626.
5. Andersen H. H., Sorensen H., Vajda P. // Phys. Rev. 1969. Vol. 180, N 2. P. 373–380.
6. Sorensen H., Andersen H. H. // Phys. Rev. B. 1973. Vol. 8, N 5. P. 1854–1863.
7. Andersen H. H., Bak J. F., Knudsen H., Nielsen B. R. // Phys. Rev. A. 1977. Vol. 16, N 5. P. 1929–1940.
8. Ziegler J. F. The Stopping and Ranges of Ions in Matter. Vol. 5. Handbook of Stopping Cross-Sections for Energetic Ions in All Elements. N.Y.: Pergamon Press, 1980.
9. Porter L. E., Bryan S. R. // Nucl. Instr. Meth. 1980. Vol. 178, N 1. P. 227–231.
10. Anthony J. M., Lanford W. A. // Phys. Rev. A. 1982. Vol. 25, N 4. P. 1868–1879.
11. Baumgart H., Arnold W., Berg H. et al. // Nucl. Instr. Meth. 1983. Vol. 204, N 2–3. P. 597–604.
12. Porter L. E., Jeppesen R. G. // Nucl. Instr. Meth. 1983. Vol. 204, N 2–3. P. 605–613.
13. Baumgart H., Berg H., Huttel E., Clausnitzer G. // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28, N 5. P. 3109–3111.
14. Porter L. E. // Nucl. Instr. Meth. B. 1985. Vol. 12, N 1. P. 50–55.
15. Ishiwari R., Shiomi N., Sakamoto N. // Nucl. Instr. Meth. B. 1988. Vol. 31, N 4. P. 503–517.
16. Sakamoto N., Shiomi-Tsuda N., Ogawa H., Ishiwari R. // Nucl. Instr. Meth. B. 1988. Vol. 33, N 1–4. P. 158–162.
17. Bichsel H. // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41, N 7. P. 3642–3647.
18. Porter L. E. // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 50, N 3. P. 2397–2404.
19. Porter L. E. // Nucl. Instr. Meth. B. 1995. Vol. 96, N 3–4. P. 643–645.
20. Moller S. P., Uggerhoj E., Bluhme H. et al. // Phys. Rev. A. 1997. Vol. 56, N 4. P. 2930–2940.
21. Ковшов Д. К. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2005. Вып. 1–2. С. 3–12.
22. Ковшов Д. К. // Там же. С. 13–19.
23. Ковшов Д. К. // Там же. Вып. 3. С. 3–9.

24. Gertner I., Meron M., Rosner B. // Phys. Rev. A. 1978. Vol. 18, N 5. P. 2022–2029.
25. Lindhard J., Sorensen A. H. // Phys. Rev. A. 1996. Vol. 53, N 4. P. 2443–2456.
26. Arista N. R., Grande P. L., Lifschitz A. F. // Phys. Rev. A. 2004. Vol. 70, N 4. P. 042902.
27. Bohr N. // Dan. Mat. Fys. Medd. 1948. Bd.18, nr.8.
28. Баско М. М. // Физика плазмы. 1984. Т. 10, № 6. С. 1195–1203.
29. De Ferrariis L., Arista N. R. // Phys. Rev. A. 1984. Vol. 29, N 4. P. 2145–2159.
30. Bimbot R., Gardes D., Geissel H. et al. // Nucl. Instr. Meth. 1980. Vol. 174, N 1–2. P. 231–236.
31. Geissel H., Laichter Y., Schneider W. F. W., Armbruster P. // Nucl. Instr. Meth. 1982. Vol. 194, N 1–3. P. 21–29.
32. Теплова Я. А., Николаев В. С., Дмитриев И. С., Фатеева Л. Н. // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. Вып. 1. С. 44–60.
33. Sirotinin E. I. // Nucl. Instr. Meth. B. 1987. Vol. 27, N 2. P. 323–325.
34. Kaneko T. // At. Data Nucl. Data Tables. 1993. Vol. 53, N 2. P. 271–340.
35. Arnau A., Echenique P. M. // Nucl. Instr. Meth. B. 1989. Vol. 42, N 2. P. 165–170.
36. Sirotinin E. I., Tulinov A. F., Khodyrev V. A., Mizgulin V. N. // Nucl. Instr. Meth. B. 1984. Vol. 4, N 3. P. 337–345.
37. Semrad D., Mertens P., Bauer P. // Nucl. Instr. Meth. B. 1986. Vol. 15, N 1–6. P. 86–90.
38. Sigmund P., Haagerup U. // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34, N 2. P. 892–910.
39. Sigmund P., Schinner A. // Nucl. Instr. Meth. B. 2001. Vol. 174, N 4. P. 535–540.
40. Datz S., Gomez del Campo J., Dittner P.F. et al. // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38, N 20. P. 1145–1148.

Приложение 1

Свойства функции $y + \ln y = x$

В данной работе неоднократно встречаются уравнения вида

$$at^p = b + qln t,$$

где a, p, b, q – постоянные. При $pa/q < 0$ они сводятся к уравнению (относительно y)

$$y + \ln y = x, \quad (\text{П1.1})$$

где

$$y = \left| \frac{pa}{q} \right| t^p, \quad x = -\frac{pb}{q} + \ln \left| \frac{pa}{q} \right|.$$

Это уравнение задает вещественную функцию $y = y_L^{(+)}(x)$. Она определена при всех x , однозначна и монотонно возрастает.

При $x \rightarrow +\infty$ уравнение можно решать методом итераций, переписав его в виде $y = x - \ln y$; в качестве первого приближения возьмем $y_1 = x$. Решение имеет вид

$$y = x - \ln(x - \ln(x - \dots)).$$

Итерационный процесс сходится при всех $x \geq 1$; скорость сходимости достаточно высока. При $x > 7,0$ третье приближение обеспечивает точность 1 %.

При $x \rightarrow -\infty$ также применим метод итераций, но уравнение нужно записать как $y = e^{x-y}$, а в качестве первого приближения взять $y_1 = e^x$. Получаем

$$y = \exp(x - \exp(x - \exp(x - \dots))).$$

Итерации сходятся при $x < 0$, причем очень быстро: третье приближение дает точность 1 % уже при $x < -1,4$.

Вблизи $x = 1$ функция разлагается в степенной ряд:

$$y = 1 + \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(x-1)^3}{32} - \frac{(x-1)^4}{128} + \dots$$

Приложение 2

Скорость Ферми в простых веществах

Скорость Ферми вычисляется по формуле

$$v_F = \frac{\hbar}{m_e} (3\pi^2 n_e)^{1/3},$$

где n_e – концентрация электронов в веществе. Зависимость $v_F(Z_0)$ в конденсированных средах имеет осциллирующий характер (см. рис. 4); для ее монотонной составляющей можно получить оценку

$$v_F \approx 0,59 v_{\Lambda} Z_0^{1/3}. \quad (\text{П2.1})$$

Статья поступила в редакцию 11.12.2007.