

ДИРАКОВСКАЯ ЧАСТИЦА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

М. В. Горбатенко, Т. М. Горбатенко

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Рассматривается движение дираковской частицы в гравитационном поле, описываемом решением Керра. Доказывается, что эволюция волновой функции определяется эрмитовым гамильтонианом, если используется сопутствующая система отсчета.

1. Введение

В последнее время появился ряд публикаций по вопросам, связанным с описанием движения дираковских частиц в гравитационных полях (см., например, [1–6]). Общая логика таких работ сводится к записи уравнения Дирака в форме уравнения Шредингера, доказательстве эрмитовости возникающего при этом оператора Гамильтона и анализе физических эффектов, вытекающих из полученного гамильтониана.

Такая логика представляется вполне естественной, однако на пути ее реализации имеется одно принципиальное препятствие. Препятствие обусловлено свободой выбора системы реперных векторов, используемых в уравнении Дирака и влияющих на физические эффекты. Поясним подробнее суть дела.

Уравнение Дирака для биспинора ψ имеет, как известно, следующий вид:

$$g^{\alpha\beta}\gamma_\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\beta} + \Phi_\beta\psi\right) - \frac{mc}{\hbar}\psi = 0. \quad (1)$$

Входящие в выражение (1) величины m , c , $\hbar$ имеют обычный смысл: масса, скорость света и постоянная Планка соответственно. Греческие индексы обозначают векторные мировые индексы, которые принимают значения 0, 1, 2, 3. Принятая в рассмотрении сигнатура $(-+++)$.

Для пояснения смысла входящей в уравнение (1) величины Φ_α необходимо ввести систему реперных векторов $H_\underline{\nu}^\alpha$, определяемых соотношением

$$H_\underline{\nu}^\alpha H_\underline{\mu}^\beta g_{\alpha\beta} = \eta_{\underline{\mu}\underline{\nu}}, \quad (2)$$

где $\eta_{\underline{\mu}\underline{\nu}}$ – метрический тензор в касательном плоском пространстве-времени. В последующем полагается, что

$\eta_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Матрицы $\gamma_\underline{\nu} = H_\underline{\nu}^\alpha \gamma_\alpha$ будем называть реперными матрицами Дирака. Они могут быть выбраны постоянными по всему пространству. Например, в стандартном представлении $\gamma_0 = -i\sigma_3$; $\gamma_k = \rho_2 \sigma_k$. Латинские индексы принимают значения 1, 2, 3.

Величину Φ_α будем называть биспинорной связностью, она выражается через так называемые коэффициенты вращения Риччи $\Phi_{\alpha\ \underline{\mu}\underline{\nu}}$

$$\Phi_{\alpha\ \underline{\mu}\underline{\nu}} \equiv H_\underline{\mu}^\sigma H_{\underline{\nu}\sigma;\alpha} \quad (3)$$

следующим образом:

$$\Phi_\alpha = \frac{1}{4} \Phi_{\alpha\ \underline{\mu}\underline{\nu}} S^{\underline{\mu}\underline{\nu}}. \quad (4)$$

Здесь

$$H_{\underline{\nu}\sigma;\alpha} = H_{\underline{\nu}\sigma,\alpha} - \left(\begin{matrix} \varepsilon \\ \alpha\sigma \end{matrix}\right) H_{\underline{\nu}\varepsilon}, \quad S^{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \frac{1}{2}(\gamma^\underline{\mu}\gamma^\underline{\nu} - \gamma^\underline{\nu}\gamma^\underline{\mu}).$$

Реперы $H_\underline{\nu}^\alpha$ определены с точностью до преобразований Лоренца, зависящих от координат. Ничем другим выбор конкретного вида реперов не ограничен. Каждому набору реперов соответствуют ассоциированные с ними коэффициенты $\Phi_{\alpha\ \underline{\mu}\underline{\nu}}$.

Проблема свободы выбора системы $H_\underline{\nu}^\alpha$ различными авторами решается по-разному. Наиболее часто эта система выбирается с учетом свойств используемых мировых координат и метрического тензора. Допустим, гравитационное поле описывается рассмотренной в работе [1] метрикой вида

$$ds^2 = -V^2 c^2 dt^2 + W^2 dx^m dx^n \delta_{mn}. \quad (5)$$

Здесь V, W – две произвольные функции от пространственных координат. Тогда в качестве системы реперов может быть использована система

$$H_0^\alpha = \frac{1}{V} \delta_0^\alpha, \quad H_k^\alpha = \frac{1}{W} \delta_k^\alpha. \quad (6)$$

В работе [6] приведен перечень многих других систем реперов, используемых различными авторами в различных задачах.

В самодостаточной теории должен содержаться некий принцип, устраняющий произвол в выборе реперов. Пока во всех опубликованных версиях теории движения дираковских частиц в гравитационных полях этот вопрос не нашел приемлемого однозначного решения. Цель данной работы состоит в формулировке такого принципа.

Отправной точкой предлагаемого нами принципа является подход, используемый для описания динамики спина классических спиновых частиц в гравитационном поле. Этот подход известен достаточно давно (см., например, [7–9]) и состоит в использовании так называемой системы сопутствующих реперов. Под сопутствующим репером будем понимать такой репер, в котором спиновый вектор частицы имеет только пространственные компоненты, а временная компонента спина равна нулю. Система сопутствующих реперов – это совокупность реперов, являющихся сопутствующими в каждой точке мировой линии частицы.

В последнее время этот подход был использован для предсказания и объяснения эксперимента Gravity Probe B с гироскопами на борту космического корабля, обращавшегося вокруг Земли (см. [10]). В частности, в эксперименте была зарегистрирована спин-орбитальная прецессия гироскопов, совпадающая с предсказаниями теории с точностью лучше 1 %. Тем самым подтверждена жизнеспособность использованного подхода.

Дираковская частица также обладает спином, и поэтому использование сопутствующих реперов для описания динамики ее спина представляется вполне уместным. Использование сопутствующих реперов и предлагается нами как тот единственный способ описания динамики частицы, который приводит к результатам, регистрируемым в экспериментах со спиновыми частицами.

Использование сопутствующих реперов демонстрируется в данной работе на примере гравитационного поля решения Керра (РК). Насколько мы понимаем, наиболее существенным результатом нашего рассмотрения является построение гамильтониана, представляющего собой эрмитов оператор. Результаты обсуждаются и кратко сравниваются с результатами других работ.

2. Уравнение Дирака в реперных обозначениях

При любом выборе системы реперов справедливо соотношение

$$g^{\alpha\beta} = -H_0^\alpha H_0^\beta + H_k^\alpha H_k^\beta. \quad (7)$$

Тензоры

$$-H_0^\alpha H_0^\beta, \quad H_k^\alpha H_k^\beta \quad (8)$$

составляют полную систему проекторов. Запишем уравнение Дирака (1), заменив в уравнении (1) метрический тензор на сумму двух проекторов (8).

$$-H_0^\alpha H_0^\beta \gamma_\alpha \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^\beta} + \Phi_\beta \Psi \right) + H_k^\alpha H_k^\beta \gamma_\alpha \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^\beta} + \Phi_\beta \Psi \right) - \frac{mc}{\hbar} \Psi = 0. \quad (9)$$

Поскольку $H_\mu^\alpha \gamma_\alpha = \gamma_\mu$, то уравнение (9) эквивалентно следующему:

$$-\gamma_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^0} + \Phi_0 \Psi \right) + \gamma_k \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^k} + \Phi_k \Psi \right) - \frac{mc}{\hbar} \Psi = 0. \quad (10)$$

Здесь введены обозначения

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \equiv H_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}; \quad \frac{\partial}{\partial x^k} \equiv H_k^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}; \quad (11)$$

$$\Phi_0 \equiv H_0^\alpha \Phi_\alpha; \quad \Phi_k \equiv H_k^\alpha \Phi_\alpha.$$

Умножим уравнение (10) слева на $-i\hbar c \gamma_0$ и воспользуемся тождеством $\gamma_0 \gamma_0 = -1$

$$-i\hbar c \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} - i\hbar c \Phi_0 \Psi - i\hbar c \gamma_0 \gamma_k \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} - i\hbar c \gamma_0 \gamma_k \Phi_k \Psi + imc^2 \gamma_0 \Psi = 0. \quad (12)$$

В другой форме это уравнение записывается как

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{t}} = \hat{H} \Psi, \quad (13)$$

где $d\tilde{t} = dx^0/c$, $\hat{H}$ имеет смысл оператора Гамильтона,

$$\hat{H} = imc^2 \gamma_0 + c \gamma_0 \gamma_k \hat{p}_k - i\hbar c \Phi_0 - i\hbar c \gamma_0 \gamma_k \Phi_k, \quad (14)$$

а входящий в $\hat{H}$ оператор $\hat{p}_k$ определен соотношением

$$\hat{p}_k = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (15)$$

Уравнение (13) с оператором $\hat{H}$ в виде (14) будем называть уравнением Дирака в реперных обозначениях. Как видим, конструкция построенного гамильтониана полностью "привязана" к используемой при рассмотрении системе реперов.

3. Реперы, связанные с полем РК

Разложения компонент метрики РК, записанного в гармонических координатах, получены в работе [11]. В первом неисчезающем приближении имеем

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}; \quad g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}; \quad (16)$$

$$h_{00} = 2 \frac{M}{R}; \quad h_{0k} = 2 \frac{M (J_{kl} R_l)}{R^3}; \quad h_{mn} = 2 \frac{M}{R} \delta_{mn}. \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= -1 + 2\frac{M}{R}; & g_{0k} &= 2\frac{M(J_{kl}R_l)}{R^3}; & g_{mn} &= \delta_{mn} + 2\frac{M}{R}\delta_{mn}; \\ g^{00} &= -1 - 2\frac{M}{R}; & g^{0k} &= 2\frac{M(J_{kl}R_l)}{R^3}; & g^{mn} &= \delta_{mn} - 2\frac{M}{R}\delta_{mn}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Соответствующие символы Кристоффеля имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 00 \end{pmatrix} &= 0; & \begin{pmatrix} 0 \\ 0k \end{pmatrix} &= \frac{MR_k}{R^3}; & \begin{pmatrix} 0 \\ mn \end{pmatrix} &= 3\frac{M[(J_{ml}R_l)R_n + (J_{nl}R_l)R_m]}{R^5}; \\ \begin{pmatrix} k \\ 00 \end{pmatrix} &= \frac{MR_k}{R^3}; & \begin{pmatrix} m \\ 0n \end{pmatrix} &= 2\frac{MJ_{mn}}{R^3} - 3\frac{M[(J_{ml}R_l)R_n - (J_{nl}R_l)R_m]}{R^5}; \\ \begin{pmatrix} k \\ mn \end{pmatrix} &= -\frac{M}{R^3}[\delta_{km}R_n + \delta_{kn}R_m - \delta_{mn}R_k]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Уравнениями на нахождение реперных векторов являются соотношения (2). В данной работе мы будем пользоваться решением этих уравнений в так называемой симметричной калибровке. Это решение имеет вид

$$H_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}. \quad (20)$$

При $h_{\alpha\beta} = 0$ так введенные реперы совпадают с реперами фонового пространства; а при $h_{\alpha\beta} \neq 0$ представляют собой симметричное решение уравнения

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} = H_{\alpha}^{\mu}\eta_{\mu\nu}H_{\beta}^{\nu}.$$

В первом приближении по компонентам $h_{\alpha\beta}$ исчезает различие между мировыми и реперными индексами, поэтому подчеркивание индексов будем опускать, если это не ведет к недоразумениям. Пользуясь этими правилами, находим компоненты реперов с нижними индексами

$$\begin{aligned} H_{00} &= -\left[1 - \frac{M}{R}\right]; & H_{0k} &= \frac{M(J_{kl}R_l)}{R^3}; \\ H_{k0} &= \frac{M(J_{kl}R_l)}{R^3}; & H_{pk} &= \delta_{pk}\left[1 + \frac{M}{R}\right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Реперы с индексами иного типа получаются из системы (21) путем поднятия соответствующих индексов. Напомним, что индексы с крышкой опускаются и поднимаются с помощью тензоров $\eta_{\alpha\beta}$, $\eta^{\alpha\beta}$, а мировые индексы – с помощью тензоров $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$.

4. Сопутствующие реперы в поле РК

Мы исходим из предположения, что для дираковской частицы в гравитационном поле может быть вве-

дено понятие траектории движения и что эта траектория описывается уравнением Матиссона – Папапетру [12, 13], т. е. уравнением:

$$\frac{Du^{\alpha}}{D\tau} = -\frac{1}{2}R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}u^{\beta}u^{\mu}s^{\nu}, \quad (22)$$

где $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ – тензор кривизны, дуальный к тензору Римана, $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \equiv E^{\alpha}_{\beta\tau\rho}R^{\tau\rho}_{\mu\nu}$. Такое предположение заведомо выполняется, если длина волны де Бройля для дираковской частицы много меньше характерной длины, на которой изменяется гравитационное поле.

В поле РК правая часть в соотношении (22) имеет тот же порядок малости, что и левая, следовательно движение частицы не сводится к движению по геодезической. Требование совпадения

$$\tilde{H}_{\alpha}^{\alpha} \equiv u^{\alpha} \quad (23)$$

(сопутствующий репер здесь и далее помечаем тильдой сверху) означает, что сопутствующая система реперов является неинерциальной.

Неинерциальность системы $\tilde{H}_{\alpha}^{\mu}$ приводит к тому, что в каждой точке мировой линии система векторов $\tilde{H}_{\alpha}^{\mu}$ отличается от стационарной системы векторов H_{α}^{μ} малым преобразованием Лоренца типа буста (см. [8, 9]).

Приводим заимствованную из работы [9] (задача 11.11) совокупность величин $\tilde{H}_{\alpha\beta}$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{H}_{00} &= \left[-1 + \frac{M}{R} - \frac{1}{2}(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)\right]; & \tilde{H}_{0k} &= \dot{\eta}_k \left[1 + 3\frac{M}{R} + \frac{1}{2}(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)\right] + 2\frac{M(J_{kl}R_l)}{R^3}; \\ \tilde{H}_{m0} &= -\dot{\eta}_k \left[1 + \frac{M}{R} + \frac{1}{2}(\dot{\eta}_l \dot{\eta}_l)\right]; & \tilde{H}_{mk} &= \delta_{kp} \left[1 + \frac{M}{R}\right] + \frac{1}{2}\dot{\eta}_k \dot{\eta}_p. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

По формуле (3) находим

$$\tilde{\Phi}_{0\ 0\underline{k}} = \frac{M(R_l \dot{\eta}_l)}{R^3} \dot{\eta}_k - 2 \frac{M(J_{kp} \dot{\eta}_p)}{R^3} + 3 \frac{M[(J_{kl} R_l)(R_l \dot{\eta}_l) - (\dot{\eta}_a J_{ab} R_b) R_k]}{R^5}, \quad (25)$$

$$\tilde{\Phi}_{0\ \underline{mn}} = + \frac{1}{2} \frac{M[R_m \dot{\eta}_n - R_n \dot{\eta}_m]}{R^3} + 2 \frac{MJ_{mn}}{R^3} - 3 \frac{M[(J_{ml} R_l) R_n - (J_{nl} R_l) R_m]}{R^5}, \quad (26)$$

$$\tilde{\Phi}_{m\ 0\underline{k}} = \frac{M(R_l \dot{\eta}_l)}{R^3} \delta_{km} + 2 \frac{M}{R^3} \dot{\eta}_k R_m - \frac{M}{R^3} \dot{\eta}_m R_k - 2 \frac{MJ_{km}}{R^3} + 3 \frac{M[(J_{kl} R_l) R_m - (J_{ml} R_l) R_k]}{R^5}, \quad (27)$$

$$\tilde{\Phi}_{p\ \underline{mn}} = \frac{M[R_m \delta_{pn} - R_n \delta_{mp}]}{R^3}. \quad (28)$$

Биспинорные связности $\tilde{\Phi}_{\underline{0}}$, $\tilde{\Phi}_{\underline{k}}$ находятся с использованием соотношений (4), (11)

$$\tilde{\Phi}_{\underline{0}} = \frac{1}{4} \tilde{H}_{\underline{0}}^0 [2\tilde{\Phi}_{0\ 0\underline{k}} S^{0\underline{k}} + \tilde{\Phi}_{0\ \underline{ab}} S^{\underline{ab}}] + \frac{1}{4} \tilde{H}_{\underline{0}}^p [2\tilde{\Phi}_{p\ 0\underline{k}} S^{0\underline{k}} + \tilde{\Phi}_{p\ \underline{ab}} S^{\underline{ab}}]; \quad (29)$$

$$\tilde{\Phi}_{\underline{m}} = \frac{1}{4} \tilde{H}_{\underline{m}}^0 [2\tilde{\Phi}_{0\ 0\underline{k}} S^{0\underline{k}} + \tilde{\Phi}_{0\ \underline{ab}} S^{\underline{ab}}] + \frac{1}{4} \tilde{H}_{\underline{m}}^p [2\tilde{\Phi}_{p\ 0\underline{k}} S^{0\underline{k}} + \tilde{\Phi}_{p\ \underline{ab}} S^{\underline{ab}}]. \quad (30)$$

Подставим в формулы для $\tilde{\Phi}_{\underline{0}}$, $\tilde{\Phi}_{\underline{k}}$ выражения для реперов и коэффициентов вращения Риччи. Оставляя в соотношениях (29), (30) главные члены разложения, получаем

$$\tilde{\Phi}_{\underline{0}} = \frac{1}{4} (\tilde{H}_{\underline{0}}^0 \tilde{\Phi}_{0\ \underline{ab}} + \tilde{H}_{\underline{0}}^p \tilde{\Phi}_{p\ \underline{ab}}) S^{\underline{ab}}; \quad (31)$$

$$\tilde{\Phi}_{\underline{m}} = \frac{1}{4} \tilde{H}_{\underline{m}}^p \tilde{\Phi}_{p\ \underline{ab}} S^{\underline{ab}} + \frac{1}{2} \tilde{H}_{\underline{m}}^p \tilde{\Phi}_{p\ 0\underline{k}} S^{0\underline{k}}. \quad (32)$$

В поле РК соотношения (31), (32) принимают следующий вид:

$$\tilde{\Phi}_{\underline{0}} = \frac{1}{4} \tilde{\Phi}_{0\ \underline{ab}} S^{\underline{ab}} + \frac{1}{4} \dot{\eta}_p \tilde{\Phi}_{p\ \underline{ab}} S^{\underline{ab}} = \frac{3}{8} \frac{M[R_a \dot{\eta}_b - R_b \dot{\eta}_a]}{R^3} S^{\underline{ab}} + \frac{1}{2} \frac{MJ_{ab}}{R^3} S^{\underline{ab}} - \frac{3}{4} \frac{M[(J_{al} R_l) R_b - (J_{bl} R_l) R_a]}{R^5} S^{\underline{ab}}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\underline{m}} = \frac{1}{4} \tilde{\Phi}_{m\ \underline{ab}} S^{\underline{ab}} + \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_{m\ 0\underline{k}} S^{0\underline{k}} = \frac{1}{4} \frac{M[R_a \delta_{mb} - R_b \delta_{ma}]}{R^3} S^{\underline{ab}} + \frac{1}{2} \left(\frac{M(R_l \dot{\eta}_l)}{R^3} \delta_{km} + 2 \frac{M}{R^3} \dot{\eta}_k R_m - \frac{M}{R^3} \dot{\eta}_m R_k \right) S^{0\underline{k}} + \\ + \frac{1}{2} \left(-2 \frac{MJ_{km}}{R^3} + 3 \frac{M[(J_{kl} R_l) R_m - (J_{ml} R_l) R_k]}{R^5} \right) S^{0\underline{k}}. \end{aligned} \quad (34)$$

5. Гамильтониан

Подставляя матричные связности (33), (34) в гамильтониан (14), получаем

$$\begin{aligned} \hat{H} = imc^2 \gamma_{\underline{0}} + c \gamma_{\underline{0}} \gamma_{\underline{k}} \hat{p}_{\underline{k}} + i\hbar c \frac{MR_k}{R^3} \gamma_{\underline{0}} \gamma_{\underline{k}} + 2i\hbar c \frac{M(R_l \dot{\eta}_l)}{R^3} + \frac{3}{8} i\hbar c \frac{M[R_a \dot{\eta}_b - R_b \dot{\eta}_a]}{R^3} S^{\underline{ab}} + \\ + \frac{1}{2} i\hbar c \left\{ \frac{MJ_{ab}}{R^3} - \frac{3}{2} \frac{M[(J_{al} R_l) R_b - (J_{bl} R_l) R_a]}{R^5} \right\} S^{\underline{ab}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Уравнение Дирака (13) с гамильтонианом (35) запишем в иной форме

$$i\hbar c \left(\frac{\partial}{\partial x^{\hat{0}}} - 2 \frac{M(R_l \dot{\eta}_l)}{R^3} \right) \psi = \hat{H} \psi, \quad (36)$$

где под оператором $\hat{H}$ понимается оператор

$$\begin{aligned} \hat{H} = & imc^2 \gamma_0 - i\hbar c \gamma_0 \gamma_k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{MR_k}{R^3} \right) + \frac{3}{8} i\hbar c \frac{M [R_a \dot{n}_b - R_b \dot{n}_a]}{R^3} S^{ab} + \\ & + \frac{1}{2} i\hbar c \left\{ \frac{MJ_{ab}}{R^3} - \frac{3}{2} \frac{M [(J_{al} R_l) R_b - (J_{bl} R_l) R_a]}{R^5} \right\} S^{ab}. \end{aligned} \quad (37)$$

6. Скалярное произведение в гильбертовом пространстве

В сопутствующей системе отсчета введем гильбертово пространство состояний дираковской частицы. Если φ и ψ – два произвольных вектора состояний в гильбертовом пространстве, то их скалярное произведение $\langle \varphi, \psi \rangle$ запишем в том виде, как это обычно делается в квантовой механике, т. е. в виде интеграла по 3-мерному пространству

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\tilde{V}} \bar{\varphi} \psi \cdot \rho d\tilde{V}. \quad (38)$$

Величина $\bar{\varphi} \psi$ представляет собой произведение биспинорной строчки на биспинорный столбец и по своим трансформационным свойствам является обычной скалярной комплексной функцией. Черта над биспинором означает дираковское сопряжение. Величина ρ представляет собой так называемую "весовую" функцию, вид которой сейчас будет установлен.

Примем, что ковариантное выражение для элемента 4-объема $\sqrt{-g} d\Omega$, построенного на четырех малых векторах $dx_0^\alpha, dx_1^\beta, dx_2^\mu, dx_3^\nu$, имеет следующий вид:

$$\sqrt{-g} d\Omega = \tilde{H}_\alpha^0 \tilde{H}_\beta^1 \tilde{H}_\mu^2 \tilde{H}_\nu^3 dx_0^\alpha dx_1^\beta dx_2^\mu dx_3^\nu. \quad (39)$$

По символам, содержащимся между левой и правой квадратными скобками, здесь производится антисимметризация. Элемент 3-объема, по которому необходимо интегрировать в (38), должен быть ортогональным к векторам $\tilde{H}_\alpha^k$, поэтому он должен быть величиной следующего вида:

$$\sqrt{-g} d\Omega_\alpha^0 = \tilde{H}_\alpha^0 \tilde{H}_\beta^1 \tilde{H}_\mu^2 \tilde{H}_\nu^3 dx_1^\beta dx_2^\mu dx_3^\nu. \quad (40)$$

Используем явные выражения для векторов сопутствующего репера. Оказывается, что в главных порядках приближения выражение (40) может быть записано как

$$\rho d\tilde{V} = \sqrt{-g} d\Omega_\alpha^0 = \tilde{H}_\alpha^0 \det(\tilde{H}_m^k) d\tilde{V} = \left[1 - \frac{M}{R} + \frac{1}{2} (\dot{n}_l \dot{n}_l) \right] \left[1 + 3 \frac{M}{R} + \frac{1}{2} (\dot{n}_l \dot{n}_l) \right] d\tilde{V} = \left[1 + 2 \frac{M}{R} + (\dot{n}_l \dot{n}_l) \right] d\tilde{V}. \quad (41)$$

Отсюда получаем выражение для "весовой" функции

$$\rho = \left[1 + 2 \frac{M}{R} + (\dot{n}_l \dot{n}_l) \right]. \quad (42)$$

7. Эрмитовость гамильтониана

Предположим, в пространстве состояний задан некий оператор $\hat{A}$. Если для любых двух векторов состояния φ и ψ выполняется соотношение

$$\langle \varphi, \hat{A} \psi \rangle = \langle \hat{A} \varphi, \psi \rangle, \quad (43)$$

то оператор $\hat{A}$ называется эрмитовым. Свойство эрмитовости будем обозначать как $\hat{A}^+ = \hat{A}$.

Наличие "веса" множителя ρ в выражении (38) не сказывается на свойствах эрмитовости тех частей операторов, которые не содержат операции дифференцирования. В случае, если оператор содержит операцию дифференцирования, выяснение свойств эрмитовости требует специального рассмотрения. Так, в гамильтониан оператор импульса входит в комбинации

$$\left\{ c\gamma_0\gamma_k \hat{p}_k + i\hbar c \frac{MR_k}{R^3} \gamma_0\gamma_k \right\}. \quad (44)$$

Для такой комбинации имеем

$$\left\langle \left(c\gamma_0\gamma_k \hat{p}_k + i\hbar c \frac{MR_k}{R^3} \gamma_0\gamma_k \right) \varphi, \psi \right\rangle = \left\langle \left(c\gamma_0\gamma_k \hat{p}_k \right) \varphi, \psi \right\rangle + \left\langle \left(i\hbar c \frac{MR_k}{R^3} \gamma_0\gamma_k \right) \varphi, \psi \right\rangle.$$

После подстановки явного выражения (15) для оператора $\hat{p}_k$ и интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \left(c\gamma_0\gamma_k \hat{p}_k + i\hbar c \frac{MR_k}{R^3} \gamma_0\gamma_k \right) \varphi, \psi \right\rangle &= i\hbar c \int_V \frac{\partial \varphi^+}{\partial x^k} \gamma_0\gamma_k \psi \rho d\tilde{V} - i\hbar c \int_V \varphi^+ \gamma_0\gamma_k \psi \rho dV = \\ &= -i\hbar c \int_V \varphi^+ \gamma_0\gamma_k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \rho d\tilde{V} - i\hbar c \int_V \varphi^+ \gamma_0\gamma_k \psi \frac{\partial \rho}{\partial x^k} d\tilde{V} - i\hbar c \int_V \varphi^+ \gamma_0\gamma_k \psi \rho dV. \end{aligned}$$

Подставляем сюда выражение (42) для "веса" функции ρ

$$\begin{aligned} \left\langle \left(c\gamma_0\gamma_k \hat{p}_k + i\hbar c \frac{MR_k}{R^3} \gamma_0\gamma_k \right) \varphi, \psi \right\rangle &= \left\langle \varphi, \left(c\gamma_0\gamma_k \hat{p}_k \right) \psi \right\rangle + 2i\hbar c \int_V \varphi^+ \gamma_0\gamma_k \psi \left(\frac{MR_k}{R^3} \right) dV - i\hbar c \int_V \varphi^+ \gamma_0\gamma_k \psi \left(\frac{MR_k}{R^3} \right) dV = \\ &= \left\langle \varphi, \left(c\gamma_0\gamma_k \hat{p}_k + i\hbar c \frac{MR_k}{R^3} \gamma_0\gamma_k \right) \psi \right\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\left(c\gamma_0\gamma_k \hat{p}_k + i\hbar c \frac{MR_k}{R^3} \gamma_0\gamma_k \right)^+ = \left(c\gamma_0\gamma_k \hat{p}_k + i\hbar c \frac{MR_k}{R^3} \gamma_0\gamma_k \right). \quad (45)$$

С учетом этого соотношения приходим к выводу, что гамильтониан (37) является эрмитовым оператором.

Аналогичным образом доказывается, что эрмитовым оператором является и оператор в левой части уравнения (36). То есть доказывается, что

$$\left[i\hbar c \left(\frac{\partial}{\partial x^0} - 2 \frac{M(R_l \dot{\eta}_l)}{R^3} \right) \right]^+ = i\hbar c \left(\frac{\partial}{\partial x^0} - 2 \frac{M(R_l \dot{\eta}_l)}{R^3} \right). \quad (46)$$

Таким образом, в обеих частях уравнения (36) стоят эрмитовы операторы.

8. Обсуждение результатов

В работе в рамках концепции "пробных частиц" рассмотрена динамика дираковских частиц в гравитационном поле, создаваемом массивным вращающимся телом. Степени свободы, описывающие движение, разделены в проведенном рассмотрении на две группы. Те из них, которые определяют траекторию движения частиц, находятся квазиклассическим образом – с помощью уравнения Матиссона – Папаетру (22). Степени свободы, связанные с волновой функцией, находятся как решения уравнения Дирака в сопутствующей системе реперов (24), определяемых по мировой линии частицы и параметрам гравитационного поля.

Все члены, входящие в возникший в нашем рассмотрении гамильтониан (37), имеют непосредственный физический смысл. При этом претерпевают изменение операторы импульса $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^k}$ и энергии $i\hbar \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$. В гравитационном поле аналогами этих операторов становятся операторы

$$-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{MR_k}{R^3} \right), \quad i\hbar c \left(\frac{\partial}{\partial x^0} - 2 \frac{M(R_l \dot{\eta}_l)}{R^3} \right).$$

С учетом определения скалярного произведения в гильбертовом пространстве и возникшей в нашем рассмотрении "веса" функции (42) эти операторы об-

ладают свойством эрмитовости. Нам представляется, что появление в нашем рассмотрении "весовой" функции ρ вида (42) является нетривиальным обстоятельством. Например, использование стационарной системы реперов H_{α}^{μ} , связанной с полем РК, не приводит, как показали наши вычисления, к появлению нужной "весовой" функции.

В работе доказано, что использование сопутствующей системы реперов $\tilde{H}_{\alpha}^{\mu}$ в гравитационном поле РК позволяет записать уравнение Дирака в форме уравнения (36), в котором операторы в левой и правой частях являются эрмитовыми.

При нахождении эволюции спина дираковской частицы с гамильтонианом $\tilde{H}$ (37) войдут зависящие от спина члены двух типов. Один тип будет зависеть от скорости частицы, он описывает геодезическую прецессию спина. Второй тип имеет структуру спин-спиновую, он описывает прецессию Лензе – Тирринга. В результате мы приходим к выводу, что в рассматриваемом приближении поведение спина дираковской частицы аналогично поведению спина классических спиновых частиц.

Из сказанного следует, что для дираковских частиц остаются в силе соображения о характере выполнения принципа эквивалентности в части, касающейся движения спина. Проявляется этот принцип через независимость частот прецессий от величины спина: дираковская частица со спином $\hbar/2$ прецессирует таким же образом, как и классические спиновые частицы. В то же время мировые линии спиновых частиц в поле РК не совпадают ни между собой, ни с геодезическими, и в этом смысле принцип эквивалентности не выполняется.

Легко убедиться в том, что все полученные выше результаты переходят естественным образом в результаты, соответствующие решению Шварцшильда, если положить $J_{mn} = 0$, т. е. положить равным нулю спиновый тензор "большого" тела, порождающего поле гравитации.

Обратим внимание еще на один аспект системы сопутствующих реперов. Имеется в виду нахождение собственного времени частицы $d\tau = -\frac{1}{c}(u_{\nu}dx^{\nu})$ при движении ее по своей мировой линии. Если выбрать конгруэнцию координатных кривых, одна из которых совпадает с мировой линией частицы, то при смещении частицы на dx^{α} вдоль траектории движения величина $d\tau$ может быть найдена, исходя из соотношения $d\tau = \sqrt{-g_{00}} dt$. Интегрируя $d\tau$ вдоль мировой линии, получаем "истинное" время частицы, т. е. то время, которое показывали бы атомные часы, покоящиеся относительно частицы. Такой способ нахождения времени совпадает со способом, применяемым в ОТО при подсчете собственного времени наблюдателя, движущегося произвольным образом (см., например, [14], § 84).

Из сказанного следует, что использование сопутствующей системы реперов означает по существу использование той системы отсчета, в которой справедливы законы квантовой механики, определяющие, в частности, ход атомных часов. Не случайно, что именно в этой системе оказывается возможным записать уравнение Дирака в форме уравнения Шредингера с эрмитовым гамильтонианом.

По нашему мнению, в тех работах, в которых не используется система $\tilde{H}_{\alpha}^{\mu}$, но достигается эрмитовость гамильтониана, в каком-то месте применяется "незаконная" операция. Так, в случае работы [1] такой операцией является преобразование

$$\psi \rightarrow \psi' = W^{3/2} \psi, \quad \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}' = W^{3/2} \tilde{H} W^{-3/2},$$

которое не унитарно.

В работе мы не касались вопроса об интерпретации полученных результатов в представлении Фолди – Ваутхайзена. Техника этого представления в настоящее время достаточно развита (см., например, [2, 15]). По-видимому, изложенная здесь динамика дираковской частицы в гравитационном поле РК может быть естественным образом рассмотрена в указанном представлении.

Благодарности

Один из авторов (МГ) выражает глубокую признательность В. П. Незнамову за ряд полезных обсуждений вопросов, рассмотренных в данной работе.

Список литературы

1. Obukhov Yu. N. Spin, gravity, and inertia. ArXiv: gr-qc/0012102.
2. Silenko A. J., Teryaev O. V. Semiclassical limit for Dirac particles interacting with a gravitational field // Phys. Rev. 2005. D71. 064016.
3. Arminjon Mayeul. Post-Newtonian equation for the energy levels of a Dirac particle in a static metric // Phys. Rev. 2006. D74. 065017.
4. Померанский А. А., Сеньков Р. А., Хриплович И. Б. Релятивистские частицы с внутренним моментом во внешних полях // УФН. 2000. Vol. 170, № 10. С. 1129.
5. Khriplovich I. B. Spinning Relativistic Particles in External Fields. E-print. arXiv: 0801.1881v1 [gr-qc].
6. Silenko A. J. Classical and quantum spins in curved spacetimes. E-print. arXiv: 0802.4443v1 [gr-qc].
7. Weinberg S. Gravitation and Cosmology. John Wiley & Sons. Hoboken, 1972. [Вейнберг С. Гравитация и космология. Изд. Платон, 2000].
8. Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. Gravitation. W. H. Freeman, San Francisco, 1973. [Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М.: Мир, 1977].

9. Lightman A. P., Press W. H., Price R. H., Teukolsky S. A. Problem book in relativity and gravitation. Princeton Univ. Press, 1975. [Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. М.: Мир, 1979].

10. Final Report on the experiment Gravity Probe B. // www.einstein.stanford.edu.

11. Горбатенко М. В., Горбатенко Т. М. Можно ли решение Керра найти методом Эйнштейна – Инфельда-Гоффмана? // ТМФ. 2004. Том 140, №1. С. 160. [Theor. and Math. Phys. July 2004. Vol. 140, Issue 1. P. 1028].

12. Mathisson M. // Acta Phys. Pol. 1937. Vol. 6. P. 163.

13. Papapetrou A. // Proc. Roy. Soc. Lond. 1951. Vol. A209. P. 248.

14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988.

15. Незнамов В. П. К теории взаимодействующих полей в представлении Фолди – Ваутхайзена // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2006. Т. 37. Вып. 1. С. 152.

Статья поступила в редакцию 03.09.2008.