

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С НАКЛОННОЙ КОНТАКТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. Н. Разин

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получено решение задачи о взаимодействии плоской ударной волны с наклонной контактной границей, разделяющей два разноплотных газа. Рассмотрено прохождение ударной волны через контактную границу как со стороны легкого, так и со стороны тяжелого газов. Для двумерных газодинамических методик предлагаются задачи для отработки методических вопросов взаимодействия ударной волны, движущейся по скошенной сетке, с контактной границей.

Введение

Для моделирования турбулентного перемешивания (ТП) в двумерных течениях с использованием модели В. В. Никифорова в ИТМФ РФЯЦ-ВНИИЭФ создано несколько пакетов программ [1]. В то же время информативных экспериментальных данных для отработки методик расчета ТП, развивающегося из неустойчивости Рихтмайера – Мешкова, в двумерных течениях многослойных систем не столь много, а имеющиеся не в полной мере соответствуют задачам тестирования. Так, в работах [2–4] представлены результаты экспериментов и расчеты по исследованию развития возмущений и ТП на границе двухслойной системы, ускоряемой стационарной ударной волной (УВ). В работе [5] приведены экспериментальные данные по изучению развития 2D возмущений контактной границы (КГ) в двухслойной газовой системе при числах Маха падающей УВ от 2 до 9. В этих экспериментах КГ имела либо форму прямой ступеньки, либо была возмущена в виде треугольной канавки. В работах [6, 7] приведены результаты исследования развития неустойчивости Рихтмайера – Мешкова и ТП в трехслойной газовой системе, в которой одна КГ располагалась параллельно фронту УВ, вторая КГ – либо под углом к фронту УВ, либо имела вид наклонной ступеньки.

При использовании экспериментальных данных для тестирования методик расчета ТП следует отделять опыты, в которых наблюдается лишь начальный этап развития ТП в окрестности КГ, от опытов с развитой турбулентностью. Так, например, в опытах, в которых форма КГ задается в виде прямой ступеньки, после взаимодействия УВ со ступенькой формируется большой вихрь, а на границах вихря наблюдается лишь начальная стадия развития ТП (ТП возникает из неустойчивости Кельвина – Гельмгольца). Подобная экспериментальная информация не в полной мере пригодна для отработки двумерных численных методик расчета раз-

витых турбулентных течений в слойках. С этой точки зрения экспериментальная информация [6, 7] является наиболее подходящей как для отработки алгоритмов отслеживания КГ в эйлеровых методиках с концентрациями (для этого, например, подходят данные опыта серии III в работе [6], рис. 4), так и для тестирования развития ширины зоны ТП во времени в двумерных течениях [7]. Приведенные в [6, 7] данные к тому же позволяют:

- обобщить разработанный для одномерных методик метод инициализации ТП на двумерный случай. Для решения этой задачи наилучшим образом подходит экспериментальная информация по преломлению УВ на наклонной КГ;
- обобщить алгоритм отслеживания положения фронта УВ, разработанного для одномерных методик, на двумерный случай. Важность данной задачи объясняется тем фактом, что при численном описании взаимодействия турбулентного поля с УВ в модифицированной В. И. Козловым [8, 9] модели ТП В. В. Никифорова [10] интегрируется уравнение для скорости диссипации, отличное от уравнения вне фронта;
- протестировать рост ширины зон ТП, развивающихся в двумерных течениях на двух КГ в трехслойных газовых системах. Использование трехслойных газовых систем в опытах дает дополнительную информацию о ТП по сравнению с двухслойными системами. Действительно, в трехслойных газовых системах на эволюцию зон ТП оказывают влияние волны (ударные или разрежения), циркулирующие в центральном газовом слое.

В предлагаемой работе представлены результаты теоретического анализа экспериментов [6, 7], в которых неустойчивость Рихтмайера – Мешкова развивается при прохождении УВ через границы газовых слоев: Air – He – SF₆, Air – SF₆ – Air и Air – SF₆ – He. В разделе 1 кратко излагается постановка экспериментов [6, 7] по исследованию роста ширины зоны ТП в трехслой-

ных газовых системах (опыты выполнены в ИФВ группой Н. В. Невмержицкого, постановку опытов предложил А. Н. Разин).

В разделе 2 дано теоретическое описание (без учета ТП) взаимодействия УВ с контактными границами в экспериментах и получено аналитическое решение в окрестности узловой точки при регулярном взаимодействии УВ с наклонной газовой КГ. Приведенная в разделе информация может быть использована как для понимания физики процесса, так и для отработки методических вопросов в двумерных газодинамических методиках.

В разделе 3 предлагаются две методические задачи о взаимодействии УВ с прямой и наклонной КГ (упрощенный вариант экспериментальных задач). Данные задачи можно использовать при сопоставлении результатов численного моделирования движения УВ по скошенной сетке, полученных по различным газодинамическим методикам, и "склонности" численных методов к формированию "счетной" турбулентности на КГ.

1. Постановка экспериментов

Подробная постановка экспериментов, анализ которых рассмотрен в предлагаемой работе, приводится в работе [7], краткое описание дается ниже. Эксперименты выполнялись на ударной трубе, состоящей из камер высокого и низкого давления диаметром 200 мм. Камеры высокого и низкого давления разделяются мембраной, изготовленной из целлофана. Камера высокого давления заполнялась сжатым воздухом до избыточного давления, чтобы сформировать в трубе стационарную ударную волну с числом Маха $M \approx 1,3$. Мембрана разрушалась при помощи электровзрыва наклеенной на нее нихромовой проволоочки.

В камеру низкого давления встраивался канал с составной измерительной секцией. Внутреннее сечение канала и секции – прямоугольник 120×40 мм. Секции изготовлены из оптически прозрачного оргстекла. Между стыками отсеков секций устанавливалась разделительная полимерная пленка толщиной $\tau \approx 1$ мкм. Выходной торец последней секции закрыт жесткой стенкой из оргстекла. Геометрия измерительных секций, на которых проводились эксперименты, представлена на рис. 1.

В экспериментах исследовалось развитие неустойчивости Рихтмайера – Мешкова и ТП в трехслойной газовой системе, в которой одна КГ располагалась параллельно фронту УВ, вторая КГ – под углом к фронту. Такая геометрия опытов обеспечивала развитие ТП в двумерном течении. Объем измерительной секции между полимерными пленками (или полимерной пленкой и жесткой стенкой) заполнялся либо гелием (скорость звука $c_0 \approx 965$ м/с), либо шестифтористой серой ($c_0 \approx 129,5$ м/с) при атмосферном давлении. В камере низкого давления и в канале находился воздух при атмосферных условиях.

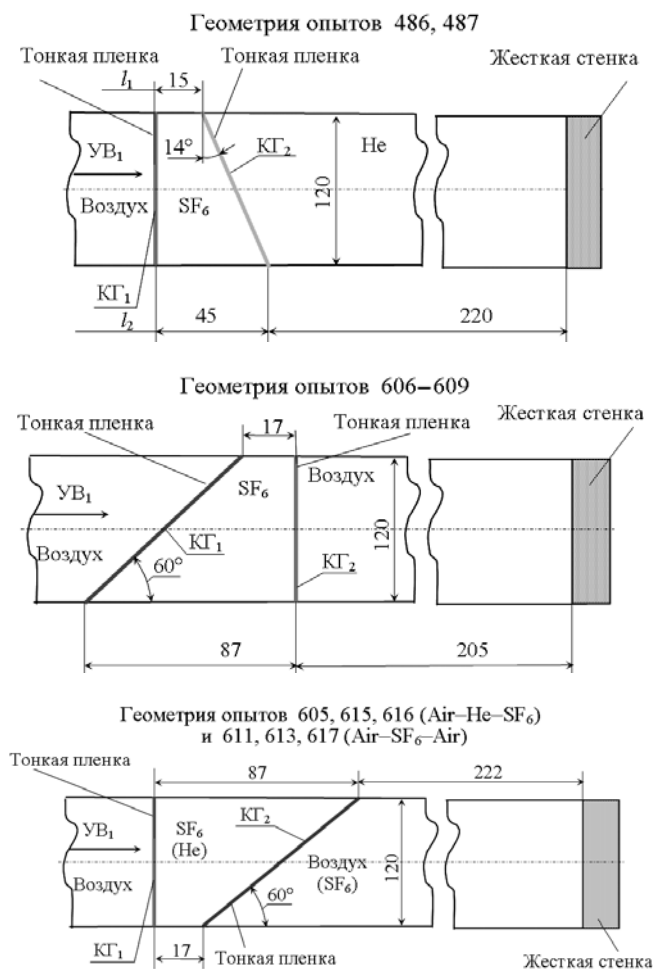


Рис. 1. Схема постановки экспериментов (размеры в мм)

При выходе ударной волны на КГ разделительная пленка разрушается на фрагменты различных размеров, создавая спектр начальных возмущений, границы раздела газов ускоряются, в результате чего на них возникает неустойчивость Рихтмайера – Мешкова, приводящая к развитию ТП. Таким образом, в рассматриваемых системах ТП развивается на двух КГ под действием падающих ударных волн и волн, циркулирующих в центральном слое.

2. Взаимодействие ударной волны с контактной границей

Взаимодействие УВ с наклонной газовой поверхностью изучалось в ряде работ (см., например, [3, 11–13]). Однако в работе [3] никакого обоснования опытных данных и выявления методических вопросов в численных расчетах представлено не было. В работах [11–13] представлены результаты сравнения данных теории, численного моделирования и экспериментов для случаев slow–fast (медленный – быстрый) и fast–slow (быстрый – медленный) взаимодействия УВ с КГ. Анализ течения выполнен для следующих пар контактирующих газов Air–CH₄, Air–CO₂, CO₂–CH₄. В рабо-

тах [11–13] преломление УВ на наклонной поверхности определяется как slow–fast (fast–slow) взаимодействие, если скорость прошедшего скачка больше (меньше) скорости падающей УВ. В работе [12] система уравнений для описания течения в случае fast–slow взаимодействия УВ с КГ сведена к одному уравнению двенадцатой степени для давления (в работе вывод уравнения не приводится, а само уравнение содержит ошибки).

Представленная в работах [11–13] теория используется ниже для определения типа взаимодействия УВ с наклонной КГ в проведенных опытах. Необходимо отметить, что проведенный анализ конфигурации течения справедлив для идеализированного течения (без учета ТП на КГ). Поэтому предлагается численное моделирование экспериментов [7] выполнять в два этапа. На первом этапе расчеты экспериментов провести без учета ТП на КГ, на втором – с учетом ТП. Такой подход позволит на первом этапе оценить результаты численного моделирования движения УВ по скошенной сетке и "склонности" численной методики к формированию "счетной" турбулентности на скошенной сетке за фронтом УВ и на контактной границе.

2.1. Slow–fast взаимодействие

Проведем анализ течения для slow–fast взаимодействия УВ с КГ, наблюдаемого в экспериментах 486, 487 (Air–SF₆–He) и 611, 613, 617 (Air–SF₆–Air). Известными параметрами задачи являются: число Маха УВ в воздухе ($M = 1,3$), угол наклона второй КГ ($\alpha = 30^\circ$ в экспериментах Air–SF₆–Air, $\alpha = 14^\circ$ в экспериментах Air–SF₆–He), значения термодинамических параметров рабочих газов слева и справа от КГ. Предполагается, что в начальном состоянии газы покоятся при атмосферном давлении P_0 .

В зависимости от значений исходных параметров задачи в результате взаимодействия УВ с наклонной КГ могут возникать две конфигурации поля течения: регулярная (взаимодействие, при котором все волны пересекаются в одной точке – в узле О на рис. 2) и нерегулярная. Чтобы определить, какая конфигурация реализуется в том или ином случае, необходимо решить систему уравнений, которая для slow–fast взаимодействия приводится ниже.

На рис. 2 используются обозначения: P , ρ , M , γ – давление, плотность, число Маха падающей на КГ ударной волны и показатель адиабаты соответственно. В процессе взаимодействия УВ с наклонной КГ область течения содержит две УВ (падающую и прошедшую), поверхность контактного разрыва (невозмущенную и возмущенную части) и центрированную волну разрежения. Величины с индексом 0 соответствуют тяжелому газу (SF₆), по которому движется падающая УВ, прошедшая УВ движется по легкому газу (Air или He), центрированная волна разрежения формируется в тяжелом газе. При получении системы уравнений, описывающей рассматриваемое течение, будем использовать связь между величинами до и после УВ (определя-

ется условиями Гюгонио), кроме того, будем учитывать, что на

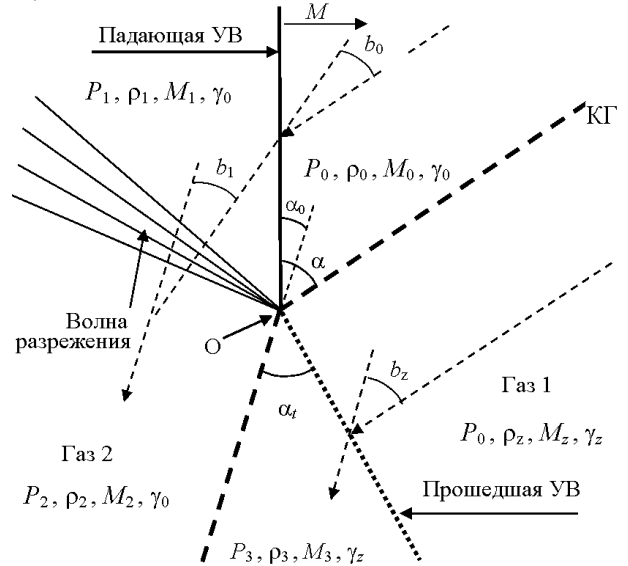


Рис. 2. Схема регулярного взаимодействия УВ с КГ (slow–fast конфигурация)

фронте КГ непрерывны давление и нормальная компонента скорости, а в центрированной волне разрежения реализуется течение Прандтля – Майера. Выпишем соответствующие уравнения.

Отношения давлений до и после падающего скачка связаны с числом Маха падающей УВ соотношением

$$Z_1 = \frac{P_1}{P_0} = 1 + \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 + 1} (M^2 - 1). \quad (1)$$

Число Маха позади падающего скачка (M_1) определяется уравнениями Гюгонио

$$Z_1 \frac{Z_1(\gamma_0 - 1) + (\gamma_0 + 1)}{Z_1(\gamma_0 + 1) + (\gamma_0 - 1)} = \frac{1 + \frac{\gamma_0 - 1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\gamma_0 - 1}{2} M_1^2}. \quad (2)$$

Число Маха движения скачка (M_0) вдоль контактной границы

$$M_0 = \frac{M}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

Угол, на который поворачивается поток с увеличением числа Маха от $M = M_1$ до $M = M_2$ в центрированной волне разрежения, находится как разность фиктивных углов поворота, соответствующих числам M_1 и M_2

$$b_1 = \theta(M_2) - \theta(M_1), \quad (4)$$

где

$$\theta(M) = \lambda \arctg \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\lambda} - \arctg \sqrt{M^2 - 1}; \quad \lambda = \sqrt{\frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1}}.$$

Соотношение между давлениями на крайних характеристиках, ограничивающих центрированную волну разрежения, определяется числами Маха на этих характеристиках

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma_0-1}{\gamma_0}} = \frac{1 + \frac{\gamma_0-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma_0-1}{2}M_2^2}. \quad (5)$$

Число Маха позади прошедшего скачка (M_3) дается формулой

$$\frac{1 + \frac{\gamma_z-1}{2}M_z^2}{1 + \frac{\gamma_z-1}{2}M_3^2} = Z_2 \frac{Z_2(\gamma_z-1) + (\gamma_z+1)}{Z_2(\gamma_z+1) + (\gamma_z-1)}, \quad Z_2 = \frac{P_2}{P_0}. \quad (6)$$

Так как скорости узловой точки О в двух средах одинаковы, это дает связь между числами Маха M и M_z

$$M_z = \frac{M}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{\gamma_0 \rho_z}{\gamma_z \rho_0}}. \quad (7)$$

Добавим к выписанным уравнениям условие непрерывности давления на КГ

$$P_3 = P_2 \quad (8)$$

и условие параллельности линий тока в сжатых падающей и прошедшей УВ газах

$$b_0 + b_1 = b_z. \quad (9)$$

Следуя работе [11], запишем дополнительно уравнения ударных поляр для падающей и прошедшей УВ

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(b_0) &= \frac{Z_1-1}{1+\gamma_0 M_0^2 - Z_1} \times, \\ &\times \left[\frac{2\gamma_0 M_0^2 - \gamma_0 + 1 - Z_1(\gamma_0 + 1)}{\gamma_0 - 1 + Z_1(\gamma_0 + 1)} \right]^{0,5}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(b_z) &= \frac{Z_2-1}{1+\gamma_z M_z^2 - Z_2} \times \\ &\times \left[\frac{2\gamma_z M_z^2 - \gamma_z + 1 - Z_2(\gamma_0 + 1)}{\gamma_z - 1 + Z_2(\gamma_0 + 1)} \right]^{0,5}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для отношения давлений до и после прошедшего скачка имеем

$$Z_2 = \frac{P_2}{P_1} Z_1. \quad (12)$$

Таким образом, для определения течения в рассматриваемой конфигурации выписана система из 12 уравнений относительно 12 неизвестных: $Z_1, Z_2, P_2/P_1, M_0, M_1, M_2, M_z, M_3, b_0, b_1, b_z, P_3$. В результате решения системы найдем все неизвестные, определяющие регулярное взаимодействие УВ с наклонной КГ. Регулярное взаимодействие УВ с КГ имеет место только для значений угла $\alpha < \alpha_k$ (α_k – критический угол падения УВ на КГ). Для вычисления значения критического угла воспользуемся фундаментальным законом движения волн вдоль возмущенной КГ [12]

$$|U| = \frac{|U_0|}{\sin \alpha_0} = \frac{|U_3|}{\sin \alpha_t}.$$

Здесь U_0, U_3 – скорости соответствующих волн. Значение критического угла определим из соотношения

$$\cos \alpha_t = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_t} = \sqrt{1 - n^{-2} \sin^2 \alpha_0},$$

где $n = \frac{U_0}{U_3}$.

Подкоренное выражение становится чисто мнимым, когда $1 - n^{-2} \sin^2 \alpha_0 < 0$. Это означает, что вместо регулярного взаимодействия УВ с наклонной КГ реализуется нерегулярное, а критический угол определяется из соотношения

$$\sin \alpha_k = n = \frac{|U_0|}{|U_3|}.$$

Анализ взаимодействия УВ с наклонной КГ сначала выполним для экспериментов 486, 487 и 611, 613, 617. Параметры начального состояния рабочих газов приведены в табл. 1, число Маха УВ в воздухе $M = 1,3$.

Таблица 1

Начальные параметры газов

Параметр	Air	SF ₆	He
ρ_0 , г/л	1,2	6,5	0,166
P_0	10,13	10,13	10,13
γ	1,4	1,094	1,63

Для анализа взаимодействия УВ с наклонной КГ необходимо предварительно определить параметры УВ, движущейся в SF₆. С этой целью решим задачу о распаде произвольного разрыва на КГ₁ (Air–SF₆). Параметры течения за фронтом УВ в воздухе вычисляются по соотношениям

$$\frac{P_1}{P_0} = M^2(1+h) - h; \quad h = \frac{\gamma-1}{\gamma+1};$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{M^2}{1+h(M^2-1)}; \quad u_1 = (1-h)c_0 \frac{M^2-1}{M}.$$

Схематическая картина течения, возникающего в результате распада произвольного разрыва на границе Air–SF₆, показана на рис. 3. Там же приведены скорости КГ и ударных волн в SF₆ и Air. Используемая система единиц: см, мг, 100 мкс.

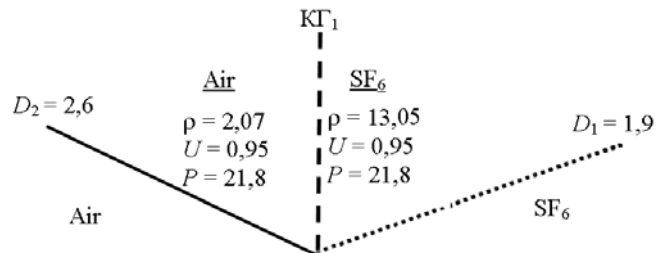


Рис. 3. Распад разрыва на КГ₁

Согласно данным рис. 3, число Маха УВ в SF₆ составляет $M = D_1/c_0 \approx 1,455$ (c_0 – скорость звука перед фронтом УВ).

На рис. 4 для пар контактирующих газов SF₆–He и SF₆–Air (наборы газов соответствуют экспериментальным) приведена зависимость α_k от числа Маха падающей на наклонную КГ ударной волны. Данные, приведенные на рис. 4, получены в результате решения системы уравнений (1)–(12).

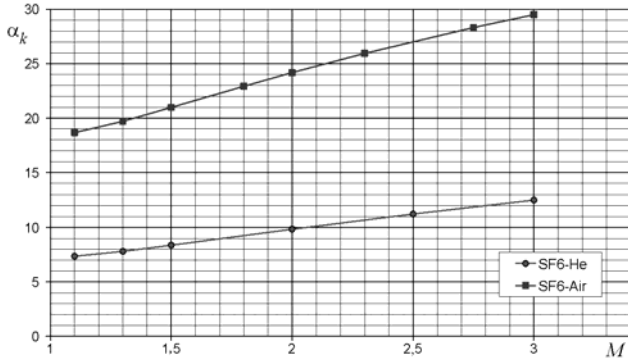


Рис. 4. Зависимость критического угла α_k от числа Маха, slow–fast конфигурация

В экспериментах 486, 487 угол наклона КГ $\alpha = 14^\circ$, в экспериментах 611, 613, 617 $\alpha = 30^\circ$. Из рис. 4 следует, что при $M = 1,455$ экспериментальное значение угла α превышает критический угол, при котором реализуется регулярное взаимодействие УВ с наклонной КГ. Таким образом, в экспериментах 486, 487 и 611, 613, 617 взаимодействие УВ с КГ происходит нерегулярным образом и выписать точное решение для этих экспериментов не представляется возможным.

2.2. Fast–slow взаимодействие

В экспериментах 605, 615, 616 и 606–609 преломление УВ на наклонной КГ определяется как fast–slow взаимодействие. Анализ fast–slow взаимодействия проводится аналогично вышеизложенному, за исключением того, что в системе определяющих уравнений заменяются соотношения в центрированной волне разрежения на условия Гюгонио и добавляется уравнение ударной поляры для отраженной УВ. Картина течения и обозначения приведены на рис. 5.

В результате взаимодействия УВ с наклонной КГ область течения содержит три УВ (падающая, отраженная и прошедшая), поверхность контактного разрыва (невозмущенную и возмущенную части). Как и в предыдущем разделе при получении системы уравнений, описывающей рассматриваемое течение, будем использовать связь между величинами до и после УВ (определяется условиями Гюгонио), кроме того, будем учитывать, что слева и справа от КГ непрерывны давление и нормальная компонента скорости. Перечислим соответствующие уравнения. Отношения давлений до и

после падающего скачка связаны с числом Маха падающей УВ соотношением (1). Число Маха M_1 позади падающего скачка определяется уравнением (2). За отраженным скачком число Маха M_2 связано с M_1 уравнением

$$Y \frac{Y(\gamma_0 - 1) + (\gamma_0 + 1)}{Y(\gamma_0 + 1) + (\gamma_0 - 1)} = \frac{1 + \frac{\gamma_0 - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma_0 - 1}{2} M_2^2}; \quad Y = \frac{Z_2}{Z_1}; \quad (13)$$

$$Z_2 = \frac{P_2}{P_0}.$$

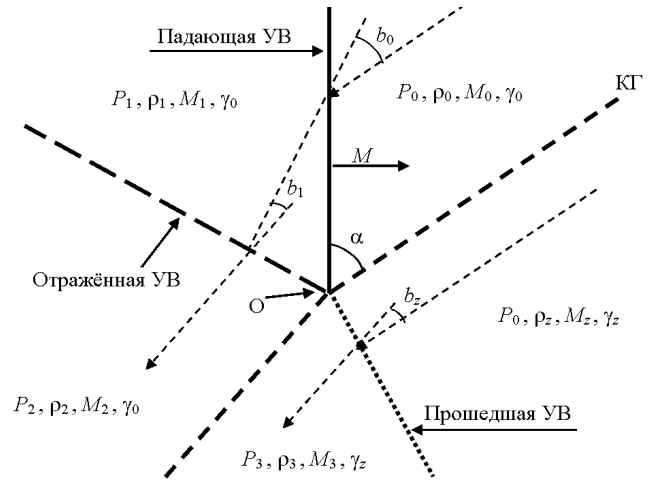


Рис. 5. Схема регулярного взаимодействия УВ с КГ, fast–slow конфигурация

Числа Маха движения падающего и прошедшего скачков вдоль КГ определяются уравнениями (3), (7). Число Маха M_3 позади прошедшего скачка дается формулой (6). К перечисленным уравнениям присоединяем условие непрерывности давления на КГ (8) и условие параллельности линий тока в сжатых падающей, прошедшей и отраженной УВ газах $b_0 - b_1 = b_z$. Последнее соотношение запишем в удобном для вычислений виде

$$\operatorname{tg}(b_z) = \frac{\operatorname{tg}(b_0) - \operatorname{tg}(b_1)}{1 + \operatorname{tg}(b_0)\operatorname{tg}(b_1)}. \quad (14)$$

Для замыкания системы используем дополнительно уравнения (10), (11) ударных поляр для падающей и прошедшей УВ. К ним добавим уравнение ударной поляры для отраженного скачка

$$\operatorname{tg}(b_1) = \frac{Y - 1}{1 + \gamma_0 M_1^2 - Y} \times \left[\frac{2\gamma_0 M_1^2 - \gamma_0 + 1 - Y(\gamma_0 + 1)}{\gamma_0 - 1 + Y(\gamma_0 + 1)} \right]^{0,5}. \quad (15)$$

Наконец, для отношения давлений до и после прошедшего скачка воспользуемся соотношением (12). Таким образом, для определения течения в рассматриваемой

конфигурации имеем систему из 12 уравнений относительно 12 неизвестных: $Z_1, Z_2, P_2/P_1, M_0, M_1, M_2, M_z, M_3, b_0, b_1, b_z, P_3$.

Подставляя выражения (10), (11), (15) в (14), получим уравнение двенадцатой степени относительно Z_2

$$f(z_2) = 2H_1^2 H_2^4 H_3 H_4 H_5^2 H_8^2 H_9 + 2H_1^2 H_3 H_4 H_6^4 H_7^2 H_8^2 H_9 - H_1^4 H_2^4 H_3^2 H_5^2 - \\ - H_2^4 H_4^2 H_5^2 H_8^4 H_9^2 - H_1^4 H_3^2 H_6^4 H_7^2 H_9^2 - H_2^4 H_6^4 H_7^2 H_8^4 + \\ + 2H_1^4 H_2^2 H_3^2 H_5 H_6^2 H_7 H_9 + 2H_1^2 H_2^2 H_3 H_4 H_5 H_6^2 H_7 H_8^2 (1 + 4H_9 + H_9^2) + \\ + 2H_2^2 H_4^2 H_5 H_6^2 H_7 H_8^4 H_9 = 0.$$

В этом уравнении используются обозначения

$$H_1 = a_1 z_1 - z_2, \quad H_2 = z_2 - 1, \quad H_3 = c_1 z_1 + z_2, \quad H_4 = d_1 z_1 - z_2, \\ H_5 = d_2 - z_2, \quad H_6 = a_2 - z_2, \quad H_7 = c_2 + z_2, \quad H_8 = z_2 - z_1, \\ H_9 = \text{tg}^2(b_0), \quad a_1 = 1 + \gamma_0 M_1^2, \quad a_2 = 1 + \gamma_z M_z^2, \quad d_1 = \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 + 1} M_1^2 - c_1, \\ c_1 = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1}, \quad c_2 = \frac{\gamma_z - 1}{\gamma_z + 1}, \quad d_2 = \frac{2\gamma_z}{\gamma_z + 1} M_z^2 - c_2.$$

Из действительных корней выписанного уравнения выбирается минимальный положительный ($z_2 > 0$). Остальные неизвестные находятся в результате решения других уравнений системы. Регулярное взаимодействие УВ с КГ имеет место только для значений угла $\alpha < \alpha_k$ (α_k – критический угол падения УВ на КГ). Зависимость критического угла от числа Маха падающей на наклонную КГ ударной волны приведена на рис. 6.

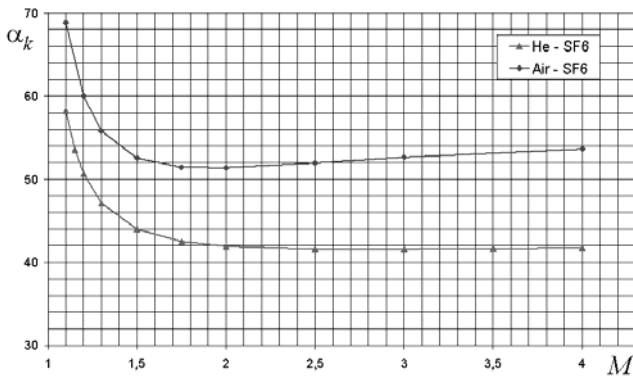


Рис. 6. Зависимость критического угла от числа Маха, fast-slow конфигурация

Чтобы определить тип взаимодействия УВ с наклонной КГ для опытов 605, 615 и 616, решим предварительно задачу о распаде разрыва на контактной границе Air-He. На рис. 7 показана схематическая картина течения после распада разрыва на КГ.

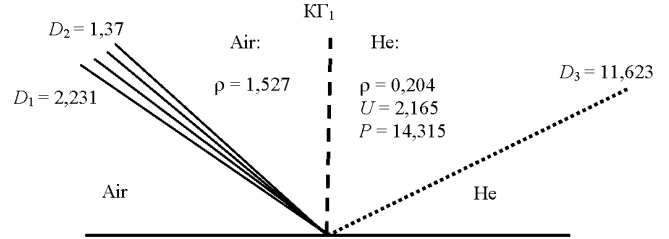


Рис. 7. Распад разрыва на КГ₁ (Air-He)

Согласно решению задачи, о распаде разрыва в He распространяется УВ, скорость которой $D_3 \approx 11,6$ (число Маха УВ $M_1 \approx 1,15$), в Air движется центрированная волна разрежения, крайние характеристики которой имеют скорости $D_2 \approx 1,37, D_1 \approx 2,23$. На рис. 8 приведена зависимость углов отклонения потока b_0 и b_z от числа Маха при $\alpha = \alpha_k$, на рис. 9 зависимость z_1, z_2 от числа Маха

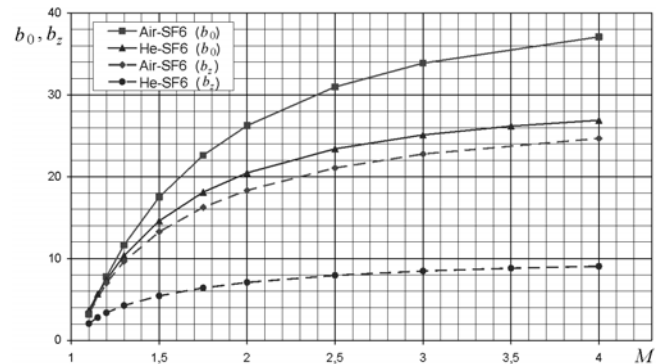


Рис. 8. Зависимость углов отклонения потока от числа Маха при $\alpha = \alpha_k$, fast-slow конфигурация

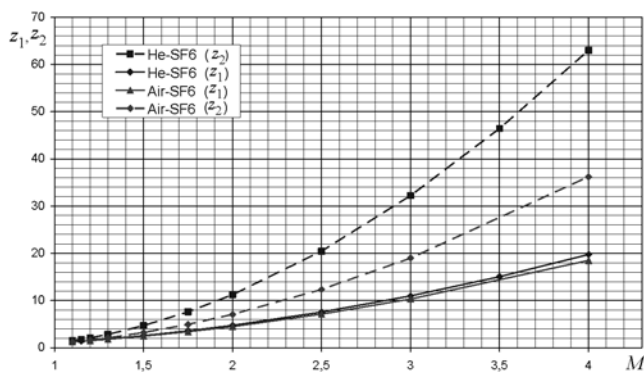


Рис. 9. Зависимость z_1, z_2 от числа Маха при $\alpha = \alpha_k$, fast-slow конфигурация

3. Методические задачи при fast-slow взаимодействии

Проблемам повышения точности численных методов и обоснованию результатов моделирования сложных течений в последние годы уделяется заметное внимание. Так, в неопубликованных работах А. Н. Разина, Ю. А. Бондаренко (и других авторов) исследовалась задача прохождения УВ по неравномерной сетке в одномерных и двумерных течениях. Полученные результаты продемонстрировали, что современные газодинамические методики не позволяют описать течение с желаемой точностью при движении УВ по неравномерной разностной сетке. В свою очередь, некачественное описание методиками газодинамического поля течения может заметно повлиять на качество моделирования ТП, возникающего в слоистых системах на КГ в результате развития неустойчивости Рихтмайера – Мешкова.

В настоящее время существует проблема обработки методических вопросов в двумерных методиках расчета развитой турбулентности из-за отсутствия информативных тестовых задач. С этой точки зрения данные опытов [7] можно считать удачным экспериментальным материалом для обработки двумерных методик, в которых реализована какая-либо модель ТП. В неопубликованной работе А. М. Стенина с соавторами продемонстрировано, что экспериментальные данные [7] можно использовать и для тестирования газодинамических методик. И все же, для обработки газодинамических методик правильнее использовать специализированные задачи. Такие задачи рассмотрены ниже.

Представим, что плоская УВ, движущаяся в воздухе по неравномерной разностной сетке, взаимодействует с расположенной параллельно фронту УВ плоской КГ, разделяющей Air и SF₆ (рис. 10). В отсутствие каких-либо начальных возмущений газодинамических параметров течения в области и на КГ завихренность потока на все моменты времени будет равна нулю, а на КГ не должна развиваться неустойчивость Рихтмайера – Мешкова.

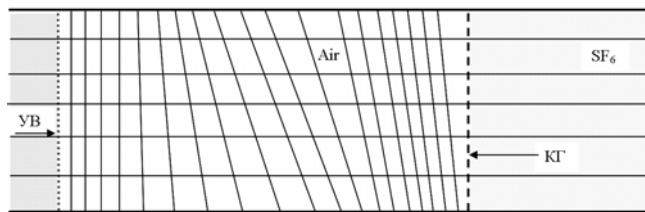


Рис. 10. Геометрия 1-й методической задачи

Примем, что в начальный момент времени газы покоятся (параметры газов даны в табл. 1), уравнение состояния – идеальный газ. На левой границе сформируем УВ с числом Маха $M = 4$ (параметры сжатого воздуха за фронтом УВ: $p = 187,4$, $\rho = 5,486$, $u = 10,743$). В воздухе расставляется скошенная сетка, в SF₆ – прямоугольная (как это бывает в расчетах при прохождении первой УВ через КГ).

При выходе УВ на КГ Air-SF₆ происходит распад произвольного разрыва с образованием двух УВ. Схема возникающего течения и значения газодинамических параметров приведены на рис. 11.

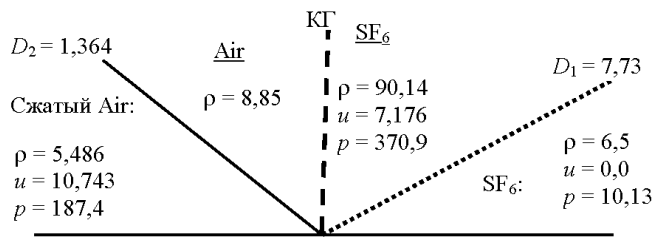


Рис. 11. Распад разрыва на КГ Air-SF₆, $M = 4$

Для оценки качества численного моделирования поставленной задачи предлагается использовать четыре критерия:

- 1) до и после взаимодействия УВ с КГ сравнить положение и форму фронта УВ с точным решением (вычислить максимальную амплитуду возмущений УВ, если фронт УВ не плоский);
- 2) до и после взаимодействия УВ с КГ сравнить значения газодинамических параметров в областях постоянства течения с точными значениями;
- 3) определить суммарную (положительную и отрицательную) завихренность потока и максимальное значение завихренности в точке. Завихренность потока должна быть нулевой;
- 4) вычислить циркуляцию скорости вдоль КГ.

Затем повторить расчет на более подробной сетке и сравнить результаты с данными, полученными на грубой сетке и с точным решением. В задаче можно варьировать число Маха падающей на КГ ударной волны и расстановку сетки.

В рассмотренной задаче течение является одномерным. Двумерное течение формируется в следующей методической задаче, в которой УВ взаимодействует с наклонной КГ. Задачи в подобной постановке для трехслойных газовых систем рассмотрены в предыдущих разделах. В этих задачах течение в окрестности узловой

точки определяется не только характером взаимодействия УВ с наклонной КГ, но и волнами, циркулирующими в центральном слое трехслойной газовой системы. Для методических целей предлагается вместо трехслойной системы использовать двухслойную, что существенно упрощает анализ течения в окрестности узловой точки. В отличие от первой методической задачи при взаимодействии УВ с наклонной КГ завихренность потока на КГ отлична от нуля (даже в отсутствие начальных возмущений в поле течения) и на КГ развивается неустойчивость Рихтмайера – Мешкова. Начальная геометрия задач показана на рис. 12.

Примем, что наклонная КГ разделяет первоначально покоящиеся газы (Air и SF₆), а число Маха падающей на КГ ударной волны $M = 4$. В начальный момент времени в областях 1 (Air) и 2 (SF₆) расставляется скошенная сетка.

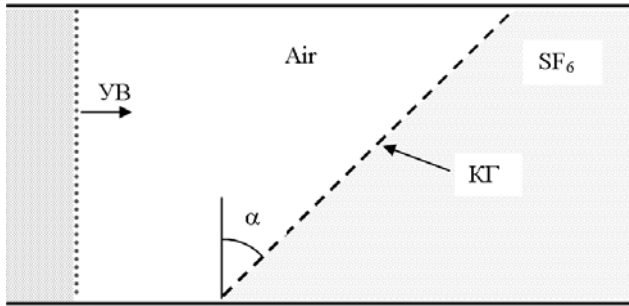


Рис. 12. Геометрия 2-й методической задачи

Вычислим газодинамические параметры потока в окрестности узловой точки и углы отклонения линий тока в результате преломления УВ на наклонной КГ, предполагая, что ТП на КГ отсутствует, а влияние пограничного слоя не распространяется на течение в узловой точке. В результате взаимодействия УВ с КГ формируется течение, схема которого приведена на рис. 5. Для нахождения параметров течения в зонах 1, 2, 3 и определения углов отклонения линий тока потоков решались уравнения раздела 2.2 для четырех углов α наклона КГ. Основные параметры полученного решения сведены в табл. 2. Другие газодинамические величины определяются по данным табл. 2.

Расчет задачи продолжать до момента времени, когда УВ провзаимодействует с КГ и удалится от нее. Для оценки качества численного моделирования поставленной задачи предлагается:

1) на момент времени, когда УВ пройдет примерно половину длины КГ, сравнить углы отклонения линий тока и газодинамические параметры в окрестности узловой точки с точными значениями;

2) определить зависимости суммарной (отдельно положительной и отрицательной) завихренности потока от времени (для сравнения с другими методиками);

3) вычислить циркуляцию скорости на единицу длины вдоль КГ и сравнить ее с точным значением, приведенным ниже (аналитическое выражение для

циркуляции при одинаковых значениях показателя адиабаты в газах дано в [14]);

4) провести расчеты на сходимость на квадратной разностной сетке; решение, полученное на скошенной сетке, сравнить с решением, полученным на квадратной сетке.

Сделаем некоторые пояснения. Во 2-й методической задаче можно условно выделить два этапа развития течения. Первый этап – этап формирования завихренности, когда падающая УВ находится в контакте с КГ. Второй этап – этап эволюции завихренности начинается в момент времени, когда УВ покидает КГ. В середине первого этапа поверхности всех разрывов являются плоскими в окрестности узловой точки, что позволяет сравнить углы отклонения линий тока и газодинамические параметры в окрестности узловой точки с их точными значениями. На первом же этапе на преломленной части КГ формируется вихревой слой вследствие неустойчивости Кельвина – Гельмгольца (тангенциальные скорости слева и справа от преломленной КГ различны). На втором этапе конец вихревого слоя при взаимодействии со стенкой трубы закручивается. Как показано в [15], полная циркуляция на первом этапе линейно возрастает по абсолютной величине, на втором этапе ее поведение определяется взаимодействием отраженной УВ со стенками трубы.

В заключение приведем точное выражение для вычисления циркуляции на единицу длины возмущенной КГ

$$\Gamma = M_3 c_3 - M_2 c_2 = \frac{c_0}{\sin \alpha} [U_3 - U_2],$$

где M_3, M_2 – числа Маха потоков слева и справа от возмущенной КГ, c_3, c_2 – скорости звука слева и справа от возмущенной КГ, c_0 – скорость звука перед фронтом падающей УВ, M – число Маха падающей УВ, α – угол наклона КГ. Дополнительно введены обозначения

$$U_3 = \sqrt{M^2 + \frac{2 \sin^2 \alpha}{\gamma_z - 1} \frac{\gamma_z}{\gamma_0} \frac{\rho_0}{\rho_z} (1 - \xi_3)};$$

$$U_2 = \sqrt{M^2 + \frac{2 \sin^2 \alpha}{\gamma_0 - 1} (1 - \xi_1 \xi_2)};$$

$$\xi_1 = z_1 \frac{z_1 h_0 + 1}{z_1 + h_0}; \quad \xi_2 = Y \frac{Y h_0 + 1}{Y + h_0}; \quad \xi_3 = z_2 \frac{z_2 h_z + 1}{z_2 + h_z};$$

$$h_0 = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1}; \quad h_z = \frac{\gamma_z - 1}{\gamma_z + 1}; \quad Y = \frac{z_2}{z_1}.$$

С использованием данных табл. 1 и 2, получены точные значения циркуляции на контактной границе Air-SF₆ при $M = 4$, которые выписаны в табл. 3.

N	α [°]	b_0 [°]	b_1 [°]	M_1	M_2	M_z	M_3	Z_1	Z_2
1	5	3,9	1,3	22,73	20,5	120,83	74,29	18,5	36,59
2	15	11,65	3,9	7,43	6,65	40,69	24,83	18,5	36,37
3	30	22,8	7,9	3,47	3,0	21,06	12,56	18,5	35,62
4	45	32,66	11,7	2,035	1,61	14,89	8,606	18,5	34,6

Таблица 3

Точные значения циркуляции на КГ Air-SF₆, M = 4

α	5°	15°	30°	45°
U_3	3,995	3,96	3,84	3,69
U_2	3,981	3,83	3,33	2,51
Γ	0,555	1,69	3,52	5,73

Замечание. Чтобы исключить влияние граничных эффектов, циркуляцию скорости в расчете надо определять в полосе $L_1 < y < L_2$ ($L_1 \approx 0,3L$, $L_2 \approx 0,8L$, L – диаметр трубы) на момент времени, когда УВ закончит взаимодействовать с КГ.

Заключение

Получено аналитическое решение задачи о взаимодействии плоской УВ с наклонной КГ, разделяющей два разноплотных газа. Найденное решение использовано для анализа течения, возникающего в проведенных ранее экспериментах. Показано, что в экспериментах при slow-fast (fast-slow) взаимодействии УВ с наклонной КГ реализуется нерегулярная (регулярная) конфигурация течения. Определены значения углов наклона КГ, при которых происходит переход от регулярного к нерегулярному взаимодействию УВ с наклонной КГ. С целью отработки некоторых методических вопросов в двумерных газодинамических методиках рассмотрены две задачи. Для оценки качества численного решения методических задач предложено несколько критериев.

Список литературы

1. Разин А. Н., Долголева Г. В., Мжачих С. В. и др. Развитие методик и программ расчета турбулентных течений с использованием модели В. В. Никифорова // ВАНТ, Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2007. Вып.1. С. 121–133.
2. Невмержицкий Н. В., Разин А. Н., Сотсков Е. А. и др. Развитие турбулентного перемешивания на границе газ-жидкость при изменении числа Атвуда от +0.9 до -0.2 // 9-е Харитоновские тематические чтения. Саров. 2007. С. 617.
3. Дудин В. И., Мешков Е. Е., Подувалов А. Н. и др. Исследование развития возмущений и турбулентного перемешивания на границе газ-газ методом лазерно-

го ножа: Препринт № 49. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 1996.

4. Башуров В.В., Бондаренко Ю.А., Губков Е.В. и др. Экспериментальное и численное исследование развития двумерных возмущений контактной границы, ускоряемой серией ударных волн // IV Забабахинские научные чтения. 1995. С. 467.

5. Невмержицкий Н. В., Разин А. Н., Сотсков Е. А. и др. Исследование развития турбулентного перемешивания и возмущений в газах с повышенной сжимаемостью при числах Маха ударной волны от 2 до 9 // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2007. Вып. 1. С. 134–142.

6. Сеньковский Е. Д., Невмержицкий Н. В., Разин А. Н. и др. Эксперименты по исследованию турбулентного перемешивания в трехслойных газовых системах // 9-е Харитоновские тематические чтения. Саров. РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2007. С. 637.

7. Невмержицкий Н. В., Разин А. Н., Трутнев Ю. А., Сеньковский Е. Д. и др. Исследование развития турбулентного перемешивания в трехслойных газовых системах с наклонной контактной границей // См. настоящий выпуск. С. 12.

8. Козлов В. И. Моделирование взаимодействия ударных волн и турбулентности // 8-е Харитоновские тематические чтения. Саров. РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. С. 258.

9. Козлов В. И., Сапожников И. В. Моделирование нестационарных турбулентных течений на основе модифицированной модели Никифорова // Там же. С. 266.

10. Андронов В. А., Бахрах С. М., Мешков Е. Е., Никифоров В. В., Певницкий А. В., Толшмяков А. И. // Докл. АН СССР. 1982. № 1. Т. 264. С. 76.

11. Henderson L. F. // J. Fluid Mech. 1966. Vol. 26. P. 607.

12. Henderson L. F. // J. Fluid Mech. 1989. Vol. 198. P. 365.

13. Henderson L. F., Colella P., Puckett E. G. // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 221. P. 1.

14. Samtaney R., Zabusky N. On shock polar analysis and analytical expressions for vorticity deposition in shock-accelerated density-stratified interfaces // Phys. Fluids. 1993. Vol. 5(6). P. 1285.

15. Yang X., Chern I-Liang, Zabusky N., Samtaney R., Hawley J. Vorticity generation and evolution in shock-accelerated density-stratified interfaces // Phys. Fluids. 1992. Vol. 4(7). P. 1531.

Статья поступила в редакцию 30.01.2008.