

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ В ОДНОСКОРОСТНОЙ НЕЙТРОННОЙ КИНЕТИКЕ

Н. Б. Бабичев, И. В. Лутиков, А. А. Севастьянов

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Доказано свойство универсальности (независимости от ядерно-физических характеристик среды) нестационарных решений односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах. На этой основе получены формулы подобия для собственных функций. Совокупность материалов этой работы представляет собой один из разделов теории подобия в нейтронной кинетике.

Введение

В работе [1] изложена теория подобия стационарных и квазистационарных систем в односкоростной нейтронной кинетике.

Часть результатов [1] относится к пространственно-однородным системам произвольной геометрической формы. Цель данной работы заключается в получении аналогичных результатов для класса нестационарных однородных систем, состоящих из веществ с произвольными ядерно-физическими свойствами.

1. Принятые физические предположения и исходное кинетическое уравнение для нейтронов

Примем следующие упрощения: считается, что ядра неподвижны, а все нейтроны имеют одинаковую скорость V , индикатриса упругого рассеяния нейтронов на ядрах изотропна, влияние неупругих процессов пренебрежительно мало.

Ниже речь идет о произвольных по геометрии системах из однородных веществ с активностью

$$h = \frac{v\sigma_f + \sigma_s}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c},$$

в которых обратный пробег нейтронов $\alpha = n_y(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$ не зависит от координат и времени (n_y – плотность ядер; $\sigma_s, \sigma_f, \sigma_c$ – элементарные сечения рассеяния, деления и захвата; v – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядер).

Будем считать также, что рассматриваемые системы не подвержены действию внешних источников нейтронов.

Сделанным предположениям соответствует (см., например, [2]) следующее односкоростное кинетическое уравнение для нейтронов:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \alpha \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} \int d\vec{\omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\omega}). \quad (1)$$

Граничным условием уравнения (1) является обращение в нуль потока нейтронов, летящих из пустоты в систему, на ее внешней поверхности S

$$\psi|_S = 0 \text{ при } (\vec{\Omega} \vec{N}_S) < 0, \quad (2)$$

где \vec{N}_S – единичная нормаль к поверхности системы, направленная в сторону вакуума.

В выражениях (1) и (2) $\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$ это единичный вектор, отложенный вдоль вектора \vec{V} скорости полета нейтрона.

Начальное условие имеет следующий вид:

$$\psi(t=0, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \psi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (3)$$

Разъясним некоторые обозначения: $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ – функция распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов \vec{r} и $\vec{\Omega}$; $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{r} d\vec{\Omega}$ – число нейтронов в элементарном объеме $d\vec{r}$ возле точки наблюдения \vec{r} в элементе $d\vec{\Omega}$ около вектора $\vec{\Omega}$ в момент времени t ; $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \nabla$ – набла-оператор; $\beta = h\alpha$.

Уравнение переноса нейтронов (1) справедливо внутри системы, а в пустоте за ее пределами $\alpha = \beta = 0$.

2. Теорема подобия нестационарных решений односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах без внешних источников

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\bar{z} = h\alpha\bar{r} ; \quad (4)$$

$$\tau = h\alpha Vt . \quad (5)$$

Учтем, что $\frac{\partial}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\bar{r}} = h\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial t} = h\alpha V \frac{\partial}{\partial \tau}$, и в уравнении (1) перейдем к новым переменным.

Тогда для функции распределения нейтронов $\psi(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega})$ в фазовом пространстве векторов \bar{z} , $\bar{\Omega}$ получим кинетическое уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right] \psi(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega}) + \frac{1}{h} \psi(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int d\bar{\omega} \psi(\tau, \bar{z}, \bar{\omega}) \quad (6)$$

с граничным условием

$$\psi|_{\Sigma} = 0, \text{ если } (\bar{\Omega} \bar{N}_{\Sigma}) < 0 \quad (7)$$

и начальным условием

$$\psi(\tau = 0, \bar{z}, \bar{\Omega}) = \psi_0(\bar{z}, \bar{\Omega}), \quad (8)$$

\bar{N}_{Σ} – направленная в сторону пустоты нормаль к поверхности системы Σ .

Теорема. Произведение экспоненты $\exp\left(\frac{\tau}{h}\right)$ и собственной функции (СФ) $\psi(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega})$ нестационарного кинетического уравнения (6) не зависит от ядерно-физических свойств вещества, из которого состоит система.

Доказательство. Решение уравнения (6) на СФ будем искать в виде

$$\psi(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega}) = \exp\left(-\frac{\tau}{h}\right) f(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega}). \quad (9)$$

Подстановка выражения (9) в (6) приводит к интегродифференциальному уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \right] f(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int d\bar{\omega} f(\tau, \bar{z}, \bar{\omega}) \quad (10)$$

с граничным условием

$$f|_{\Sigma} = 0, \text{ если } (\bar{\Omega} \bar{N}_{\Sigma}) < 0 \quad (11)$$

и начальным условием

$$f(\tau = 0, \bar{z}, \bar{\Omega}) = f_0(\bar{z}, \bar{\Omega}) = \psi_0(\bar{z}, \bar{\Omega}). \quad (12)$$

Кинетическое уравнение (10) и условия (11), (12) не содержат в себе параметров h и α . Поэтому решение кинетического уравнения (10) на СФ $f(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega})$ не зависит от ядерно-физических характеристик вещества, из которого состоит произвольная по геометрии однородная система. Это и требовалось доказать.

Граничное условие (11) означает, что все вылетевшие из системы нейтроны назад из пустоты в нее не возвращаются. Это справедливо лишь в случае односвязных систем со всюду невогнутыми поверхностями*. Из-за данного ограничения области применимости теоремы ниже будем рассматривать только указанный более узкий класс произвольных по геометрии однородных систем.

3. Формулы подобия и некоторые универсальные функции

Существование универсальной (одинаковой для всевозможных значений параметров h и α) функции $f(\tau, \bar{z}, \bar{\Omega})$ для теории подобия нестационарных однородных систем имеет основополагающее значение.

Пусть геометрия системы фиксирована и в случае какого-то вещества "1" с параметрами h_1 и α_1 решение исходного кинетического уравнения $\psi_1(t, \bar{r}, \bar{\Omega}) = \psi(t, \bar{r}, \bar{\Omega}, h_1, \alpha_1)$ нам известно.

Решение $\psi_2(t, \bar{r}, \bar{\Omega}) = \psi(t, \bar{r}, \bar{\Omega}, h_2, \alpha_2)$ для любого вещества "2" с произвольной активностью h_2 можно определить с помощью формул подобия. Выведем эти формулы, воспользовавшись теоремой подобия.

Сначала решение для системы "1" представим в новых переменных

$$\psi_1(\tau_1, \bar{z}_1, \bar{\Omega}) = \psi_1(h_1 \alpha_1 V t, h_1 \alpha_1 \bar{r}, \bar{\Omega}). \quad (13)$$

Здесь и ниже мы опускаем нормировочные константы, которые в силу линейности кинетического уравнения несущественны.

Очевидно, что

$$f_1(\tau_1, \bar{z}_1, \bar{\Omega}) = \exp\left(\frac{\tau_1}{h_1}\right) \psi_1(\tau_1, \bar{z}_1, \bar{\Omega}). \quad (14)$$

Из теоремы следует, что при условии

$$h_2 \alpha_2 = h_1 \alpha_1 \quad (15)$$

выполняется равенство

$$f_2(\tau_2, \bar{z}_2, \bar{\Omega}) = f_1(\tau_1, \bar{z}_1, \bar{\Omega}).$$

Оно приводит к следующей формуле подобия

$$\begin{aligned} \psi_2(\tau_2, \bar{z}_2, \bar{\Omega}) &= \exp\left(-\frac{\tau_2}{h_2}\right) f_2(\tau_2, \bar{z}_2, \bar{\Omega}) = \\ &= \exp\left(\frac{\tau_1}{h_1} - \frac{\tau_2}{h_2}\right) \psi_1(\tau_1, \bar{z}_1, \bar{\Omega}). \end{aligned}$$

После возвращения к аргументам t и \bar{r} , получаем искомый ответ:

* При этом отсутствует обмен между частями системы теми нейтронами, которые пролетают сквозь локальные пустые зоны пространства.

$$\begin{aligned}\psi_2(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) &= \exp[(\alpha_1 - \alpha_2)Vt] \psi_1(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \\ &= \exp\left(\frac{h_2 - h_1}{h_2} \alpha_1 t\right) \psi_1(t, \vec{r}, \vec{\Omega}).\end{aligned}\quad (16)$$

Если рассматривать одинаковые по типу геометрии системы, но не фиксировать, как раньше, их размеры, то вместо (15) будем иметь условие подобия систем

$$h_2 \alpha_2 R_2 = h_1 \alpha_1 R_1, \quad (17)$$

где R_2 и R_1 – характерные размеры рассматриваемых объектов.

В случае (17) при $R_2 \neq R_1$ справедлива следующая формула подобия для пересчета СФ:

$$\begin{aligned}\psi_2(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) &= \\ &= \exp\left(\frac{h_2 R_2 - h_1 R_1}{h_2 R_2} \alpha_1 t\right) \psi_1\left(t, \frac{R_2}{R_1} \vec{r}, \vec{\Omega}\right).\end{aligned}\quad (18)$$

Будем интересоваться распределением нейтронов в \vec{z} -пространстве на различные моменты безразмерного времени τ . Удобно ввести безразмерную функцию

$$F(\tau, \vec{z}, \vec{z}_0, \vec{\Omega}) = \frac{\psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega})}{\psi(\tau, \vec{z}_0, \vec{\Omega})}, \quad \vec{z}_0 = h\alpha \vec{r}_0. \quad (19)$$

Здесь \vec{z} и \vec{z}_0 – соответственно безразмерные текущий радиус-вектор точки наблюдения и векторная координата некоторой фиксированной точки внутри либо на поверхности системы (в качестве таковой, например, можно выбрать точку максимума СФ или точку, лежащую на поверхности системы, в которой СФ имеет наименьшее значение).

Безразмерное время τ и вектор \vec{z}_0 в профильной функции (19) можно рассматривать в качестве параметров.

В результате подстановки выражения (9) в формулу (19) экспоненты в числителе и знаменателе сокращаются и функция относительного пространственно-углового распределения нейтронов приобретает следующий вид:

$$F(\tau, \vec{z}, \vec{z}_0, \vec{\Omega}) = \frac{f(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega})}{f(\tau, \vec{z}_0, \vec{\Omega})}. \quad (20)$$

Отсюда видно, что с помощью универсальной функции $f(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega})$ удалось построить еще одну универсальную функцию (19), которая тоже не зависит от ядерно-физических свойств вещества. Это существенно. Действительно, сама по себе функция $\psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega})$ не является универсальной и в то же время отношение

$$\frac{\psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega})}{\psi(\tau, \vec{z}_0, \vec{\Omega})}$$

не зависит от ядерно-физических характе-

ристик среды. Иными словами, относительные зависимости СФ от координат и углов универсальны, но про

функцию распределения этого сказать нельзя. Универ-

сальное отношение $\frac{\psi(\tau, \vec{z}, \vec{\Omega})}{\psi(\tau, \vec{z}_0, \vec{\Omega})}$ генерирует и другие

частные универсальные относительные зависимости:

$$\frac{n(\tau, \vec{z})}{n(\tau, \vec{z}_0)}, \quad \frac{\vec{j}(\tau, \vec{z})}{\vec{j}(\tau, \vec{z}_0)}.$$

Здесь $n(\tau, \vec{z}) = \int d\vec{\omega} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\omega})$ и

$\vec{j}(\tau, \vec{z}) = \int d\vec{\omega} \vec{\omega} \psi(\tau, \vec{z}, \vec{\omega})$ – соответственно плотность и векторный поток нейтронов, который часто называют нейтронным током.

Кинетическое уравнение (10), записанное в обычных переменных t и \vec{r} для функции $f(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$, выглядит так

$$\left[\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \right] f(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} \int d\vec{\omega} f(t, \vec{r}, \vec{\omega}). \quad (21)$$

Это уравнение подвергнем преобразованиям подобия

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \frac{\beta}{\beta'} \vec{r} = \frac{h\alpha}{h'\alpha'} \vec{r}; \quad (22)$$

$$t \rightarrow t' = \frac{\beta}{\beta'} t = \frac{h\alpha}{h'\alpha'} t. \quad (23)$$

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\beta}{\beta'} \frac{\partial}{\partial t'}$ и $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\beta}{\beta'} \frac{\partial}{\partial \vec{r}'}$,

для штрихованной функции распределения $f'(t', \vec{r}', \vec{\Omega})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t'} + \left(\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \right) \right] f'(t', \vec{r}', \vec{\Omega}) = \frac{\beta'}{4\pi} \int d\vec{\omega} f'(t', \vec{r}', \vec{\omega}). \quad (24)$$

Уравнения (21) и (24) по своему виду совершенно одинаковы. Таким образом, нестационарное кинетическое уравнение (21) инвариантно по отношению к преобразованиям подобия (22), (23).

Существование обнаруженных выше универсальных функций является следствием данного фундаментального свойства кинетического уравнения (21).

Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56–64.
2. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изво Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.

Статья поступила в редакцию 03.06.2008.