

# ОСОБЕННОСТИ ОДНОСКОРОСТНОЙ КИНЕТИКИ НЕЙТРОНОВ В ОПТИЧЕСКИ ТОЛСТЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМАХ И РЕШЕНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ВАРИАНТА ЗАДАЧИ МИЛНА

Н. Б. Бабичев, И. В. Лутиков, В. П. Незнамов

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

В результате перехода в некоторое безразмерное фазовое пространство обнаружено следующее уникальное свойство решений кинетического уравнения: их пространственно-угловая часть внутри однородной системы с бесконечной оптической толщиной не зависит от ядерно-физических характеристик вещества, составляющего систему. На основе этого утверждения и известного решения задачи Милна в случае инертной среды получено новое (квазистационарное) решение задачи Милна в произвольной среде. Это имеет принципиальное значение, так как в случае размножающей нейтроны среды правильным является именно квазистационарное решение.

## Введение

Задача Милна в теории переноса нейтронов состоит в определении пространственного и углового распределений нейтронов в однородной полубесконечной среде [1, 2].

Известное решение задачи Милна в случае размножающей нейтроны (активной) среды обладает тем недостатком, что оно приводит к возникновению областей с отрицательной плотностью нейтронов (см. [1, 2]).

Главная цель статьи заключается в отыскании решения задачи Милна для активной среды, которое согласуется с физическим смыслом.

В первых двух разделах статьи, где речь идет о произвольных по геометрии пространственно-однородных системах, получен достаточно общий новый результат. Доказано следующее сильное утверждение, справедливое для предельных систем с бесконечной оптической толщиной\*, в которых изменение нейтронного поля со временем описывается экспоненциальным законом (ниже его мы называем квазистационарным). После замены переменной  $\vec{z} = h\alpha\vec{r}$  ( $\vec{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения,  $h$  и  $\alpha$  – произвольные активность среды и обратный пробег нейтрона) пространственно-угловая часть решения соответствующего кинетического уравнения внутри системы при стремлении ее оптической толщины к бесконечности перестает зависеть от ядерно-физических свойств вещества, из

которого она состоит. С помощью этого в третьем разделе определены точные физические решения квазистационарной задачи Милна при любых значениях активности  $h$ . В четвертом разделе приведены результаты численного решения задачи Милна по одной из существующих математических программ. Они подтвердили правильность полученных новых результатов.

В настоящее время разработано множество разнообразных методов численного решения кинетического уравнения для нейтронов в различных системах. Тем не менее аналитические методы исследований не теряют своей актуальности. Конечно, точные решения кинетического уравнения удастся найти лишь при упрощающих предположениях, но зато они позволяют выявить общие закономерности нейтронной кинетики и осуществить верификацию ряда математических методик.

Ниже приняты те же физические приближения, что и в задаче Милна (см. [1, 2]): среда характеризуется постоянными макроскопическими сечениями взаимодействия нейтронов с веществом и предполагается, что ядра неподвижны, модуль вектора скорости у всех нейтронов одинаков, упругое рассеяние нейтронов на ядрах изотропно, неупругое рассеяние отсутствует.

## 1. Оценки возможных типов решений кинетического уравнения в случае систем с предельно большой оптической толщиной

Пусть геометрия однородной системы произвольна. Тогда при сделанных упрощениях справедливо следующее кинетическое уравнение для нейтронов:

\* Полубесконечное пространство с веществом, рассматриваемое в задаче Милна, с точки зрения геометрии является частным случаем систем разделов 1, 2.

$$\frac{\partial \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})}{\partial t} + V(\vec{\Omega} \nabla) \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) + \alpha V \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\beta V}{4\pi} n(t, \vec{r}) + q(t, \vec{r}, \vec{\Omega}), \quad (1)$$

где  $q$  – внешний источник нейтронов;  $\vec{\Omega} = \frac{\vec{V}}{V}$  – единичный вектор, направленный вдоль вектора  $\vec{V}$  скорости полета нейтрона;  $\psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$  – функция распределения нейтронов в фазовом пространстве векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{\Omega}$ ;  $n(t, \vec{r}) = \int d\vec{\Omega}' \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}')$  – нейтронная плотность;  $\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$  – набла-оператор;  $\alpha = n_{\text{я}}(\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c)$  и  $\beta = n_{\text{я}}(\nu \sigma_f + \sigma_s)$ ;  $n_{\text{я}}$  – плотность ядер вещества;  $\sigma_s, \sigma_f, \sigma_c$  – элементарные (микроскопические) сечения рассеяния, деления и захвата;  $\nu$  – среднее число вторичных нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра.

Постоянные величины  $\alpha$  и  $\beta$  – так называемые параметры Пайерлса;  $h = \beta/\alpha$  – активность вещества ( $h = 1$  – инертное вещество, для нейтронопоглощающей среды  $h < 1$ , в случае размножающего нейтроны делящегося материала  $h > 1$ ).

В результате интегрирования (1) сначала по углам  $\vec{\Omega}$ , а затем по объему системы соответственно получим

$$\frac{\partial n(t, \vec{r})}{\partial t} + \text{div } \vec{j}(t, \vec{r}) + \alpha V n(t, \vec{r}) = \beta V n(t, \vec{r}) + \int d\vec{\Omega} q(t, \vec{r}, \vec{\Omega}), \quad (2)$$

где  $\vec{j} = V \int d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$  – векторный поток нейтронов;

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[ (\beta - \alpha)V - \frac{\Pi(t)}{N(t)} \right] N(t) + Q(t); \quad (3)$$

$N(t) = \int d\vec{r} n(t, \vec{r})$  – полное число нейтронов в системе в момент времени  $t$ ;  $Q(t) = \int d\vec{r} d\vec{\Omega} q(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$  – количество нейтронов, испускаемых внутри системы внешним источником в единицу времени;  $\Pi(t) = \int d\vec{s} \vec{j}(t, \vec{r})$  (интегрирование ведется по внешней поверхности объекта) – скорость утечки нейтронов в пустоту.

Второй член в квадратных скобках уравнения баланса полного числа нейтронов в системе (3) представляет собой вероятность вылета нейтронов в пустоту в единицу времени.

Здесь мы рассматриваем системы с произвольной (в общем случае трехмерной) геометрией. Пусть  $R$  – некоторый характерный размер системы. По нашему усмотрению он может быть выбран произвольным образом. Но для любой конкретной системы константы в формулах, определяющих объем и площадь поверхности объекта ( $C_1 R^3$  и  $C_2 R^2$ ), зависят от того, какой

именно размер выбран в качестве характерного. Например, если для шара в качестве характерного размера взять его радиус, то  $C_1 = \frac{4\pi}{3}$ ,  $C_2 = 4\pi$ , а если диаметр, то  $C_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $C_2 = \pi$ . Будем называть оптической толщиной системы или, точнее говоря, характерным значением оптической толщины следующее произведение:

$$p = \alpha R. \quad (4)$$

Если перейти к безразмерному аргументу  $\vec{\xi} = \vec{r}/R$ , то с учетом соотношений  $d\vec{r} = R^3 d\vec{\xi}$ ,  $d\vec{s} = R^2 d\vec{\sigma}$  и, например,  $N(t) = \int d\vec{\xi} n(t, \vec{\xi})$  вместо (3) получим уравнение баланса в следующей форме:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[ (\beta - \alpha)V - \frac{1}{R} \frac{\Pi(t)}{N(t)} \right] N(t) + Q(t).$$

Отсюда видно, что по мере увеличения размеров системы относительная роль утечки нейтронов в их общем балансе падает.

Вынося произведение  $\alpha V$  за квадратные скобки и переходя к пределу  $p \rightarrow \infty$ , далее получим

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[ h - 1 - \frac{1}{pV} \frac{\Pi(t)}{N(t)} \right] \alpha V N(t) + Q(t) \quad (5)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{pV} \frac{\Pi(t)}{N(t)} \right] = 0.$$

Таким образом, балансное соотношение (5) при условии  $p \rightarrow \infty$  переходит в предельное дифференциальное уравнение

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + Q(t), \quad (6)$$

решением которого при начальном условии  $N(t=0) = N_0$  является

$$N(t) = \left[ N_0 + \int_0^t dt' Q(t') e^{-\lambda t'} \right] e^{\lambda t}. \quad (7)$$

Очевидно, что из-за отсутствия утечки вошедшая в соотношения (6) и (7) величина  $\lambda$  равна

$$\lambda = \lambda_{\infty} = (h - 1)\alpha V = (\beta - \alpha)V = n_{\text{я}} \left[ (\nu - 1)\sigma_f - \sigma_c \right] V. \quad (8)$$

Здесь  $\lambda_{\infty}$  – значение  $\lambda$  в бесконечной (полубесконечной) среде.

Зададимся следующим вопросом: в каких случаях существуют стационарные решения уравнений (1) ( $\partial \psi / \partial t = 0$ ) и соответственно (6) ( $dN/dt = 0$ )?

Положив  $Q = Q_0 = \text{const}$ , вместо выражений (6) и (7) имеем

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + Q_0 = (h - 1)\alpha V N(t) + Q_0, \quad (9)$$

$$N(t) = \left[ N_0 + \frac{Q_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right] e^{\lambda t}. \quad (10)$$

В случае  $h=1$  отсюда следует решение  $N(t) = N_0 + Q_0 t$ . Таким образом, равенство  $dN/dt = 0$  возможно только при отсутствии источника. Это же вытекает непосредственно из формулы (6) при  $\lambda = 0$ . Таким образом, в случае инертного вещества к стационарному физическому решению (постоянство количества нейтронов в системе с  $p \rightarrow \infty$ ) приводит однородное кинетическое уравнение. Очевидно, что неоднородное кинетическое уравнение в случае  $h=1$  стационарных решений не имеет.

Рассмотрим поглощающую среду с постоянным источником  $Q_0$ . При  $h < 1$  величина  $\lambda$  отрицательна и физическое стационарное решение дает неоднородное уравнение (9), а начальное число нейтронов  $N_0$  не отражается на асимптотическом ( $t \gg 1/|\lambda|$ ) ответе. Действительно, при  $t \gg 1/|\lambda|$  из соотношения (10) получаем  $N \approx Q_0/|\lambda| = \text{const}$ . Очевидно, что равенство  $dN/dt = 0$  возможно лишь в случае неизменного во времени источника.

Пусть теперь среда активна:  $h > 1$ . Тогда требование стационарности  $dN/dt = 0$  при условии  $Q_0 \neq 0$  в выражении (9) дает абсурдный ответ:  $N = -\frac{Q_0}{(h-1)\alpha V} < 0$

(число нейтронов в системе не может быть отрицательным). В случае  $h > 1$  уравнение (9) не имеет стационарных решений и при  $Q_0 = 0$ . Это следует из формулы (10): при  $t \gg 1/|\lambda|$  вне зависимости от величины  $Q_0$  решение выходит на асимптотический экспоненциальный закон

$$\frac{dN(t)}{dt} = \text{const } e^{\lambda t}, \quad \lambda = (h-1)\alpha V > 0, \quad (11)$$

который будем называть квазистационарным. С помощью формулы (7) легко показать, что квазистационарное решение (11) справедливо и в случае произвольной конечной функции  $Q(t)$ .

Предположим, что квазистационарное приближение выполняется не только для  $N(t)$ , но и для других функций. Иначе говоря, в этой статье принят экспоненциальный закон

$$\begin{aligned} \psi(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) &= e^{\lambda t} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}); \quad n(t, \vec{r}) = e^{\lambda t} n(\vec{r}); \\ \vec{j}(t, \vec{r}) &= e^{\lambda t} \vec{j}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (12)$$

Обратим внимание на то, что для систем с  $h < 1$  и  $p \rightarrow \infty$  наряду с отмеченным выше стационарным решением неоднородного уравнения существует также и квазистационарное (с  $\lambda < 0$ ) решение уравнения без источника нейтронов. Покажем это. Пусть источник отсутствует ( $q = 0$ ,  $Q = 0$ ). В таком случае решение уравнения (7) превращается в затухающую со временем функцию

$$N(t, h < 1) = N_0 e^{\lambda t} = N_0 e^{-|\lambda|t}, \quad \lambda = (h-1)\alpha V < 0. \quad (13)$$

Таким образом, квазистационарные решения однородного кинетического уравнения для нейтронопоглощающей среды не противоречат физическому смыслу.

Сделаем ряд замечаний по поводу возможных типов решений кинетического уравнения (1) в случае конечных по размерам систем.

Полученные выше результаты при  $p = \alpha R \rightarrow \infty$  и  $\lambda = \lambda_\infty$ , что соответствует рассматриваемой в третьем разделе проблеме Милна, легко обобщаются на случай систем с произвольными оптическими толщинами и значениями  $\lambda < \lambda_\infty$ .

В случае критической активной системы  $\lambda = 0$  и стационарное решение получается из однородного кинетического уравнения.

Для надкритических активных систем ( $\lambda > 0$ ) независимо от наличия или отсутствия источника при  $t \gg 1/|\lambda|$  получается предельное квазистационарное решение.

В случае  $\lambda < 0$  при любых значениях активности  $0 < h < \infty$  тоже имеются квазистационарные решения. Надо иметь в виду, что квазистационарное приближение справедливо далеко не всегда. Если для надкритических систем с  $h > 1$  оно вполне естественно, то при  $\lambda(0 < h < \infty) < 0$  квазистационарное решение может реализоваться на практике, видимо, реже, чем стационарное при действии постоянного источника нейтронов.

В заключение укажем одно из различий между квазистационарными системами с бесконечной и конечной оптическими толщинами. В случае  $p \rightarrow \infty$  из уравнения (2) с  $q = 0$ , записанного в квазистационарном (стационарном, если  $\lambda = 0$ ) приближении  $\left(\frac{\partial n}{\partial t} = \lambda n = (\beta - \alpha)V n\right)$ , следует равенство нулю дивергенции векторного потока нейтронов внутри системы. Если же оптическая толщина квазистационарной (стационарной) системы конечна, то  $\text{div} \vec{j} \neq 0$ .

## 2. Предельная теорема подобия

### 2.1. Формулировка теоремы

Если справедлив квазистационарный (при  $\lambda = 0$  – стационарный) закон (12) и выполняется условие  $p = \alpha R \rightarrow \infty$ , то распределение нейтронов внутри системы в фазовом пространстве безразмерных векторов  $\vec{z} = \beta \vec{r} = h \alpha \vec{r}$  и  $\vec{\Omega} = \vec{V}/|\vec{V}|$  не зависит от ядерно-физических свойств вещества, из которого состоит система.

Последнее означает, что собственные функции (СФ)  $\psi(\vec{z}, \vec{\Omega})$  и  $n(\vec{z})$  внутри системы определяются только геометрией задачи. Этого нельзя сказать про СФ за пределами квазистационарной системы – там СФ

зависят также от активности  $h$  (см. подраздел 2.2). Таким образом, теорема применима лишь в пределах рассматриваемых пространственно-однородных объектов.

## 2.2. Доказательство теоремы на основе кинетического уравнения и некоторые выводы

В квазистационарном случае справедливо уравнение

$$\left(\bar{\Omega} \frac{d}{d\bar{r}}\right) \psi(\bar{r}, \bar{\Omega}) + \left(\frac{\lambda}{V} + \alpha\right) \psi(\bar{r}, \bar{\Omega}) = \frac{\beta}{4\pi} n(\bar{r}). \quad (14)$$

Здесь  $\lambda = \lambda(p \rightarrow \infty) = (\beta - \alpha)V$ .

Произведя в уравнении (14) замену переменной

$$\bar{z} = \beta \bar{r}, \quad (15)$$

имеем

$$\frac{d}{d\bar{r}} = \beta \frac{d}{d\bar{z}}; \quad (16)$$

$$\psi(\bar{z}, \bar{\Omega}) = \frac{\psi(\bar{r}, \bar{\Omega})}{\beta^3}; \quad n(\bar{z}) = \frac{n(\bar{r})}{\beta^3}; \quad (17)$$

$$\left(1 + \bar{\Omega} \frac{d}{d\bar{z}}\right) \psi(\bar{z}, \bar{\Omega}) = \frac{n(\bar{z})}{4\pi}. \quad (18)$$

Граничным условием задачи является равенство нулю потока нейтронов, поступающих в систему из пустоты.

Безразмерное кинетическое уравнение (18) не содержит в себе параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , что и требовалось доказать.

Уравнения (14) и (18) справедливы внутри системы, а за ее пределами имеют место следующие кинетические уравнения:

$$\left(\bar{\Omega} \frac{d}{d\bar{r}}\right) \psi(\bar{r}, \bar{\Omega}) + \frac{\lambda}{V} \psi(\bar{r}, \bar{\Omega}) = 0; \quad (19)$$

$$\left(\bar{\Omega} \frac{d}{d\bar{z}}\right) \psi(\bar{z}, \bar{\Omega}) + \frac{h-1}{h} \psi(\bar{z}, \bar{\Omega}) = 0. \quad (20)$$

Из них следует параметрическая зависимость функции распределения нейтронов  $\psi(\bar{z}, \bar{\Omega})$  в пустом пространстве от активности  $h$ , точнее, от комбинации  $\frac{h-1}{h}$ .

Вторые слагаемые в левых частях уравнений (19) и (20) ответственны за  $\lambda$ -поглощение нейтронов при  $\lambda > 0$  и  $\lambda$ -источник нейтронов при  $\lambda < 0$ , действующие в вакууме.

Отметим, что так называемые  $\lambda$ -поглотитель и  $\lambda$ -источник нейтронов в пустом пространстве приводят соответственно к эффектам убывания и возрастания нейтронной плотности при удалении точки наблюдения от квазистационарной системы. Сказанное относится также и к квазистационарным объектам с произвольной оптической толщиной.

Известно, что кинетика нейтронов в оптически тонких объектах чувствительна к изменениям активности вещества. Это наряду с доказанным утверждением

теоремы дает основание считать, что по мере увеличения оптической толщины системы  $p$  влияние активности вещества на нейтронную кинетику ослабевает, совсем исчезая в пределе  $p \rightarrow \infty$ .

## 2.3. Доказательство теоремы с помощью интегрального уравнения Пайерлса

Если в квазистационарном уравнении Пайерлса

$$n(\bar{r}) = \frac{\beta}{4\pi} \int d\bar{r}' \frac{n(\bar{r}')}{|\bar{r}' - \bar{r}|^2} \exp\left[-\left(\frac{\lambda}{V} + \alpha\right)|\bar{r}' - \bar{r}|\right] \quad (21)$$

осуществить замену переменной (15), перейти к нейтронной плотности в  $\bar{z}$ -пространстве и учесть, что  $\lambda = (\beta - \alpha)V$ , то получится уравнение

$$n(\bar{z}) = \frac{1}{4\pi} \int d\bar{z}' \frac{n(\bar{z}')}{|\bar{z}' - \bar{z}|^2} \exp[-|\bar{z}' - \bar{z}|]. \quad (22)$$

Уравнения (21) и (22), интегрирование в правых частях которых ведутся соответственно по размерному и безразмерному объемам объектов, справедливы для лежащих в пределах системы точек наблюдения  $\bar{r}$  и  $\bar{z}$ .

Из уравнения (22) видно, что нейтронная плотность зависит только от геометрических характеристик объектов. Это и служит доказательством предельной теоремы подобия.

## 2.4. Формулы подобия

Пусть тип произвольной геометрии рассматриваемых объектов зафиксирован. Тогда из теоремы следует, что СФ внутри любых двух подобных систем "1" и "2" с разными параметрами  $\beta$  связаны так

$$\psi_2(\beta_2 \bar{r}, \bar{\Omega}) = \psi_1(\beta_1 \bar{r}, \bar{\Omega}), \quad n_2(\beta_2 \bar{r}) = n_1(\beta_1 \bar{r}), \quad (23)$$

$$\bar{j}_2(\beta_2 \bar{r}) = \bar{j}_1(\beta_1 \bar{r}).$$

Рассмотрим, например, системы с разными активностями при одинаковых параметрах  $\alpha$ . Если для какой-то системы "1" СФ известна, то для любой другой системы "2" она определяется по точной формуле

$$\psi_2(\bar{r}, \bar{\Omega}) = \text{const} \psi_1\left(\frac{h_1}{h_2} \bar{r}, \bar{\Omega}\right). \quad (24)$$

Соотношения подобия являются основой решения квазистационарной задачи Милна в разделе 3.

## 2.5. Замечания по поводу доказательства теоремы

Граничное условие (см. выше) к кинетическому уравнению (18) справедливо лишь в случае односвязных систем, ограниченных всюду невогнутыми поверхностями. Таким образом, для данного, более узкого класса пространственно-однородных систем, теорему можно считать доказанной и этого вполне достаточно с точки зрения применимости теоремы к решению задачи Милна с плоской односвязной геометрией.

### 3. Проблема Милна в теории переноса нейтронов

Задача Милна состоит в нахождении пространственного и углового распределений нейтронов в полубесконечной среде путем точного аналитического решения односкоростного интегродифференциального кинетического уравнения с постоянными параметрами  $\alpha$  и  $\beta = h\alpha$ , либо соответствующего ему интегрально-уравнения Пайерлса.

#### 3.1. Некоторые известные результаты

В случае плоской геометрии одномерной задачи Милна (для определенности будем считать, что вещество находится в области положительных значений аргумента  $0 \leq x < \infty$ , а при  $-\infty < x < 0$  полупространство пустое) разными авторами решалось кинетическое уравнение

$$\mu \frac{d\psi(z, \mu)}{dz} + \psi(z, \mu) = \frac{h}{2} n(z) \quad (25)$$

с граничным условием

$$\psi(0, \mu > 0) = 0 \quad (26)$$

или уравнение Пайерлса

$$z = \alpha x, \quad (27)$$

$$n(z) = -\frac{h}{2} \int_0^{\infty} dz' n(z') Ei(-|z' - z|). \quad (28)$$

Кроме того, считалось, что при  $z = +\infty$  задан постоянный поток нейтронов.

$$\psi(z, \mu) \text{ и } n(z) = \int_{-1}^1 d\mu \psi(z, \mu) \text{ — соответственно}$$

функция распределения и плотность частиц;  $\mu$  – косинус угла  $\vartheta$  между направлением полета нейтрона и осью абсцисс  $OZ$ ;  $Ei(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-t} = -\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-xt}$ ,  $x \geq 0$  – интегральная экспонента.

Уравнение (28) получается после подстановки  $\psi(z, \mu \geq 0) = \Phi(z, \mu) \exp\left(-\frac{z}{\mu}\right)$  в соотношение (25) и интегрирования полученного результата по  $\mu$  с учетом того, что  $\psi(z, \mu \geq 0) = \frac{1}{2\mu} \int_0^z dz' n(z') \exp\left(\frac{z' - z}{\mu}\right)$  и

$$\psi(z, \mu < 0) = -\frac{1}{2\mu} \int_z^{\infty} dz' n(z') \exp\left(\frac{z' - z}{\mu}\right).$$

Решение задачи Милна можно представить в виде следующей суперпозиции (см. [2]):

$$n(z) = n_0(z) + \Delta n(z). \quad (29)$$

Здесь  $n_0(z)$  – асимптотическая (при  $z \gg 1$ ) часть решения, называемая в дальнейшем асимптотической

плотностью,  $\Delta n(z) = O(e^{-z})$  – малая при больших  $z$  отрицательная поправка.

Решение задачи Милна при  $h < 1$  приведено в работах [1, 2]. Ле Кейн [3] показала, что асимптотическая плотность на границе ( $z = 0$ ) отличается от истинной плотности примерно на 20 %, а на расстоянии в половину пробега от нее – менее чем на 3 %.

Асимптотическая плотность в задаче Милна с  $h < 1$  равна [2]

$$n_0(z) = \sqrt{\frac{2(1-k^2)}{k^2-1+h}} \text{sh}[k(z+z_0)]. \quad (30)$$

Постоянная  $k$  определяется из трансцендентного уравнения

$$h \text{Arth}(k) = k. \quad (31)$$

При  $h > 1$  асимптотическое решение становится периодическим [2]

$$n_0(z) = A_k \sin[k(z+z_0)], \quad (32)$$

где  $A_k$  – нормировочная константа,  $k$  – удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$h \arctg(k) = k. \quad (33)$$

Заметим, что задача Милна в поглощающей или размножающей среде, как известно из статьи Ле Кейн [3], была решена Марком и Адлером, но их работа не опубликована. Поэтому данная задача была независимо решена Ю. А. Романовым в качестве частного случая тоже решенной им в 1951 году обобщенной задачи Милна с двумя граничными полубесконечными пространствами, заполненными разными веществами.

#### 3.2. Физическое решение задачи Милна для активной среды

Решение (32) в полубесконечной среде на отдельных участках приводит к отрицательной плотности нейтронов, что невозможно. Это означает, что исходное стационарное кинетическое уравнение (25) при  $h > 1$  не имеет физического решения. Формальное математическое его решение между тем существует и, более того, на его основе удалось (см. [2]) с высокой точностью в диффузионном приближении определить критическую толщину бесконечной в двух измерениях активной пластины.

С точки зрения геометрии задача Милна является частным случаем систем с бесконечной оптической толщиной  $p$ , исследованных в разделах 1, 2.

Для активных систем с  $p = \infty$  физическим является квазистационарное, а не стационарное решение (см. раздел 1). Поэтому для нахождения физического решения задачи Милна с  $h > 1$ , введя отличающуюся от (27) переменную

$$z = \beta x = h\alpha x, \quad (34)$$

надо исходить из квазистационарных уравнений

$$\mu \frac{d\psi(z, \mu)}{dz} + \psi(z, \mu) = \frac{1}{2} n(z), \quad \psi(0, \mu > 0) = 0; \quad (35)$$

$$n(z) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dz' n(z') Ei(-|z' - z|), \quad (36)$$

а не из стационарных уравнений (25), (28).

Задача Милна соответствует требованиям доказанной в разделе 2 теоремы, из которой следует, что искомое решение  $n(z, h > 1)$  в точности совпадает с известной функцией  $n(z, h = 1)$ . Последнее вытекает также из непосредственного сравнения (25)–(28) с (34)–(36). Физическое решение стационарной\* задачи Милна для инертного вещества  $n(z, h = 1)$  было найдено Плачеком и Зейделем в работе [4].

Итак, искомое точное физическое решение задачи Милна для активной среды выражается формулами [4] при  $z = h\alpha x$ . Они имеют сложную структуру и неудобны для практического применения.

Марк в работе [5], исследуя решения [4], получил более простые соотношения. Очевидно, что при  $z = h\alpha x$  они справедливы и для произвольных  $h \geq 1$

$$n(z) = n_0(z) + \Delta n(z); \quad (37)$$

$$n_0(z) = z + z_0; \quad (38)$$

$$\Delta n(z) = -\frac{1}{4\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{d\eta \exp\left(-\frac{z}{\eta}\right)}{\varphi(\eta) \left\{ [1 - \eta \operatorname{arth}(\eta)]^2 + \pi^2 \frac{\eta^2}{4} \right\}}. \quad (39)$$

В равенствах (38) и (39)  $z = h\alpha x$ ,  $z_0 = 0.7104$ ,  $\varphi(\eta)$  – функция Плачека (см. [6])

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{1+\eta}} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \arctg[\eta \operatorname{tg}(t)] \frac{1}{1-t \operatorname{ctg}(t)} \right\}, \quad (40)$$

где  $\eta$  – косинус угла между вектором  $\vec{v}$  скорости нейтрона и направленной в сторону вакуума нормалью к плоскости  $z = 0$ ;  $\varphi(\eta)$  – угловое распределение нейтронов на поверхности раздела;  $\varphi(\eta) d\eta$  – вероятность вылетевшим в направлении с косинусом  $\eta$  нейтроном находиться в интервале между  $\eta$  и  $\eta + d\eta$ , так что

$$\int_0^1 d\eta \varphi(\eta) = 1. \quad (41)$$

Выше выбрана нормировка решений, обеспечивающая следующие равенства для асимптотической и истинной плотностей:

$$n_0(0) = z_0 = 0,7104, \quad n(0) = 0,5773. \quad (42)$$

\* В разделе 1 отмечено, что в случае  $h = 1$  именно стационарное решение в среде с  $p = \infty$  обладает физическим смыслом. Действительно, в бесконечной и полубесконечной средах, в которых упругое рассеяние является единственным каналом взаимодействия, количество нейтронов не зависит от времени.

На границе  $z = 0$  истинная плотность в 1,231 раза меньше, чем асимптотическая.

Величина  $z_0$  это безразмерная экстраполированная длина. С ней связана следующая процедура при формулировке граничного условия в теории диффузии нейтронов, применяемой в случае систем с конечными размерами. Из формул (30), (32), (38) следует, что асимптотическая плотность обращается в нуль при  $z = -z_0$ . Предполагается, что диффузионная плотность нейтронов за пределами конечной по размерам пластины в пустоте зануляется на том же самом расстоянии  $z_0$  от двух ее границ. Высокая точность этого допущения была подтверждена путем сравнения результатов теории диффузии и численных расчетов критической толщины активной пластины по математическим методам решения кинетического уравнения.

Данный приближенный рецепт обобщен на случай произвольных, в том числе трехмерных систем, ограниченных внешней поверхностью  $S$ . Для таких систем уравнение диффузии нейтронов сопровождается граничным условием обращения в нуль нейтронной плотности на поверхности, эквидистантно сдвинутой от  $S$  в сторону вакуума на расстояние

$$x_0(h) = \frac{z_0(h)}{\beta}. \quad (43)$$

Фейнман в работе [7] привел следующую табличную (см. ниже) функциональную зависимость  $z_0(h)$ , которая вытекает из нефизического стационарного решения (32) задачи Милна для среды с  $h > 1$ .

Нам известно также, что  $\lim_{h \rightarrow \infty} z_0(h) = 0.75$ , если

пользоваться решением (32).

Из приведенного выше нового (квазистационарного) решения задачи Милна при  $h > 1$  следует, что данные таблицы ошибочны.

В действительности в области  $h \geq 1$  безразмерная экстраполированная длина не зависит от активности  $h$

$$z_0(1 \leq h < \infty) = \operatorname{const} \approx 0,7104, \quad (44)$$

а реальная длина экстраполяции обратно пропорциональна активности вещества и прямо пропорциональна пробегу  $l = 1/\alpha$  нейтронов:

$$x_0(1 \leq h < \infty) = \frac{0,710446\dots}{\alpha h}. \quad (45)$$

Этой точной формулой, пренебрегая слабой зависимостью таблицы, зачастую пользовались, принимая ее за приближенную (см. [1, 2]).

Для ответа на вопрос о существовании зависимости  $z_0(h)$  в случае  $h > 1$  не обязательно было использовать квазистационарные решения.

Невозможность зависимости  $z_0$  от  $h$  вытекает непосредственно из основ теории переноса нейтронов. Докажем это, обратившись к работе [8]. В [8] получена

$h$	1,0132	1,0512	1,1102	1,1856	1,2732	1,8064	2,402
$z_0(h)$	0,7104	0,7104	0,7104	0,7106	0,7109	0,7141	0,7174

формула, выражающая связь между собственными значениями (СЗ)  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  для любых двух подобных в отношении нейтронной кинетики квазистационарных систем с конечными характерными размерами  $R_1$  и  $R_2$ :

$$\lambda_2 = \alpha_1 V \left[ \frac{h_2}{h_1} \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1 V} \right) - 1 \right]. \quad (46)$$

Геометрическая форма рассматриваемых активных объектов при этом может быть произвольной, но класс подобных систем с независимыми от координат параметрами Пайерлса, для которых справедливо соотношение (46), ограничен следующим условием:

$$\beta_2 R_2 = \beta_1 R_1. \quad (47)$$

Если равенство (47) выполняется, то можно утверждать, что формула (46) столь же точна, как и квазистационарное кинетическое уравнение без внешнего источника, из которого она получена в работе [8].

Для доказательства сделанного утверждения его можно подтвердить на произвольном частном примере, в качестве которого рассмотрим активный шар с конечной оптической толщиной и радиусом  $R$ .

В целях упрощения задачи воспользуемся решением на СЗ диффузионного уравнения с граничным условием  $n(R + x_0) = 0$  (обращение СФ в нуль на экстраполированном радиусе шара)

$$\lambda = \alpha V \left( \frac{h\omega}{\text{tg } \omega} - 1 \right), \quad \omega = \frac{\pi}{\beta R + z_0}, \quad z_0 = \beta x_0. \quad (48)$$

Если к приближенным диффузионным СЗ, вычисленным по формуле (48), применить соотношение подобия (46), то, очевидно, точность последнего при этом никак не пострадает. Путем подстановки решения (48) для двух подобных шаров  $\lambda_1(R_1, \beta_1, h_1)$  и  $\lambda_2(R_2, \beta_2, h_2)$  в (46) легко убедиться в том, что закон (46) соблюдается только в случае независимости  $z_0$  от активности  $h$ . Это и требовалось доказать.

Независимость  $z_0$  от  $h$  является следствием квазистационарности рассмотренных активных систем. Отметим, что и нейтронопоглощающие системы с  $h < 1$  тоже могут быть квазистационарными. В таком случае и для них  $z_0$  не зависит от  $h$ .

Теперь обратимся к вопросу о пространственном распределении нейтронов в пустоте ( $x < 0, z < 0$ ).

Нейтронная плотность в пустоте  $n_{ex}(x)$  без труда находится через функцию  $n(x)$  (ее можно было бы обозначить  $n_{in}(x)$ ), определенную выше.

Из начала координат испустим два вектора: один, перпендикулярный плоскости раздела,  $\vec{r}$  в точку на-

блюдения  $x < 0$  и другой  $\vec{r}'$  (с проекцией  $x' \geq 0$  на ось ОХ) в произвольную текущую точку полупространства с веществом. Тогда искомая функция определяется по формуле

$$n_{ex}(x) = \frac{\beta}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}' n(x')}{S^2} \times \exp \left[ -\frac{\lambda}{V} S_0 - \left( \frac{\lambda}{V} + \alpha \right) (S - S_0) \right]. \quad (49)$$

Здесь  $S$  – модуль вектора  $\vec{S} = \vec{r}' - \vec{r}$ ,  $S_0$  и  $S - S_0$  – соответственно длины частей вектора  $\vec{S} = \vec{S}_0 + (\vec{S} - \vec{S}_0)$ , лежащих в левом ( $x < 0$ ) и правом ( $x \geq 0$ ) полупространствах.

В формуле (49) перейдем к интегрированию по  $\vec{S}$  ( $d\vec{S} = 2\pi S^2 \sin \vartheta d\vartheta$ ,  $\vartheta$  – угол между  $\vec{S}$  и осью ОХ), последовательно осуществим две замены ( $S = \frac{x' - x}{\eta}$ ,  $S_0 = -\frac{x}{\eta}$ ,  $\eta = \cos \vartheta$  и  $x' = \frac{z'}{\beta}$ ,  $x = \frac{z}{\beta}$ ) и учтем, что  $\lambda = (\beta - \alpha)V$ . После несложных преобразований получим

$$n_{ex}(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \int_0^\infty dz' n(z') \exp \left[ -\frac{f(z', z)}{\eta} \right] = \frac{1}{2} \int_0^\infty dz' n(z') \int_0^1 \frac{d\eta}{\eta} \exp \left[ -\frac{f(z', z)}{\eta} \right]. \quad (50)$$

Здесь использовано обозначение

$$f(z', z) = z' - \frac{h-1}{h} z = z' + \frac{h-1}{h} |z|. \quad (51)$$

Функцию  $n(x \geq 0)$  в выражении (50) можно рассматривать, как известный источник нейтронов, поступающих в вакуум из полупространства с веществом.

После очередной замены переменной интегрирования  $t = \frac{f(z', z)}{\eta}$  получим

$$n_{ex}(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dz' n(z') \int_{f(z', z)}^\infty \frac{dt}{t} e^{-t}. \quad (52)$$

Поскольку  $h \geq 1$ , то  $f(z', z) \geq 0$  и выражение (52) приобретает следующий вид:

$$n_{ex}(z) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty dz' n(z') Ei \left[ -f(z', z) \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dz' n(z') Ei \left[ -\left(z' + \frac{h-1}{h} |z|\right) \right]. \quad (53)$$

Видно, что в случае инертной среды за ее пределами нейтронная плотность не зависит от  $z$ :  $n_{ex}(h=1, z < 0) = \text{const}$ .

На границе  $z=0$  выражения (36) и (53) совпадают. Отсюда находится константа. Как и должно быть, при этом соблюдается условие сшивки решений для двух полупространств в точке  $z=0$

$$n_{ex}(0) = n(0) = 0,5773. \quad (54)$$

В отличие от стационарного случая ( $h=1, \lambda=0$ ) для активной среды ( $h>1, \lambda>0$ ), как отмечалось в подразделе 2.2, существует эффект  $\lambda$ -поглощения нейтронов. Благодаря этому в пределе  $z \rightarrow -\infty$  плотность нейтронов в вакууме  $n_{ex}(z)$  должна стремиться к нулю. Покажем это.

Ясно, что для  $h>1$  вне зависимости от конкретного значения  $z' \in [0, \infty)$  при достаточно больших  $|z|$  выполняется неравенство  $f \gg 1$ . Используя асимптотику интегральной экспоненты

$$Ei(-x) \approx -\frac{e^{-x}}{x} \left( 1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} \right), \quad x \gg 1, \quad (55)$$

преобразуем решение (53) для случая  $f \gg 1$

$$n_{ex}(z) \approx \frac{1}{2} \exp \left( -\frac{h-1}{h} |z| \right) \int_0^{\infty} \frac{dz' e^{-z'} n(z')}{\left( z' + \frac{h-1}{h} |z| \right)}. \quad (56)$$

Таким образом, в пустоте на больших расстояниях  $|z| \gg \frac{h}{h-1}$  от активного вещества плотность нейтронов мала и  $\lim_{z \rightarrow -\infty} n_{ex}(z) = 0$ .

### 3.3. Квазистационарные решения задачи Милна в случае нейтронопоглощающей среды

В разделе 1 отмечено, что при  $h < 1$  системы с бесконечной оптической толщиной стационарны, если в них действует постоянный (не зависящий от времени) источник нейтронов. Стационарные решения задачи Милна при  $h < 1$  для некоторых типов постоянных источников приведены в работе [1]. Эти решения были получены из неоднородного стационарного кинетического уравнения либо соответствующего уравнения Пайерлса. При решении стационарных однородных уравнений (25) и (28) предполагалось (см. [1, 2]), что на бесконечно большом расстоянии от границы задан поток нейтронов, который тоже можно расценивать в качестве постоянного источника. Поэтому стационарное решение (30) для поглотителя нейтронов физически обосновано.

Если же внешний источник отсутствует, то в поглощающей среде количество нейтронов и их плотность не могут оставаться постоянными, а должны убывать со временем. При  $h < 1$  существует не противоречащее физическому смыслу квазистационарное решение задачи Милна без источника  $\psi(z, \mu)$  и  $n(z)$ ,  $z = h\alpha x$  и оно внутри среды точно такое же, как и при  $h \geq 1$  (см. подраздел 3.2). Действительно, из теоремы раздела 2 следует, что квазистационарные (стационарные при  $h=1$ ) решения  $\psi(z, \mu)$ ,  $n(z)$  внутри полубесконечной среды не зависят от  $h$ . Таким образом,  $n(z, h < 1) = n(z, h = 1)$ , где  $n(z, h = 1)$  – решение [4].

В пустоте характер поведения СФ для  $h < 1$ ,  $h = 1$  и  $h \geq 1$  различен, т. е. при  $z < 0$  функции  $\psi_{ex} = \psi_{ex}(z, \mu)$ ,  $n_{ex} = n_{ex}(z)$  параметрически зависят от  $h$ .

Определим плотность нейтронов  $n_{ex}(z, h < 1)$ , используя формулу (52).

При  $h < 1$  функцию (51) можно записать в следующем виде:

$$f(z', z) = z' - \frac{1-h}{h} |z|.$$

Если  $z' < \frac{1-h}{h} |z|$ , то функция  $f(z', z)$  отрицательна, а при  $z' > \frac{1-h}{h} |z|$  – положительна. Учитывая это, из (52) получаем искомый ответ, из которого следует, что нейтронная плотность при удалении от вещества возрастает

$$n_{ex}(z) = \frac{1}{2} \times \left\{ -\int_0^{\gamma} dz' n(z') Ei^*(z' - \gamma) - \int_{\gamma}^{\infty} dz' n(z') Ei[-(z' - \gamma)] \right\}; \quad (57)$$

$$\gamma(z) = \frac{1-h}{h} |z|, \quad h < 1, \quad z < 0, \quad \gamma > 0. \quad (58)$$

Здесь  $Ei[-(z' - \gamma)]$  – интегральная экспонента;

$$Ei^*(x) = -VP \int_x^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-t} = VP \int_{-\infty}^{|x|} \frac{du}{u} e^u, \quad x < 0. \quad (59)$$

В формуле (59) интегралы понимаются в смысле их главных значений. При  $|z' - \gamma| = \gamma - z' \gg 1$  справедлива следующая асимптотика:

$$Ei^*(z' - \gamma) = \frac{\exp(|z' - \gamma|)}{|z' - \gamma|} \left\{ 1 + \frac{1!}{|z' - \gamma|} + \frac{2!}{|z' - \gamma|^2} + \dots \right\}. \quad (60)$$

Очевидно, что  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} n_{ex}(z) = \infty$ .

Неограниченное возрастание нейтронной плотности с ростом  $|z|$  на больших расстояниях от границы



( $|z| \gg \frac{h}{1-h}$ ) связано с действием в пустоте  $\lambda$ -источника нейтронов, возникающего в случае  $h < 1$ .

Нейтронное поле вне среды формируется вылетевшими из нее частицами. За время  $\Delta t$  прилета нейтронов в точку наблюдения  $z < 0$  количество нейтронов в среде, если  $\Delta t$  велико, сильно уменьшится в  $e^{|\lambda|\Delta t}$  раз, а создаваемое в точке  $z$  нейтронное поле "чувствует" рано вышедшее из среды большое количество нейтронов. Поэтому при удалении от вещества равновесная плотность нейтронов в вакууме возрастает.

В случае размножающей среды картина формирования равновесной функции в вакууме противоположна: пока вылетевшие из активной среды нейтроны удаляются от границы  $z = 0$ , в области  $z > 0$  за счет цепных реакций деления ядер нейтронная плотность нарастает со временем по экспоненциальному закону. Таким образом, очевидно, что при  $z < 0$  функция  $n_{ex}(z, h > 1)$  убывает с ростом  $|z|$ .

### 3.4. Некоторые замечания

Следует отметить, что задача Милна является абстрактной. Действительно, все обсуждавшиеся выше ее решения приводят к расходящейся на бесконечности нейтронной плотности:  $n(z, h) \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty$ .

Очевидно, что исходное кинетическое уравнение, на основе которого были получены решения, такого положения дел не допускает. Ведь оно предполагает малость нейтронной плотности по сравнению с плотностью ядер ( $n \ll n_j$ ) и постоянство параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . При неограниченном возрастании функции  $n(z, h)$  параметры  $\alpha$  и  $\beta$  изменятся за счет выгорания активных ядер, а из-за необходимости учета нейтрон-нейтронных взаимодействий кинетическое уравнение превратится в нелинейное. Тем не менее решение абстрактной задачи Милна позволило ответить на практические вопросы о поведении функции распределения вблизи границы и о величине необходимой для диффузионной теории экстраполированной длины  $z_0$ . Асимптотика же нейтронной плотности  $n(z \gg 1, h)$  сама по себе никакого практического интереса не представляет.

Различие между истинной и асимптотической плотностями нейтронов очень быстро исчезает при удалении от границы вглубь вещества. Поэтому для весьма точного определения параметра  $z_0$  достаточно знать решение задачи Милна  $n(z, h)$  около границы в сравнительно узком диапазоне с шириной в один – несколько пробегов нейтронов.

### 3.5. Основные выводы

В случае инертной среды ( $h = 1$ ) справедливо стационарное решение Плачека и Зейделя [4].

В размножающем нейтроны веществе ( $h > 1$ ) физических стационарных решений нет, а правильным является полученное выше квазистационарное решение, которое

не зависит от наличия или отсутствия внешнего источника. Оно позволило откорректировать граничное условие, знание которого необходимо при решении соответствующих (для  $h > 1$ ) однобластных диффузионных задач.

Если говорить о поглощающей среде ( $h < 1$ ), то имеющиеся решения стационарной задачи Милна с источником\* не противоречат физическому смыслу. Решение квазистационарной задачи Милна без источника тоже соответствует физическому смыслу.

Квазистационарные решения, например, для нейтронной плотности внутри среды имеют следующий вид:  $n(t, z) = \exp[-(h-1)\alpha V t] n(z)$ , где величина  $h$  произвольна. При этом пространственная часть  $n(z)$  не зависит от  $h$  и в точности совпадает с решением работы [4] для инертной среды. Таким образом, стационарное решение Плачека и Зейделя является частным случаем ( $h = 1$ ) квазистационарного решения.

В стационарных задачах Милна имеется сильная параметрическая зависимость нейтронной плотности от активности внутри среды, а в вакууме нейтронная плотность  $n_{ex}$  постоянна. В отличие от последнего квазистационарное решение  $n_{ex}(t, z) = \exp[-(h-1)\alpha V t] n_{ex}(z)$  приводит к существенной параметрической зависимости функции  $n_{ex}(z)$  от активности среды  $h$ .

## 4. О численном решении задачи Милна

Полученные выше новые результаты были подтверждены с помощью численного решения задачи Милна по математической методике типа [9, 10]. Все численные расчеты были выполнены С. В. Мжачих и Н. В. Колобяниной.

С. В. Мжачих принимал также непосредственное участие в физико-математической постановке решенных задач.

Чтобы смоделировать полубесконечную геометрию задачи Милна рассматривались конечные по размерам ( $0 \leq x \leq x_{\max}$ ) плоские системы с очень большой оптической толщиной  $p = \alpha x_{\max} \gg 1$ . Решалось нестационарное кинетическое уравнение,

$$\text{где } n(t, x) = \int_{-1}^1 d\mu \psi(t, x, \mu) \text{ – нейтронная плотность,}$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \psi(t, x, \mu)}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi(t, x, \mu)}{\partial x} + \alpha \psi(t, x, \mu) = \frac{h\alpha}{2} n(t, x) \quad (61)$$

с граничными условиями

$$\psi(t, x = 0, \mu > 0) = 0; \quad \psi(t, x = x_{\max}; \mu < 0) = 0 \quad (62)$$

и с начальным условием

\* Эти решения были получены для нескольких типов источников (см. [1]), в качестве одного из них можно рассматривать задаваемый в точке  $z = +\infty$  внешний поток нейтронов.

$\psi(t=0, 0 \leq x \leq x_1, \mu) = \psi_0$ ;  $n(t=0, 0 \leq x \leq x_1) = n_0$  (63) (оно соответствует локализованному в области изменения аргумента  $x \in [0, x_1 \leq x_{\max}]$  изотропному и одно-родному начальному распределению нейтронов в пространстве);  $\psi_0$  и  $n_0$  – константы, а вне указанной в соотношении (63) области  $\psi_0$  и  $n_0$  равны нулю.

В расчетах варьировались активность вещества  $h$  и обратный пробег нейтронов  $\alpha$ , а также размеры  $x_{\max}$  и  $x_1$ .

Остановимся на некоторых результатах численных расчетов.

В случае инертной среды ( $h=1$ ) решение поставленной нестационарной задачи с течением времени вышло на стационарное, а для размножающей ( $h>1$ ) и поглощающей ( $h<1$ ) нейтроны сред первоначально нестационарные решения превратились в квазистационарные

$$\psi(t, x, \mu) = e^{\lambda' t} \psi(x, \mu), \quad n(t, x) = e^{\lambda' t} n(x). \quad (64)$$

При этом расчетные значения  $\lambda' = (h-1)\alpha V - \Delta\lambda$  ( $\Delta\lambda > 0$ ) оказались близкими к предельным величинам  $\lambda(p=\infty) = (h-1)\alpha V$ .

Как и ожидалось, уравнение (61) с граничным и начальным условиями (62), (63) при достаточно больших  $t$  привело к единой для всех  $h$  равновесной зависимости нейтронной плотности от безразмерной координаты точки наблюдения  $z = h\alpha x \geq 0$ :

$$n(z, h \neq 1) = \frac{n(t, z, h \neq 1)}{e^{\lambda' t}} = n(z, h = 1). \quad (65)$$

Полученные в численных расчетах функции  $n(z, h)$  с высокой степенью точности совпали с затабулированным в области  $0 \leq z \leq 4$  решением задачи Милна  $n(z, h = 1)$  (см. [5]).

Оказалось, также, что расчетное равновесное (при больших  $t$ ) угловое распределение нейтронов  $\phi(\eta)$  на границе  $z = h\alpha x = 0$ , не зависит от активности  $h$  и согласуется с табличными данными работы [6] для инертной среды.

Еще один расчетный тест подтвердил факт независимости полного векторного потока внутри среды от  $z = h\alpha x$  после выхода кинетики нейтронов на квазистационарный (при  $\lambda = 0$  – стационарный) режим, в случае которого  $\text{div } \vec{j} = \frac{\partial j}{\partial z} = 0$ .

В настоящее время разработана теория подобия решений нестационарного односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах. В связи с этим вопрос об установлении квазистационарного (при  $h=1$  стационарного) равновесного пространственного распределения  $n(x, h)$  интересно рассмотреть более подробно. Для этого обратимся к трем решенным численно задачам. В них при одинаковой геометрии плоской системы ( $x_{\max} = 100$  см,  $x_1 = 4$  см) параметр  $h$

принимался равным  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = 2$ ,  $h_3 = 0,95$ , а параметры  $\alpha_i$  выбирались из условия

$$h_i \alpha_i = 1 \text{ (1/см)}. \quad (66)$$

При этом численные значения безразмерного ( $z = h\alpha x$ ) и размерного ( $x$ ) аргументов совпадали.

Расчеты показали, что, выходя при достаточно больших временах  $t$  на единый для всех  $h$  стационарный предельный закон, функция  $F(t, x) = \frac{n(t, x)}{n(t, x=0)}$  на

начальной нестационарной стадии существенным образом параметрически зависит от активности среды  $h$ .

Можно осуществить переход в исходном уравнении (61) к безразмерным переменным (в плоском случае это  $z = h\alpha x$  и  $\tau = h\alpha V t$ ) и к некоторой новой функции распределения  $f(\tau, z, \mu)$ .

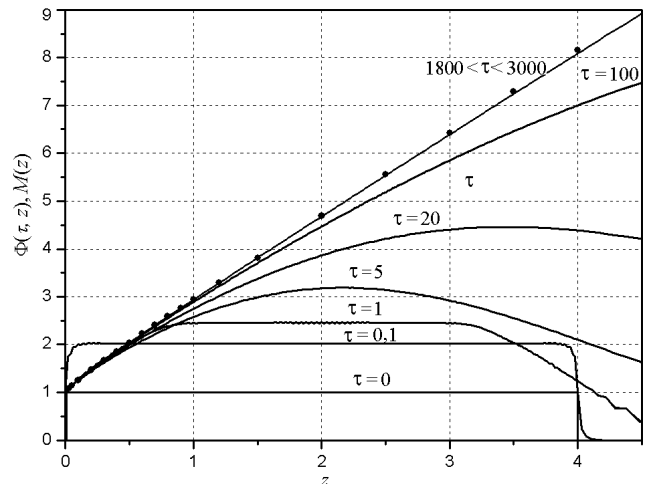
Кинетическое уравнение для  $f(t, x, \mu)$  оказалось инвариантным относительно преобразований подобия

$$x \rightarrow x' = \frac{\beta}{\beta'} x = \frac{h\alpha}{h'\alpha'} x, \quad t \rightarrow t' = \frac{h\alpha}{h'\alpha'} t. \quad (67)$$

Вследствие этого в  $z$ -пространстве возникли некоторые универсальные (независящие от  $h$  и  $\alpha$ , т. е. от ядерно-физических характеристик составляющих систему веществ) функции, одна из которых определена формулой

$$\Phi(\tau, z) = \frac{n(\tau, z)}{n(\tau, z=0)}. \quad (68)$$

Зависимость (68), полученная в численных расчетах, представлена графиками рисунка (см. сплошные кривые). На этом же рисунке точками изображе-



Зависимости  $\Phi(\tau, z)$ , полученные в численных расчетах для  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = 2$ ,  $h_3 = 0,95$ , и решение  $M(z)$  [4] задачи Милна для  $h = 1$  (точки)

на стационарная функция  $M(z) = \frac{n(z, h = 1)}{n(z = 0, h = 1)}$ . Здесь  $n(z, h = 1)$  – решение Плачека и Зейделя [4], затабулированное Марком в работе [5].

Из рисунка вытекают следующие выводы:

– так как графики функции  $\Phi(\tau, z)$  в каждый конкретный момент времени  $\tau$  при всех значениях  $h$  слились в единые, то эта функция не зависит от  $h$  при любых  $\tau$ ;

– при  $\tau \geq 2000$  вне зависимости от  $h$  функция  $\Phi(\tau, z)$ , выйдя на равновесный квазистационарный (при  $h=1$  стационарный) предел, совпала со стационарным решением [4, 5] задачи Милна для инертной среды.

Полученные в этом разделе результаты позволяют утверждать, что, располагая точными решениями задачи Милна и точными аналитическими соотношениями теории подобия нестационарных однородных систем, можно осуществить верификацию математических методов численного решения нестационарного кинетического уравнения для нейтронов.

### Список литературы

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.
2. Романов Ю. А. Критические параметры реакторных систем. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для реше-

ния диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод). М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.

3. Le Caine J. // *Canad. J. Res.* 1950. Vol. 28. P. 242.
4. Placzek G., Seidel W. // *Phys. Rev.* 1947. Vol. 72. P. 550.
5. Mark C. // *Phys. Rev.* 1947. Vol. 72. P. 558.
6. Placzek G. // *Phys. Rev.* 1947. Vol. 72. P. 556.
7. Feynman R. P. // *Report LA-608, Series B.*, August 15, 1946.
8. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // *ВАНТ. Сер.: Теоретическая и прикладная физика.* 2008. Вып. 1. С. 56–64.
9. Разин А. Н., Долголева Г. В., Мжачих С. В., Рожков А. А., Шапоренко Е. В., Юдинцев В. Ф. Развитие методик и программ расчета турбулентных течений с использованием модели В.В. Никифорова // *ВАНТ. Сер.: Теоретическая и прикладная физика.* 2007. Вып. 1. С. 121–133.
10. Мжачих С. В., Грошев Е. В., Юдинцев В. Ф. О некоторых свойствах  $\tilde{D}S_n^y$ -схем для сферически-симметричного уравнения переноса // *ВАНТ. Сер.: Математическое моделирование физических процессов.* 2000. Вып. 2. С. 21–31.

Статья поступила в редакцию 03.06.2008.