

ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ В РАМКАХ ОДНОСКОРОСТНОЙ НЕЙТРОННОЙ КИНЕТИКИ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Н. Б. Бабичев, И. В. Лутиков, В. П. Незнамов

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Изучены подобные с точки зрения нейтронной кинетики конечные по размерам квазистационарные системы с произвольной геометрией. Целью этой работы является поиск подобных систем на основе анализа кинетического уравнения для нейтронов. Получены формулы подобия для некоторых классов квазистационарных систем.

Введение

Под подобными будем подразумевать такие квазистационарные системы, для которых решения кинетического уравнения на собственные функции (СФ) и собственные значения (СЗ) связаны между собой определёнными соотношениями (формулы подобия). Эти формулы полезны тем, что для нахождения характеристик нейтронной кинетики целого класса подобных систем достаточно определить СФ и СЗ (например, путем численного решения кинетического уравнения) в случае какой-то одной конкретной системы из данного класса.

Целью этой работы является поиск подобных систем на основе анализа кинетического уравнения для нейтронов. В общем случае оно имеет весьма сложный вид (см., например, [1–3]). Для упрощения поставленной задачи, наряду с квазистационарным приближением, ниже примем следующие упрощения: считается, что все нейтроны имеют одинаковую по величине скорость, индикатриса упругого рассеяния нейтронов на ядрах изотропна, а неупругие процессы отсутствуют.

Таким образом, далее будем исходить из односкоростного кинетического уравнения для нейтронов

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + (\vec{\Omega} \nabla) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \alpha(\vec{r}) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta(\vec{r})}{4\pi} n(t, \vec{r}), \quad (1)$$

где $\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$ – единичный вектор, направленный вдоль вектора \vec{V} скорости полета нейтрона; $\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ – nabla-оператор; $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ – функция распределения нейтро-

нов в фазовом пространстве векторов \vec{r} и $\vec{\Omega}$; $n(t, \vec{r}) = \int d\vec{\Omega}' \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}')$ – нейтронная плотность; $\alpha(\vec{r}) = n_{\bar{y}}(\vec{r})(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$; $\beta(\vec{r}) = n_{\bar{y}}(\vec{r})(\nu\sigma_f + \sigma_s) = \nu\alpha_f + \alpha_s$ – параметры Пайерлса; $\sigma_s, \sigma_f, \sigma_c$ – элементарные сечения рассеяния, деления и захвата; ν – среднее число нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра; $n_{\bar{y}}(\vec{r}) = \frac{N_A}{A} \rho(\vec{r})$ – плотность ядер с массовым числом A внутри вещества с плотностью $\rho(\vec{r})$; N_A – число Авогадро.

Если вещество состоит из смеси ядер, то, например, макроскопическое сечение рассеяния нейтронов равно

$$\alpha_s = \frac{N_A \rho}{\sum_i \mu_i A_i} \sum_i \mu_i \sigma_{si}.$$

Здесь A_i и μ_i – соответственно массовое число и концентрация по частицам ядер i -го сорта.

Активностью вещества будем называть отношение $h = \frac{\beta}{\alpha}$ ($h < 1$ – нейтронопоглощающая среда, $h > 1$ – активное вещество из делящихся материалов, $h = 1$ – инертное вещество, представляющее собой идеальный рассеиватель нейтронов, у которого $\sigma_s \neq 0$, а $\sigma_f = \sigma_c = 0$).

Если кинетическое уравнение (1) проинтегрировать по углам $\vec{\Omega}$, то получим

$$\frac{1}{V} \left[\frac{\partial n(t, \vec{r})}{\partial t} + \text{div } \vec{j}(t, \vec{r}) \right] = (\beta - \alpha) n(t, \vec{r}). \quad (2)$$

Величина $\vec{j}(t, \vec{r}) = V \int d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ называется векторным потоком нейтронов.

Далее будем рассматривать квазистационарные системы, т. е. системы, в которых эволюция функции распределения во времени подчиняется экспоненциальному закону

$$\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = e^{\lambda t} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (3)$$

Отсюда следует, что

$$n(t, \vec{r}) = e^{\lambda t} n(\vec{r}), \quad \vec{j}(t, \vec{r}) = e^{\lambda t} \vec{j}(\vec{r}). \quad (4)$$

Известно (см. [1]), что кинетическое уравнение для нейтронов (1) в случае систем с конечными размерами имеет дискретные решения на СЗ $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$ и соответствующие им решения на СФ. Общим решением является суперпозиция $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \sum_m a_m e^{\lambda_m t} \psi_m(\vec{r}, \vec{\Omega})$.

Если $t \geq t_0 \gg \frac{1}{\lambda_0}$, то общее решение становится квазистационарным. Постоянную $\lambda = \lambda_0$ в формулах (3), (4) называют наибольшим (главным) СЗ; t_0 – характерное время выхода решения на квазистационарное.

1. Класс произвольных по геометрии квазистационарных систем с одинаковым однородным изотопным составом вещества

Пусть задана некоторая исходная система (в общем случае трехмерная) с произвольными геометрической формой и пространственным распределением плотности вещества $\rho(\vec{r})$.

Предположим, что в случае некоторой исходной системы решения кинетического уравнения на СЗ и СФ известны. Требуется отыскать решения на СЗ и СФ для подобных систем с одинаковым изотопным составом

при условии постоянства отношений $\frac{\alpha(\vec{r})}{\rho(\vec{r})}, \frac{\beta(\vec{r})}{\rho(\vec{r})}$.

Как более простые, в первую очередь изучим системы с постоянными параметрами Пайерлса.

1.1. Частный случай подобных систем с постоянной плотностью $\rho = \text{const}$

Пусть геометрическая форма системы произвольна, а плотность вещества и пропорциональные ей параметры $\alpha = \alpha_0 \frac{\rho}{\rho_0}, \beta = \beta_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ (ρ_0 – некоторая равновесная плотность материала) не зависят от координат.

Воспользуемся известным свойством инвариантности кинетического уравнения для нейтронов относительно преобразований подобия. В формуле (1) произведем следующие замены переменных t и \vec{r} на t' и \vec{r}' :

$$t \rightarrow t' = \frac{\rho}{\rho'} t; \quad (5)$$

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \frac{\rho}{\rho'} \vec{r}. \quad (6)$$

Очевидно, что при этом

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial}{\partial t}; \quad \nabla \rightarrow \nabla' = \frac{\rho'}{\rho} \nabla;$$

$$\alpha \rightarrow \alpha' = \frac{\rho'}{\rho} \alpha; \quad \beta \rightarrow \beta' = \frac{\rho'}{\rho} \beta.$$

После указанных преобразований вид уравнения (1) остается прежним относительно теперь уже штрихованных СФ

$$\psi \rightarrow \psi'(t', \vec{r}', \vec{\Omega}) = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^3 \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}); \quad (7)$$

$$n \rightarrow n'(t', \vec{r}') = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^3 n(t, \vec{r}). \quad (8)$$

Таков закон трансформации СФ при преобразованиях подобия (5), (6). Он дает возможность пересчета в классе подобных систем решенной нестационарной задачи в другую пространственно-временную область изменения аргументов.

В рассматриваемом здесь квазистационарном случае преобразование (6) следующим образом изменяет СЗ:

$$\lambda(\rho') = \frac{\rho'}{\rho} \lambda(\rho). \quad (9)$$

Формула (9) столь же точна, как и квазистационарное кинетическое уравнение (10), на основе которого она получена.

$$\left(\vec{\Omega} \frac{d}{d\vec{r}}\right) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \left(\alpha + \frac{\lambda}{V}\right) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} n(\vec{r}). \quad (10)$$

Если однородная среда бесконечна, то кинетическое уравнение кроме СФ и СЗ содержит в себе единственный физический размерный параметр α ($\beta = h\alpha$). На нем невозможно построение инварианта преобразования (6). Поэтому для бесконечной среды формула (9) приводит к простому линейному по плотности общему решению кинетического уравнения на СЗ

$$\lambda = a\rho, \quad (11)$$

где a – константа, значение которой определяется ядерно-физическими свойствами среды. Найдем ее. Для этого вначале, не переходя к бесконечному пределу, выражение (4) подставим в формулу (2) и полученный результат усредним по объему.

В итоге приходим к уравнению баланса нейтронов в системе

$$\frac{\lambda}{V} - (\beta - \alpha - W) = 0; \quad W = \frac{1}{V} \int \bar{j} d\bar{S}. \quad (12)$$

В числителе выражение (12) интегрирование ведется по внешней поверхности объекта, а в знаменателе – по его объему.

Величина W , связанная с вероятностью вылета нейтронов из системы, часто именуется эффективным макроскопическим сечением поглощения нейтронов, вызванного их утечкой наружу.

Для бесконечной среды $W = 0$ и уравнение баланса переходит в соотношение

$$\lambda = \lambda_\infty = (\beta - \alpha)V = \alpha(h - 1)V = [(v - 1)\alpha_f - \alpha_c]V. \quad (13)$$

Отсюда и определяется искомая константа

$$a = (h - 1) \frac{\alpha_0}{\rho_0} V. \quad (14)$$

Рассмотрим теперь конечную по размерам однородную систему с некоторым характерным размером R .

Объем и площадь поверхности любого тела всегда можно записать в виде

$$V_T = C R^3, \quad S_T = C' R^2, \quad (15)$$

где C и C' – постоянные, определяемые геометрической формой тела и выбором R в качестве его характерного размера.

Для конечной системы в дополнение к кинетическому уравнению возникает граничное условие на внешней поверхности. Оно привносит R в качестве еще одного размерного физического параметра. На двух имеющихся теперь размерных параметрах можно построить следующий безразмерный инвариант преобразования:

$$\text{inv}_1 = \alpha R, \quad (16)$$

что, по сути, эквивалентно размерному инварианту

$$\text{inv} = \tau = \rho R. \quad (17)$$

Возможно построение и других инвариантов (например, $\text{inv}_2 = M^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{2}{3}}$, M – масса тела). Существенно то, что все эти инварианты выражаются друг через друга. Поэтому в данной задаче для определенности выберем один инвариант, например (17).

Тогда в соответствии с выражением (9) общим решением кинетического уравнения на СЗ является

$$\lambda = \rho F(\tau). \quad (18)$$

Здесь F произвольная функция от $\tau = \rho R$. Ее можно отыскать, зная геометрию, массу и изотопный состав системы. В случае бесконечной в двух измерениях пластины с конечной толщиной Δ функция $F(\tau)$ вырождается в произвольную постоянную $F(\tau = \rho \Delta) = \text{const}$.

Преобразование (6), оставляя неизменными величины τ и характерную оптическую толщину αR , влечет за собой следующее соотношение между массами (M и M') подобных друг другу систем:

$$M \rightarrow M' = M \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^2. \quad (19)$$

Далее, при сравнении любых двух подобных систем будем их отмечать индексами «1» и «2». Выпишем итоговые формулы подобия для СЗ (они вытекают из выражения (18)).

$$\lambda_2 \left[\rho_2, M_2 = M_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \right] = \frac{\rho_2}{\rho_1} \lambda_1(\rho_1, M_1). \quad (20)$$

Вместо этого можно пользоваться формулой

$$\lambda_2(\rho_2, M_2) = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} \lambda_1(\rho_1, M_1). \quad (21)$$

Если требуется выполнить пересчет с одного размера на другой, то удобным является соотношение подобия

$$\lambda_2(\rho_2, M_2) = \frac{R_1}{R_2} \lambda_1(\rho_1, M_1). \quad (22)$$

Сделаем замечание по поводу критических активных ($h > 1$) систем. Пусть исходная система «1» находится в критическом состоянии. Тогда $\lambda_1(\rho_{1*}, M_{1*}) = 0$, M_{1*} – критическая масса активного тела с плотностью ρ_{1*} . Из формулы (20) следует, что

$$\lambda_2 \left[\rho_{2*}, M_{2*} = M_{1*} \left(\frac{\rho_{1*}}{\rho_{2*}} \right)^2 \right] = 0,$$

т. е. все системы, подобные критической, тоже критические и существует набор выражающихся друг через друга критических инвариантов

$$\tau_* = \rho_* R_*, \quad M_* \rho_*^2, \dots \quad (23)$$

Значения констант (23) зависят от типа геометрии подобных критических систем и от ядерно-физических свойств материалов, из которых они состоят.

Необходимо подчеркнуть, что закон (23) $M_* \rho_*^2 = \text{const}$ на основе решения уравнения диффузии нейтронов в случае активного шара был открыт очень давно (не позднее 1943 года, см. [4]).

Формулы подобия (20)–(22) тоже были известны, но в данном случае мы не знаем, кто их получил впервые (найти соответствующие литературные первоисточники нам, к сожалению, не удалось).

Вполне вероятно, что и общее решение (18), из которого вытекают формулы подобия, также не обладает новизной.

Здесь, несколько удалившись от основной темы, уместно кратко изложить следующие результаты новых исследований активных систем.

Вместо выражения (18) общее решение кинетического уравнения на СЗ при $h > 1$ можно выразить так

$$\lambda = [\rho - \rho_*(M)] f(\tau = \rho R). \quad (24)$$

Эта форма записи выгодно отличается от (18) тем, что в отличие от $F(\tau)$ новая произвольная функция $f(\tau)$ не зависит от массы M рассматриваемого объекта.

Зависимость λ от M в формуле (24) передается единственной в данном случае функцией

$$\rho_*(M) = \sqrt{\frac{M_{0*}}{M}} \rho_{0*},$$

где M_{0*} – известная (например, измеренная в эксперименте) величина критической массы при плотности ρ_{0*} . Кроме того, функция f слабо зависит от τ . Это не относится к $F(\tau)$. Можно показать, что при $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$, где $h_{\min} \approx 1,3$, $h_{\max} \approx 2,1$, в достаточном широком диапазоне изменения ρ функцию $f(\tau)$ с большой точностью можно заменить на константу

$$\lambda = b_0 [\rho - \rho_*(M)]. \quad (25)$$

Если геометрия системы проста, то кинетическое уравнение (10) в точке $\lambda = -\alpha V$ (глубоко подкритическое состояние) можно решить аналитически с высокой точностью. В случае активного шара с радиусом R квазистационарным решением на СЗ является* $\lambda = -\alpha V = -\frac{k_0 V}{hR}$, $k_0 = 1,273885$. Из него определяется постоянная в (25).

После нахождения постоянной b_0 , к примеру, для среднего по интервалу $h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$ значения $h = \frac{h_{\min} + h_{\max}}{2} = 1,7$ было выполнено сравнение результатов вычислений λ по формуле (25) и численных расчетов СЗ кинетического уравнения (10). Оказалось, что соотношение (25) выполняется с точностью порядка одного процента в $\lambda = \lambda(h=1,7)$ для всех плотностей ρ из очень широкого диапазона $0,3\rho_* \leq \rho \leq 1,9\rho_*$.

Отметим, что даже в пределе $\tau \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \infty$ при условии постоянства M , когда истинное значение λ

* При $\lambda = -\alpha V$ исчезает второй член в левой части (10), т. е. кинетическое уравнение вырождается. С вырожденным случаем связана решенная Пайерлсом в работе [5] задача о критической массе шара в пределе $h \rightarrow \infty$. Нам удалось уточнить СФ и СЗ Пайерлса [5], а также получить решение $\lambda = -\alpha V = -\frac{k_0 V}{hR}$. Кстати говоря, оно справедливо при любых $h > 0$ и в точности удовлетворяет приведенным ниже формулам подобия (35) и (36).

стремится к $\lambda_\infty = \alpha(h-1)V$, погрешность приближенной формулы (25) не превышает десяти процентов.

1.2. Подобные системы с произвольным профилем плотности вещества

Пусть теперь плотность вещества произвольным образом $\rho = \rho(\vec{r})$ зависит от координат, но исследования ограничим классом систем с одинаковым профилем плотности $\frac{\rho_2(\vec{r})}{\rho_1(\vec{r})} = \frac{\rho_3(\vec{r})}{\rho_1(\vec{r})} = \dots = \text{const}$. Для таких систем формулы подобия (7), (8) и (20)–(23) остаются в силе, если под величинами ρ_1 , и ρ_2 в них подразумевать

средние по объему системы значения $\bar{\rho}_1 = \frac{\int d\vec{r} \rho_1(\vec{r})}{\int d\vec{r}}$ и $\bar{\rho}_2$.

Доказать это не представляет труда на основе общих решений $\lambda = \bar{\rho} F(\bar{\tau} = \bar{\rho} R)$, либо $\lambda = [\bar{\rho} - \bar{\rho}_*(M)] f(\bar{\tau})$, которые являются обобщениями формул (18) и (24) на решаемую здесь задачу.

Доказательство можно выполнить и другим способом.

Квазистационарное кинетическое уравнение (10) для рассматриваемого случая $h = \text{const}$ запишем в фазовом пространстве безразмерных векторов $\vec{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}$ и $\vec{\Omega}$.

$$\left(\vec{\Omega} \frac{d}{d\vec{\xi}} \right) \Psi(\vec{\xi}, \vec{\Omega}) + \left[D(\vec{\xi}) + \frac{\lambda \rho_0}{\alpha_0 \bar{\rho} V} \right] \frac{\alpha_0}{\rho_0} \bar{\rho} R \Psi(\vec{\xi}, \vec{\Omega}) = \frac{h}{4\pi} \frac{\alpha_0}{\rho_0} \bar{\rho} R D(\vec{\xi}) n(\vec{\xi}). \quad (26)$$

Здесь введены средняя плотность $\bar{\rho} = \frac{\int d\vec{r} \rho(\vec{r})}{\int d\vec{r}}$ и безразмерная профильная функция $D(\vec{\xi})$, такая, что $\rho(\vec{\xi}) = \bar{\rho} D(\vec{\xi})$. При этом справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\int d\vec{\xi} D(\vec{\xi})}{\int d\vec{\xi}} = 1 \quad (\text{условие нормировки произвольной}$$

функции $D(\vec{\xi})$); $\int d\vec{\xi} = C$; $\alpha(\vec{\xi}) = \frac{\alpha_0}{\rho_0} \rho(\vec{\xi})$; $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_0}{\rho_0} \bar{\rho}$.

Запись кинетического уравнения в форме (26) характеризуется тем, что преобразование подобия типа (6) $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}'} \vec{r}$, $R \rightarrow R' = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}'} R$ не изменяет вектор $\vec{\xi}$, который поэтому является векторным инвариантом.

Теперь рассмотрим две подобные системы «1» и «2». Из выражения (26) следует, что для выполнения равенств (27) достаточны условия (28), (29).

$$\begin{aligned}\psi_2(\bar{\xi}_2, \bar{\Omega}) &= \psi_1(\bar{\xi}_1, \bar{\Omega}), \quad n_2(\bar{\xi}_2) = n_1(\bar{\xi}_1), \\ \bar{j}_2(\bar{\xi}_2) &= \bar{j}_1(\bar{\xi}_1); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\left[D(\bar{\xi}) + \frac{\lambda_2 \rho_0}{\alpha_0 \bar{\rho}_2 V} \right] \frac{\alpha_0}{\rho_0} \bar{\rho}_2 R_2 = \left[D(\bar{\xi}) + \frac{\lambda_1 \rho_0}{\alpha_0 \bar{\rho}_1 V} \right] \frac{\alpha_0}{\rho_0} \bar{\rho}_1 R_1; \quad (28)$$

$$\bar{\rho}_2 R_2 = \bar{\rho}_1 R_1. \quad (29)$$

В итоге из выражений (28), (29) имеем следующую искомую модификацию формулы (20):

$$\lambda_2 \left[\bar{\rho}_2, M_2 = M_1 \left(\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2} \right)^2 \right] = \frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1} \lambda_1(\bar{\rho}_1, M_1). \quad (30)$$

Модификации остальных соотношений подобия подраздела 1.1 получаются автоматически. Очевидно также, что вместо (23) теперь имеем $M_* \bar{\rho}_*^2 = \text{const}$.

Рассмотренные в этом подразделе подобные системы могут быть многосвязными, поскольку это является частным случаем объектов с произвольным профилем плотности вещества.

2. Подобные квазистационарные системы, в общем случае отличающиеся друг от друга ядерно-физическими свойствами входящих в них веществ

2.1. Произвольные по геометрии подобные квазистационарные системы с разными, но не зависящими от координат параметрами Пайерлса

Зафиксировав геометрическую форму тела, рассмотрим две системы, отличающиеся произвольными по величине постоянными параметрами Пайерлса α_1 , β_1 и α_2 , β_2 .

Из кинетического уравнения (31) следует, что равенства (32) имеют место, если соблюдаются условия (33) и (34).

$$\left(\bar{\Omega} \frac{d}{d\bar{\xi}} \right) \psi(\bar{\xi}, \bar{\Omega}) + \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V} \right) \alpha R \psi(\bar{\xi}, \bar{\Omega}) = \frac{\beta R}{4\pi} n(\bar{\xi}), \quad (31)$$

$\bar{\xi} = \frac{\bar{r}}{R}$, R – характерный линейный размер.

$$\begin{aligned}\psi_2\left(\frac{\bar{r}}{R_2}, \bar{\Omega}\right) &= \psi_1\left(\frac{\bar{r}}{R_1}, \bar{\Omega}\right); \quad n_2\left(\frac{\bar{r}}{R_2}\right) = n_1\left(\frac{\bar{r}}{R_1}\right); \\ \bar{j}_2\left(\frac{\bar{r}}{R_2}\right) &= \bar{j}_1\left(\frac{\bar{r}}{R_1}\right); \end{aligned} \quad (32)$$

$$\left(1 + \frac{\lambda_2}{\alpha_2 V} \right) \alpha_2 R_2 = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V} \right) \alpha_1 R_1; \quad (33)$$

$$\beta_2 R_2 = \beta_1 R_1. \quad (34)$$

Из уравнений (33), (34) получается искомый ответ

$$\lambda_2 = \left[\frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V} \right) - 1 \right] \alpha_2 V. \quad (35)$$

Кроме (35) можно записать следующие соотношения, если зависимость α от плотности ρ представить в виде $\alpha(\rho) = \frac{\rho}{\rho_0} \alpha_0$:

$$\lambda_2 = \left[\frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V} \right) - 1 \right] \alpha_2 V; \quad (36)$$

$$\lambda_2 = \left[\frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_0 V} \frac{\rho_{01}}{\rho} \right) - 1 \right] \frac{\alpha_{02}}{\rho_{02}} \rho V. \quad (37)$$

Из (34) вытекает следующее соотношение между массами подобных систем:

$$M_2 = \gamma_0 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 M_1; \quad (38)$$

$$\gamma_0 = \left(\frac{h_1 \alpha_{01} \rho_{02}}{h_2 \alpha_{02} \rho_{01}} \right)^3. \quad (39)$$

Величина γ_0 в подразделе 1.1 равнялась единице поскольку в нем речь шла о подобных системах из одинакового вещества. Здесь же $\gamma_0 \neq 1$ даже в случае

$$h_2 = h_1, \quad \text{если} \quad \frac{\alpha_{02}}{\rho_{02}} \neq \frac{\alpha_{01}}{\rho_{01}}.$$

Покажем, что формулы подобия, полученные на основе интегродифференциального кинетического уравнения, можно вывести также из квазистационарного интегрального уравнения Пайерлса (см. [2])

$$n(\bar{r}) = \int \frac{d\bar{r}' \beta(\bar{r}') n(\bar{r}')}{4\pi |\bar{r}' - \bar{r}|^2} \exp \left[- \left(\alpha + \frac{\lambda}{V} \right) |\bar{r}' - \bar{r}| \right]. \quad (40)$$

Для этого представим (40) в следующей форме:

$$n(\bar{\xi}) = \frac{\beta R}{4\pi} \int \frac{d\bar{\xi}' n(\bar{\xi}')}{|\bar{\xi}' - \bar{\xi}|^2} \exp \left[- \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V} \right) \alpha R |\bar{\xi}' - \bar{\xi}| \right]. \quad (41)$$

Из сравнения (41) для двух систем «1» и «2» следуют равенства (33), (34) и формулы подобия (32), (36), что и требовалось доказать.

2.2. Подобные квазистационарные системы с зависящими от координат активностью и параметрами Пайерлса

Усложним решенную в подразделе 2.1 задачу, считая теперь, что $\alpha_1 = \alpha_1(\bar{r})$, $\beta_1 = \beta_1(\bar{r})$ и $\alpha_2 = \alpha_2(\bar{r})$, $\beta_2 = \beta_2(\bar{r})$.

2.2.1. Подобные системы, в которых от координат зависит только активность веществ

Пусть $h = h(\vec{r})$, $\alpha = \text{const}$. Тогда кинетическое уравнение принимает следующий вид:

$$\left(\bar{\Omega} \frac{d}{d\bar{\xi}}\right) \Psi(\bar{\xi}, \bar{\Omega}) + \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha V}\right) \alpha R \Psi(\bar{\xi}, \bar{\Omega}) = \frac{\alpha R \bar{h} H(\bar{\xi})}{4\pi} n(\bar{\xi}); \quad (42)$$

$$h(\bar{\xi}) = h H(\bar{\xi}), \quad \frac{\int d\bar{\xi} H(\bar{\xi})}{\int d\bar{\xi}} = 1. \quad (43)$$

Равенства (32) возникают при условиях

$$\left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V}\right) \alpha_1 R_1 = \left(1 + \frac{\lambda_2}{\alpha_2 V}\right) \alpha_2 R_2; \quad (44)$$

$$\alpha_1 R_1 \bar{h}_1 H_1(\bar{\xi}) = \alpha_2 R_2 \bar{h}_2 H_2(\bar{\xi}). \quad (45)$$

Подобными будут системы, для которых $H_1(\bar{\xi}) = H_2(\bar{\xi}) = H(\bar{\xi})$ и соблюдается связь

$$\alpha_1 R_1 \bar{h}_1 = \alpha_2 R_2 \bar{h}_2. \quad (46)$$

Используя выражения (44) и (46), получим

$$\lambda_2 = \alpha_2 V \left[\frac{\bar{h}_2}{\bar{h}_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V}\right) - 1 \right]. \quad (47)$$

2.2.2. Подобные квазистационарные системы с зависящими от координат параметрами Пайерлса α и β

Пусть оба параметра Пайерлса зависят от координат: $\alpha = \alpha(\vec{r})$, $\beta = \beta(\vec{r})$. Будем рассматривать тот случай с точки зрения параметров Пайерлса случай, когда их пространственная неоднородность определяется не только функцией $\rho = \rho(\vec{r})$, но также и зависимостью концентраций ядер от координат $\mu_i = \mu_i(\vec{r})$ в следующих формулах

$$\alpha = \frac{N_a \rho}{\sum_i \mu_i A_i} \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \sigma_{fi} + \sigma_{ci});$$

$$\beta = \frac{N_a \rho}{\sum_i \mu_i A_i} \sum_i \mu_i (\sigma_{si} + \nu_i \sigma_{fi}). \quad (48)$$

Если ввести безразмерный радиус-вектор точки наблюдения $\bar{\xi} = \frac{\vec{r}}{R}$, то $\alpha = \bar{\alpha} A(\bar{\xi})$ и $\beta = \bar{\beta} B(\bar{\xi})$, где $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ – соответствующие средние по объему системы значения, а профильные функции нормированы следующим образом:

$$\frac{\int d\bar{\xi} A(\bar{\xi})}{\int d\bar{\xi}} = \frac{\int d\bar{\xi} B(\bar{\xi})}{\int d\bar{\xi}} = 1. \quad (49)$$

Запишем квазистационарное кинетическое уравнение для нейтронов

$$\left(\bar{\Omega} \frac{d}{d\bar{\xi}}\right) \Psi(\bar{\xi}, \bar{\Omega}) + \left[A(\bar{\xi}) + \frac{\lambda}{\alpha V}\right] \bar{\alpha} R \Psi(\bar{\xi}, \bar{\Omega}) = \frac{\bar{\beta} B(\bar{\xi}) R}{4\pi} n(\bar{\xi}). \quad (50)$$

Если оно решено для произвольной исходной системы «1», то переход к любой подобной системе «2» не приведет к изменению СФ (см. (32)) при соблюдении следующих условий:

$$\left[A_2(\bar{\xi}) + \frac{\lambda_2}{\alpha_2 V}\right] \bar{\alpha}_2 R_2 = \left[A_1(\bar{\xi}) + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V}\right] \bar{\alpha}_1 R_1. \quad (51)$$

$$\bar{\beta}_2 R_2 B_2(\bar{\xi}) = \bar{\beta}_1 R_1 B_1(\bar{\xi}). \quad (52)$$

Сделаем сильное упрощающее предположение, которое решение поставленной задачи ограничивает классом подобных по зависимости $\beta(\bar{\xi})$ систем:

$$B_2(\bar{\xi}) = B_1(\bar{\xi}) = B(\bar{\xi}). \quad (53)$$

Из (53) вовсе не следует равенство $h_2(\bar{\xi}) = h_1(\bar{\xi})$.

Соотношение (52) приводит к связи между соответствующими характерными размерами двух тел

$$R_2 = \frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_2} R_1. \quad (54)$$

После подстановки (54) в (51) имеем

$$A_2(\bar{\xi}) + \frac{\lambda_2}{\alpha_2 V} = \left[A_1(\bar{\xi}) + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V}\right] \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1}. \quad (55)$$

В результате интегрирования левой и правой частей равенства (55) по безразмерному объему с учетом (56) получаем искомую формулу (57).

$$\int d\bar{\xi} A_2(\bar{\xi}) = \int d\bar{\xi} A_1(\bar{\xi}) = C = \int d\bar{\xi}; \quad (56)$$

$$\lambda_2 = \left[\frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V}\right) - 1 \right] \bar{\alpha}_2 V. \quad (57)$$

Легко убедиться, что при этом нормированные в соответствии с (56) зависимости параметров α от координат для подобных систем связаны соотношением

$$A_2(\bar{\xi}) = 1 + \left[A_1(\bar{\xi}) - 1\right] \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1}. \quad (58)$$

Следует подчеркнуть, что произвольные профильные функции $A_1(\bar{\xi})$ и $B_1(\bar{\xi})$, относящиеся к исходной системе, могут быть кусочно-непрерывными и иметь любое число разрывов (скачков).

Остановимся на некоторых других формулах. После отыскания профилей $A_2(\bar{\xi})$ и $B_2(\bar{\xi})$ осталось оп-

ределить зависимость $h_2(\bar{\xi})$ (функция $h_1(\bar{\xi})$ предполагается известной)

$$h_2(\bar{\xi}) = \frac{\beta_2(\bar{\xi})}{\alpha_2(\bar{\xi})} = \frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}_2} \frac{B_2(\bar{\xi})}{A_2(\bar{\xi})} = \frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\alpha}_2} \frac{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 B_1(\bar{\xi})}{\bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 + \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2 [A_1(\bar{\xi}) - 1]} \quad (59)$$

В уравнение баланса $\lambda - (\bar{\beta} - \bar{\alpha}) - W = 0$ входит связанная с вероятностью вылета нейтронов из системы величина

$$W = \frac{1}{V} \frac{\dot{I}}{N}; \quad N = \int n d\bar{r}; \quad \dot{I} = \int \dot{j} d\bar{s}. \quad (60)$$

Если в (60) перейти к интегрированию по безразмерным внешней поверхности системы $d\bar{\sigma} = \frac{d\bar{S}}{R^2}$ и ее

объему $d\bar{\xi} = \frac{d\bar{r}}{R^3}$, то $W = \frac{1}{V R} \int \dot{j} d\bar{\sigma} \int nd\bar{\xi}$. Отсюда следует преобразование подобия величины W

$$W_2 = \frac{R_1}{R_2} W_1 = \frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_1} W_1. \quad (61)$$

Соотношение (54) и связь массы M с характерным размером R ($M = C \bar{\rho} R^3$) приводят к закону $M \frac{\bar{\beta}^3}{\bar{\rho}} = \text{const}$ трансформации масс при переходе между подобными системами

$$M_2 = \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \left(\frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_2} \right)^3 M_1. \quad (62)$$

Очевидно, что возможны более простые подобные системы, для которых, кроме равенства (53), соблюдается также условие

$$A_2(\bar{\xi}) = A_1(\bar{\xi}) = A(\bar{\xi}). \quad (63)$$

При этом из (58) получаем (64) и формула для СЗ (57) переходит в (65)

$$\frac{\bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_1} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1}; \quad (64)$$

$$\lambda_2 = \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1} \lambda_1. \quad (65)$$

Легко убедиться, что в таком случае

$$h_2(\bar{\xi}) = h_1(\bar{\xi}). \quad (66)$$

2.2.3. Частный случай подобных критических систем

Частному случаю $\lambda = 0$ отвечают критические системы, для которых упрощается кинетическое уравнение (50) и его решение на СЗ (57).

Если положить $\lambda_1 = 0$, то из выражения (57) вытекает, что подобными критическими ($\lambda_2 = 0$) системами будут те, для которых выполняется равенство (64). Оно представляет собой рассмотренный в подразделе 2.2.2 простейший частный случай подобных систем с одинаковыми пространственными зависимостями (53) и (63) параметров Пайерлса при равенстве (66) активностей в любой точке $\bar{\xi}$. Для подобных критических систем очевидными являются формулы

$$\bar{\alpha}_2 R_2 = \bar{\alpha}_1 R_1; \quad (67)$$

$$\bar{\beta}_2 R_2 = \bar{\beta}_1 R_1. \quad (68)$$

Поскольку параметры α и β пропорциональны ρ , то можно утверждать, что полученные здесь в упрощающих предположениях (см. введение) результаты укладываются в следующую известную (см. [6]) точную для критических систем теорему.

Теорема: «Если в любой критической системе равномерно понизить (увеличить) плотность всех компонент, то, чтобы сделать систему снова критической, все линейные размеры должны быть увеличены (уменьшены) на ту же величину». Таким образом, если δ есть величина, на которую умножается плотность, все макроскопические сечения взаимодействия умножаются на δ , линейные размеры делятся на δ , а масса делится на δ^2 .

Надо иметь в виду, что эта теорема не охватывает собой все подобные критические системы.

Покажем это, отделив в формуле (48) зависимость $\rho(\bar{r})$ от тех частей функций $\alpha(\bar{r})$ и $\beta(\bar{r})$, за которые отвечают их ядерно-физические части через зависимости концентраций i -х ядер от координат $\mu_i = \mu_i(\bar{r})$

$$\alpha(\bar{r}) = \rho(\bar{r}) m_\alpha(\bar{r}); \quad \beta(\bar{r}) = \rho(\bar{r}) m_\beta(\bar{r}). \quad (69)$$

Здесь

$$m_\alpha(\bar{r}) = \frac{N_a}{\sum_i \mu_i(\bar{r}) A_i} \sum_i \mu_i(\bar{r}) \sigma_{tot i}; \quad (70)$$

$$m_\beta(\bar{r}) = \frac{N_a}{\sum_i \mu_i(\bar{r}) A_i} \sum_i \mu_i(\bar{r}) (\sigma_{s i} + \nu_i \sigma_{f i}). \quad (71)$$

Ясно, что существует возможность (даже без изменения функции $\rho(\bar{r})$) перехода от исходной системы «1» к подобной критической системе «2» только за счет, хотя бы частичного изменения ядер с концентрациями $\mu_{i1}(\bar{r})$, $i1 = 1, 2, \dots, k_1$ на другие ядра с концентрациями $\mu_{i2}(\bar{r})$, $i2 = 1, 2, \dots, k_2$.

Такой переход «1» \rightarrow «2» возможен и в случае $\rho_2(\bar{r}) \neq \rho_1(\bar{r})$.

Для указанных классов подобных критических систем при нахождении средних параметров Пайерлса в формулах (67) и (68) необходимо учитывать возможные изменения в изотопном составе веществ.

Аналогичная ситуация имеет место и при решении

более общей и сложной задачи о СФ и СЗ подобных систем с $\lambda \neq 0$ в подразделе 2.2.2.

Точная теорема, о которой говорилось выше, в работе [6] приведена без доказательства. В заключение этого параграфа докажем ее, исходя из точного кинетического уравнения

$$\frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{V})}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}) + \eta_{tot}(t, \vec{r}, \vec{V}) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}) = \int d\vec{V}' \tilde{A}(t, \vec{r}, \vec{V}', \vec{V}) \psi(t, \vec{r}, \vec{V}'). \quad (72)$$

Здесь $\psi(t, \vec{r}, \vec{V}) d\vec{r} d\vec{V}$ – число нейтронов в элементарном объеме $d\vec{r}$ возле точки наблюдения \vec{r} в скоростном элементе $d\vec{V}$ вблизи скорости \vec{V} в момент t .

Каждый нейтрон подвержен вероятностным взаимодействиям с ядрами вещества, причем для нейтрона, прошедшего точку \vec{r} в момент t со скоростью \vec{V} , величина $\tilde{A}(t, \vec{r}, \vec{V}, \vec{V}') d\vec{V}' dt$ выражает вероятность перейти вследствие взаимодействия за время dt в одно из скоростных состояний \vec{V}' элемента $d\vec{V}'$

$$\tilde{A} = \tilde{A}_s + \tilde{A}_{in} + \tilde{A}_c + \tilde{A}_f,$$

где \tilde{A}_s , \tilde{A}_{in} , \tilde{A}_c части \tilde{A} , за которые ответственны упругое и неупругое рассеяния нейтронов и их поглощение соответственно; \tilde{A}_f – делительный источник нейтронов.

$$\eta_{tot}(t, \vec{r}, \vec{V}) dt = (\eta_s + \eta_{in} + \eta_c + \eta_f) dt = dt \int d\vec{V}' \tilde{A}(t, \vec{r}, \vec{V}, \vec{V}')$$

– вероятность акта взаимодействия по полному сечению за время dt .

Специально не выписывая явного вида всех перечисленных функций, мы предполагаем, что они точны (единственным приближением здесь является естественное пренебрежение n - n взаимодействиями). Отметим, что очень детальный вид интеграла упругих столкновений $\tilde{A}_s(t, \vec{r}, \vec{V}, \vec{V}')$ приведен в работе [7] и надо иметь в виду, что в общем случае $\tilde{A}_s(t, \vec{r}, \vec{V}, \vec{V}') \neq \tilde{A}_s(t, \vec{r}, \vec{V}', \vec{V})$.

В случае критических систем $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$, зависимость всех функций от времени исчезает и уравнение (72) превращается в стационарное. Принципиальным моментом здесь является тот факт, что каждая из функций пропорциональна плотности вещества, т. е. $\eta_{tot} \sim \rho$ и $\tilde{A} \sim \rho$, как и в случае приближенного стационарного при $\lambda = 0$ уравнения (10). В нем $\alpha \sim \rho$ и $\beta \sim \rho$, что

в итоге выше и привело к доказательству теоремы. Таким образом, можно считать, что теорема доказана также из точного кинетического уравнения для нейтронов*.

Выше показано, что теорема из работы [6] отражает собой частный случай $\lambda = 0$ того частного случая, когда переход «1» → «2» не сопряжен с изменением изотопного состава веществ. Теорема из работы [6] относится лишь к системам, в которых $m_{\alpha 2} = m_{\alpha 1}$, $m_{\beta 2} = m_{\beta 1}$. Формулы подраздела 2.2.2, не требующие выполнения последних равенств и условия $\lambda = 0$, доказать на основе точного кинетического уравнения (72) не удалось. Поэтому в данной работе и приняты упрощающие предположения. С их помощью были получены пусть и приближенные в отмеченном смысле, но в то же время достаточно общие и поэтому интересные результаты.

3. Результаты модельных численных расчетов и вычислений

Изложение материалов нашей статьи построено по принципу "от простого к сложному" и для теоретического тестирования промежуточных результатов используются разные способы доказательства. Поэтому численной проверке достаточно подвергнуть только самые общие формулы подраздела 2.2.2, из которых все предыдущие соотношения получаются автоматически.

Для примера в качестве исходного объекта «1» рассмотрим двухобластную сферически-симметричную систему из гипотетического активного вещества. Пусть исходная система «1» с внешним радиусом R_1 характеризуется пространственными зависимостями параметров табл. 1.

Таблица 1

Зависимость параметров Пайерлса и активности от радиуса в исходной системе «1» ($\bar{\alpha}_1 = 0,9$ 1/см, $\bar{\beta}_1 = 1,2$ 1/см)

Диапазон изменения r	Область 1 $0 \leq r \leq r_{11} = 2,125$ см	Область 2 $r_{11} < r \leq R = 2,8186$ см
$\alpha_1(r)$, 1/см	$\alpha_{11} = 1,0188$	$\alpha_{12} = 0,8109$
$\beta_1(r)$, 1/см	$\beta_{11} = 1,4$	$\beta_{12} = 1,05$
$h_1(r)$	$h_{11} = 1,374$	$h_{12} = 1,295$

Далее применим формулы подобия подраздела 2.2. Для системы «1» построим (см. табл. 2) безразмерные функции $A_1(\xi_1) = \frac{\alpha_1(\xi_1)}{\bar{\alpha}_1}$ и $B_1(\xi_1) = \frac{\beta_1(\xi_1)}{\bar{\beta}_1}$, $\xi_1 = \frac{r}{R_1}$.

* Очевидно, формулы подобия раздела 1 тоже легко получаются из точного кинетического уравнения (72).

Таблица 2

Пространственные зависимости безразмерных функций $A_1(\xi_1)$ и $B_1(\xi_1)$
для исходной системы «1»

Диапазон изменения $\xi_1 = \frac{r}{R_1}$	Область 1 $0 \leq \xi_1 \leq \xi_{11} = 0,7539$	Область 2 $\xi_{11} < \xi_1 \leq 1$
$A_1(\xi_1)$	$A_{11} = 1,132$	$A_{12} = 0,901$
$B_1(\xi_1)$	$B_{11} = 1,1667$	$B_{12} = 0,875$

Таблица 3

Характеристики некоторых подобных сферических систем с внешним радиусом R_i ($r_{i1} = 0,7539 R_i$).

i	h_{i1}	h_{i2}	$\alpha_{i1}, 1/\text{см}$	$\alpha_{i2}, 1/\text{см}$	$\bar{\alpha}_i, 1/\text{см}$	$\bar{\beta}_i, 1/\text{см}$	$r_{i1}, \text{см}$	$r_{i2} = R_i, \text{см}$	Λ_i
2	1,9476	2,0553	1,1981	0,8515	1,00	2,000	1,275	1,691	0,696
3	1,6840	1,6840	1,0726	0,8045	0,92	1,55	1,647	2,185	0,428
4	1,1128	1,0000	0,9939	0,8296	0,90	0,948	2,689	3,567	-0,106
5	1,0615	0,9452	0,9891	0,8332	0,90	0,900	2,833	3,758	-0,152
6	1,0000	0,8809	0,9835	0,8374	0,90	0,843	3,025	4,012	-0,205

С помощью численного решения квазистационарного кинетического уравнения на СЗ ($\Lambda_1 = \frac{\lambda_1}{\bar{\alpha}_1 V}$) и СФ ($n_1 \left(\xi_1 = \frac{r}{R_1} \right)$) для исходной системы получено

$$\Lambda_1 = 0,131; \quad (73)$$

$$\frac{n_1(\xi_1 = 1)}{n_1(\xi_1 = 0)} = 0,113; \quad \frac{n_1 \left(\xi_1 = \frac{r_{11}}{R_1} = 0,7539 \right)}{n_1(\xi_1 = 0)} = 0,352. \quad (74)$$

В табл. 3 представлены вычисленные по формулам подобия характеристики взятого для примера ряда i -х систем, подобных исходной.

Величины безразмерных СЗ $\Lambda_i = \frac{\lambda_i}{\bar{\alpha}_i V}$ табл. 2 получены по формуле подобия (57) и подтверждены соответствующими численными решениями кинетического уравнения. Для всех i соблюдаются равенства $\frac{n_i(1)}{n_i(0)} = \frac{n_1(1)}{n_1(0)}$; $\frac{n_i(0,7539)}{n_i(0)} = \frac{n_1(0,7539)}{n_1(0)}$. Это тоже подтверждено численными расчетами и соответствует результатам подраздела 2.2.2.

Подчеркнем, что численное тестирование формул подраздела 2.2.2 выше проведено для наиболее общего случая. Действительно, были рассмотрены системы из разных веществ (объекты, в состав которых входили активные, инертные и нейтронопоглощающие материалы), имеющие при этом разные профили плотности $\rho(r)$ и активности $h(r)$ и характеризующиеся отличными от нуля как положительными, так и отрицатель-

ными значениями λ .

Авторы благодарны В. Ф. Колесову и Б. А. Надык-то за их критические замечания, которые были очень полезны и привели к некоторым уточнениям при окончательном редактировании этой статьи.

Список литературы

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.
2. Ахиезер А., Померанчук И. Некоторые вопросы теории ядра. Л.: Оборонгиз, 1950.
3. Марчук Г.И. Численные методы расчета ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1958.
4. Robert Serber The Los Alamos Primer, The First Lecture on How To Build Atomic Bomb. Edited with an introduction by Richard Rhodes. ISBN: 0520075765. University of California Press, 1992.
5. Peierls R. Critical conditions in neutron multiplication // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1939. Vol. 35. Part 4. P. 610–615.
6. Судэк Г. Материалы комиссии по использованию атомной энергии США: ядерные реакторы (том 1, физика атомных реакторов), глава 4 (Статистика реактора; теория и общие результаты. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
7. Климов В. Н. Кинетическое уравнение для примесей // Теория вероятностей и ее применения. Том 2. Вып. 2. М.: 1957.

Статья поступила в редакцию 23.01.2008.