

ВИХРЕВАЯ ПОДСЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

В. Г. Морозов, Б. М. Жогов, С. А. Савельев, В. Б. Титова

ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Предлагается новая модель для двумерных расчетов перемешивания. Рассматривается перемешивание тяжелых струй, проникающих в легкую среду. Первичные струи рассчитываются прямым численным моделированием. Выводятся двумерные уравнения перемешивания струй в предположении, что оно происходит за счет возникающих поперечных вихрей (ось вращения которых перпендикулярна плоскости течения). Модель внедрена в двумерный газодинамический комплекс "Медуза". В статье приведены результаты тестового расчета модельного опыта Е. Е. Мешкова по обтеканию воздухом "тяжелого" угла.

Введение

Многолетние исследования показали, что в развитии турбулентности определяющую роль играют начальные возмущения, развивающиеся в условиях газодинамической неустойчивости. Они определяют анизотропный характер вихревого течения. Последние достижения в технике и методах многомерных газодинамических расчетов создали реальную возможность прямого численного моделирования развития первичных возмущений в наших прикладных расчетах. Результаты этих расчетов показали, что даже небольшие возмущения в начальных условиях или на границах могут существенно влиять на характерную картину сжатия, особенно при сферической кумуляции. На границе области возникают струи, которые при схождении к центру приводят к интенсивному перемешиванию веществ соседних слоев.

Если процесс рождения и схождения струй доступен прямому численному моделированию, то для расчета дальнейшего их размытия и перемешивания ресурсов современных ЭВМ недостаточно. Здесь необходимо введение эффективных и физически обоснованных моделей. В качестве такой модели предлагается вихревая модель турбулентности. Идея близка к идее метода "больших вихрей".

1. Основные положения модели

Анализ экспериментальных и расчетных данных показывает, что зарождение и развитие турбулентности на первой сильно анизотропной стадии происходит в следующем порядке:

- 1) рост начальных возмущений, развитие струй;
- 2) рождение ими поперечных вихрей вследствие тангенциальной неустойчивости на границах струй;
- 3) потеря устойчивости поперечных вихрей и распад их на продольные вихри.

В зависимости от конкретных условий может преобладать тот или иной этап.

В интересном для нас случае сильно выражен первый этап – рождение и распространение струй.

Второй существенный этап начинается, когда среда, в которой распространяются струи, становится достаточно плотной, чтобы тормозить и размывать струи через образование поперечных вихрей на их поверхности за счет сдвиговой неустойчивости.

Третий этап – трансформация поперечных вихрей в продольные вихревые нити (так называемая развитая турбулентность) – слабо выражен, так как перемещения вещества здесь малы (происходит остановка границ). Поэтому основное вихревое "перемешивание" происходит на втором этапе. Это позволяет сделать разумное предположение, сильно упрощающее построение модели: при расчете вихревого течения рассматриваем только поперечные вихри.

2. Уравнение газодинамики поперечных вихрей

Цель работы – построить уравнения кинетики вихрей для среды, примыкающей к границам веществ, т. е. уравнения для рождения и распространения вихрей и на их основе вывод уравнений перемешивания струй со средой. Уравнения надо строить в виде, удобном для перехода к разностному счету, т. е. с разделением ве-

щества на ячейки и составлением уравнений для каждой ячейки и уравнения для их связи. Согласно сделанному предположению, продольный перенос массы в основном осуществляется проникающей струей, а поперечный перенос – вихрями. Здесь мы приведем вывод уравнений для поперечных вихрей в общей векторной форме. Уравнения газодинамики удобно записать в эйлеровых координатах, выделив явно поперечную составляющую ускорения

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \nabla \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \frac{V^2}{2} - [\vec{V} \times \vec{\omega}] = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1)$$

где $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{V}$.

Член в левой части уравнения $\vec{a}_d = -[\vec{V} \times \vec{\omega}]$ представляет поперечное ускорение. Оно перпендикулярно \vec{V} . В случае двумерного течения $\vec{\omega} \perp \vec{V}$ и $[\vec{V} \times \vec{\omega}]$ лежит в плоскости течения.

Применяя оператор rot к обеим частям уравнения (1), получаем уравнение для $\vec{\omega}$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \text{rot } \vec{a}_d + \text{rot} \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right). \quad (2)$$

Оба члена в правой части имеют простой физический смысл: $\text{rot } \vec{a}_d = \text{rot} [\vec{V} \times \vec{\omega}]$ это изменение ω в данной точке за счет переноса, $\text{rot} \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right)$ – это источник ω за счет завихрения среднего потока вследствие бароклинного поля ускорений.

Последний член можно еще представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) &= \text{rot} \left(\nabla \left(-\frac{1}{\rho} p \right) \right) + \text{rot} \left(p \nabla \frac{1}{\rho} \right) = \\ &= \text{rot} \left(p \nabla \frac{1}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В случае смеси веществ

$$\frac{1}{\rho} = \sum \frac{c_i}{\rho_i},$$

где ρ_i – парциальная плотность каждой компоненты смеси, c_i – относительная массовая концентрация компоненты.

Теперь

$$\text{rot} \left(p \nabla \frac{1}{\rho} \right) = \text{rot} \left(p \sum \frac{\nabla c_i}{\rho_i} \right) + \text{rot} \left(p \sum \left(c_i \nabla \frac{1}{\rho_i} \right) \right). \quad (4)$$

Для изоэнтропического течения

$$\text{rot} \left(p \sum \left(c_i \nabla \frac{1}{\rho_i} \right) \right) = \sum \text{rot} (c_i \nabla w_i) = \sum [\nabla c_i \times \nabla w_i]. \quad (5)$$

До сих пор выкладки состояли из тождественных преобразований. Здесь мы сделаем допущение, что членом $\sum \text{rot} (c_i \nabla w_i)$ можно пренебречь. Это означает, что вклад в образование вихрей дают в основном пере-

пады плотности на границе веществ с тангенциальным разрывом скоростей, как в несжимаемой жидкости.

В общем случае

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \text{rot } \vec{a}_d + \text{rot} \left(\sum p \nabla \frac{c_i}{\rho_i} \right). \quad (6)$$

3. Вывод уравнений для скорости дрейфа

Уравнение Эйлера и уравнение для завихренности, которое получается из него, следующие:

– уравнение Эйлера в лагранжевых координатах

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p; \quad (7)$$

– уравнение Эйлера в эйлеровых координатах

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\nabla V^2}{2} - [\vec{V} \times \vec{\omega}] = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (\vec{\omega} = \text{rot } \vec{V}); \quad (8)$$

– уравнение для завихренности $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{V}$ в лагранжевых координатах

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\vec{\omega}}{\rho} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{\omega}}{\rho} + \vec{V} \nabla \frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \text{rot} \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{\rho} \text{rot} \left(p \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \nabla c \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Далее будем обозначать $-\frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{A}$.

Здесь рассматривается смесь из двух веществ с массовыми концентрациями c и $1-c$. При этом выполняется $\frac{1}{\rho} = \frac{c}{\rho_1} + \frac{1-c}{\rho_2}$, ρ_1 и ρ_2 – плотности веществ при давлении p ;

– уравнение для завихренности в эйлеровых координатах

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \text{rot} [\vec{V} \times \vec{\omega}] = \text{rot} \left(p \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \nabla c \right) = \text{rot } \vec{A}. \quad (10)$$

Проанализируем уравнение (9). Оператор в левой части имеет смысл переноса величины $\frac{\vec{\omega}}{\rho}$ вместе с фиксированной лагранжевой координатой. При $\text{rot } \vec{A} = 0$ он равен 0. Это есть дифференциальное выражение закона сохранения циркуляции – завихренность сохраняется и переносится вместе с массой, в которую она "вморожена". То есть если происходит перемешивание веществ, то каждая компонента переносит свою завихренность. Таким образом, турбулентное перемешивание гетерогенно и происходит путем дробления каждой компоненты и перемешивания их между собой. Это положение известно. Мы его приводим здесь для облегчения дальнейших построений.

Можно сказать и обратное, что уравнение для перемешивания аналогично уравнению для переноса за-

вихренности $\frac{\bar{\omega}}{\rho}$. Появление $\text{rot } \bar{A}$ в правой части озна-

чает, что, с одной стороны, появляется источник завихренности, а с другой – возникает перенос ее относительно массы, завихренность уже не "вморожена" в среду, а происходит ее диффузия. Этот поток вихрей порождает потоки каждой компоненты, которые и дают перемешивание. Для численного определения переноса

$\frac{\bar{\omega}}{\rho}$ и перемешивания необходимо решать совместно

уравнения (7) или (8) и уравнение (9) или (10). В уравнении (8) в левой части явно выражена потенциальная и вихревая часть ускорения. Потенциальное ускорение изменяет модуль скорости, вихревая часть поворачивает вектор скорости, не меняя его величины, т. е. не изменяя энергии. Нас интересует вихревая часть, содержащая $\bar{\omega}$, так как она создает дрейфовый перенос.

Из уравнения (9) следует, что дрейфовая скорость возникает при наличии $\text{rot}\left(-\frac{1}{\rho}\nabla p\right) =$

$$= \text{rot}\left(p\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\nabla c\right), \text{ т. е. градиента } \frac{1}{\rho} \text{ или градиента}$$

концентраций разноплотных компонентов.

Построим феноменологическую систему уравнений для нахождения скорости дрейфа.

Так как $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \text{rot } \bar{A}$, из соображений размерности

$$\bar{\omega} = \int \text{rot } \bar{A} \cdot dt \sim \frac{\overline{\text{rot } \bar{A}}}{\omega}, \text{ где } \overline{\text{rot } \bar{A}} \text{ – среднее значение ро-}$$

тора ускорения за период вращения вихря. Будем считать его равным среднему значению в квазистационарном приближении. Это разумно, так как мелкомасштабное перемешивание осуществляется мелкомасштабными вихрями.

Из уравнения (8) среднее ускорение вихря равно

$$\overline{A_{\text{др}}} = -\bar{V} \times \bar{\omega} = -\frac{\bar{V} \times \text{rot}\left(p\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\nabla c\right)}{\omega}. \quad (11)$$

Средняя скорость дрейфа в квазистационарном приближении есть

$$\int \bar{A}_{\text{др}} dt = \frac{\bar{A}_{\text{др}}}{\omega} = -\frac{\bar{V} \times \text{rot } \bar{A}}{\omega^2} \quad (12)$$

или в векторном виде

$$\bar{U}_{\text{др}} = -\frac{\bar{V} \times \text{rot}\left(p\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)\nabla c\right)}{\omega^2}. \quad (13)$$

Выражение для скорости дрейфа можно получить более наглядным способом. Осцилляция скорости представляется как результат вращения переменной ее

части. Средняя по периоду вращения поперечная составляющая скорости есть

$$V_{\text{др}} = \frac{1}{T} \int_0^T U \sin(\varphi) dt,$$

$$\text{где } \varphi = \omega_0 t + \frac{\dot{\omega}_0 t^2}{2}, \quad \dot{\omega} = \text{rot } A.$$

Перейдем к переменной φ

$$V_{\text{др}} \sim \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{2\dot{\omega}_0}{\omega_0^2} \varphi}}$$

или в векторном виде

$$\bar{V}_{\text{др}} \approx \alpha \frac{V \times \left[\nabla p \times \nabla \frac{1}{\rho} \right]}{1 + 4 \left(\frac{2\dot{\omega}}{\omega^2} \right)^2} \frac{1}{\omega^2}.$$

Конечно, в формулу для скорости дрейфа входит коэффициент α (один для модели), который находится из тестовых расчетов.

4. Уравнения для потока массы и потока концентраций

Преобразуем полученные выражения для найденной скорости дрейфа

$$\bar{U}_{\text{др}} = -\frac{\bar{V} \times \text{rot}\left(p \sum \frac{1}{\rho_i} \nabla c_i\right)}{\omega^2}.$$

Отсюда находим плотность потока массы

$$\bar{J} = \bar{U}_{\text{др}} \rho = \sum \bar{J}_i, \text{ где } \bar{J}_i = -\frac{\bar{V} \times \text{rot}\left(p \frac{1}{\rho_i} \nabla c_i\right)}{\omega^2} \rho. \quad (14)$$

То есть полный поток массы равен сумме потоков масс компонент. Отсюда получаем уравнение для плотности потока переноса массовых концентраций

$$\bar{j}_i = \frac{\bar{J}_i}{\rho} = -\frac{\bar{V} \times \text{rot}\left(p \frac{1}{\rho_i} \nabla c_i\right)}{\omega^2} = -\frac{\bar{V} \times \left(\nabla \frac{p}{\rho_i} \times \nabla c_i \right)}{\omega^2}. \quad (15)$$

(J_i имеет размерность скорости).

То есть поток i -й компоненты пропорционален градиенту соответствующей концентрации.

Скорость дрейфа является частью полной скорости \bar{V} , поэтому уравнения, куда входит полная скорость, сохраняются. Меняются только уравнения, куда явно входит скорость дрейфа.

5. Общая система уравнений

5.1. Уравнение переноса массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0 \quad \text{– в эйлеровых координатах; (16)}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \text{– в лагранжевых координатах; (17)}$$

$$\left(\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \rho \right).$$

5.2. Уравнение переноса концентрации (уравнение перемешивания)

Введенная скорость дрейфа каждой компоненты

$$\vec{U}_{\text{др}i} = \frac{\vec{j}_i}{\rho}$$

складывается с полной скоростью за вычетом полной скорости дрейфа $\vec{U}_{\text{др}}$, так что полный поток

i -й компоненты есть

$$\rho(c_i \vec{V} + \vec{j}_i - c_i \vec{U}_{\text{др}}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \rho c_i}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho(c_i \vec{V} + \vec{j}_i - c_i \vec{U}_{\text{др}}) \right) = 0 \quad \text{– в эйлеровых координатах; (18)}$$

$$\rho \frac{dc_i}{dt} + \operatorname{div} \left(\rho(\vec{j}_i - c_i \vec{U}_{\text{др}}) \right) = 0 \quad \text{– в лагранжевых координатах; (19)}$$

$$\text{где } \frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial c_i}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) c_i; \quad \vec{j}_i = - \frac{\vec{V} \times \left[\nabla \frac{p}{\rho_i} \times \nabla c_i \right]}{\omega^2}.$$

5.3. Выражение для тензора плотности потока вектора ρU (импульса дрейфа). Уравнение Эйлера

В главе 1 определили скорость дрейфа в виде

$$U_{\text{др}x} = -V_y \frac{\operatorname{rot}_z \vec{A}}{\omega^2};$$

$$U_{\text{др}y} = V_x \frac{\operatorname{rot}_z \vec{A}}{\omega^2}.$$

Тогда компоненты тензора такие:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_{xx} & \Pi_{xy} \\ \Pi_{yx} & \Pi_{yy} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} U_{\text{др}x} V_x & U_{\text{др}x} V_y \\ U_{\text{др}y} V_x & U_{\text{др}y} V_y \end{pmatrix}. \quad (19)$$

$$\Pi_{yx}^{\text{др}} = \rho U_{\text{др}y} V_x = \rho V_x^2 \frac{\operatorname{rot}_z \vec{A}}{\omega^2};$$

$$\Pi_{xy}^{\text{др}} = \rho U_{\text{др}x} V_y = -\rho V_y^2 \frac{\operatorname{rot}_z \vec{A}}{\omega^2};$$

$$\Pi_{xx}^{\text{др}} = \rho U_{\text{др}x} V_x = -\rho V_y V_x \frac{\operatorname{rot}_z \vec{A}}{\omega^2};$$

$$\Pi_{yy}^{\text{др}} = \rho U_{\text{др}y} V_y = \rho V_y V_x \frac{\operatorname{rot}_z \vec{A}}{\omega^2}.$$

В уравнение Эйлера в правой части добавится член, содержащий $\Pi^{\text{др}}$, т. е.

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \vec{V} \nabla V_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho V_y^2 \frac{\operatorname{rot}_z \vec{A}}{\omega^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho V_x V_y \frac{\operatorname{rot}_z \vec{A}}{\omega^2} \right); \quad (20)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + \vec{V} \nabla V_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho V_x^2 \frac{\operatorname{rot}_z \vec{A}}{\omega^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho V_x V_y \frac{\operatorname{rot}_z \vec{A}}{\omega^2} \right). \quad (21)$$

Таким образом, наличие дрейфа приводит к возникновению девиаторных членов в тензоре потока импульса и сил "трения" при сдвиговом течении, подобных вязким силам. Подчеркнем, что этот эффект есть следствие неоднородности $\vec{\omega}$ в пространстве (наличие $\operatorname{rot} \vec{A}$), а не просто наличия $\vec{\omega}$. Например, при течении с постоянным сдвигом $V_y \sim \omega x$ существует

$\omega = \frac{\partial V_y}{\partial x} = \text{const}$, но вихревая вязкость отсутствует.

При $\omega = \text{const}$ вихревое ускорение $-\left[\vec{V} \times \vec{\omega} \right]$ направлено перпендикулярно \vec{V} и не меняет кинетической энергии вихревого течения, но при появлении скорости дрейфа возникающее вихревое "трение" перекачивает энергию в кинетическую вихревую энергию дрейфа

$E_{\text{др}} = \frac{U_{\text{др}}^2}{2} = \frac{1}{2} V^2 \left(\frac{\operatorname{rot} \vec{A}}{\omega^2} \right)^2$. В квазистационарном приближении энергия дрейфа в результате вязкой диссипации переходит в тепловую с такой же интенсивностью.

5.4. Уравнение сохранения энергии

Уравнение для внутренней энергии

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \varepsilon = -\frac{p}{\rho} \operatorname{div} (\vec{V} - \vec{U}_{\text{др}}) - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left(\rho(\vec{V}_\varepsilon - \varepsilon \vec{U}_{\text{др}}) \right) - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{J}_{\text{тепл}} + Q_{\text{дис}}. \quad (22)$$

Смысл отдельных членов в правой части:

$-p \operatorname{div} (\vec{V} - \vec{U}_{\text{др}})$ – работа сил давления. В нее включается изменение плотности за счет сжатия или разряжения вещества за вычетом изменения ρ за счет перемешивания;

$-\operatorname{div} \left(\rho(\vec{V}_\varepsilon - \varepsilon \vec{U}_{\text{др}}) \right)$ – перенос энергии каждой компоненты за вычетом потока вследствие переноса ε вместе с потоком массы. Выражение аналогичное диффузии концентраций. $\vec{V}_\varepsilon = \sum \vec{j}_i \cdot \varepsilon_i$, $\varepsilon = \sum c_i \cdot \varepsilon_i$, где ε_i – внутренняя энергия i -й компоненты. Вывод этого выражения следующий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left[\sum_i c_i \varepsilon_i \right] + \operatorname{div} \sum_i \rho (c_i (\vec{V} - \vec{U}) + \vec{j}_i) \varepsilon_i = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\varepsilon \rho \vec{V}) + \\ + \operatorname{div} \sum_i \rho (\varepsilon_i \vec{j}_i - \vec{U} \varepsilon) = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \nabla \right) \varepsilon + \operatorname{div} \rho (\vec{V} \varepsilon - \vec{U} \varepsilon). \end{aligned} \quad (23)$$

Вихревая энергия дрейфа передается каскадно мелкомасштабным вихрям и там диссипируется вследствие вязкости во внутреннюю энергию вещества. Интенсивность диссипации в квазистационарном приближении равна

$$Q_{\text{дис}} = \left| \frac{dE_{\text{др}}}{dt} \right| = \left| V \nabla E_{\text{др}} \right| = \left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \Pi_{ik} \right|,$$

$\vec{J}_{\text{тепл}}$ – тепловой поток.

В рамках подсеточной модели легко получить оценки времени выравнивания температуры и концентраций внутри смешанных ячеек. Естественно предположить, что внутри ячейки устанавливается асимптотический спектр вихрей и верен закон подобия Колмогорова – Обухова. Используя его, а также автомодельность дробления частиц $\frac{dR}{dt} = -R\omega$, можно получить

$$\tau_{\text{темпер}} = \frac{1}{\omega} \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{\chi}{\omega \cdot R_0^2} \right)^2 \right) \approx \frac{3}{2} \frac{1}{\omega} - \text{время вы-}$$

равнивания температуры компонентов;

$$\tau_{\text{гомог}} = \frac{3}{2\omega} \left(1 + 2/3 \frac{\chi}{D} \left(\frac{\chi}{\omega R_0^2} \right)^{0,5} \right) - \text{время вырав-}$$

нивания температуры и концентраций.

Здесь χ – коэффициент температуропроводности; D – коэффициент молекулярной диффузии; R_0 – размер счетной ячейки.

6. Результаты расчетов

Полученная система уравнений была внедрена в счетный газодинамический комплекс "Медуза" [1]. При этом внутри "смешанных" ячеек, содержащих два вещества, составляются уравнения перемешивания ("подсеточная" модель) по схеме

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} = -\frac{M_1}{\tau}; \quad \frac{dM_2}{dt} = -\frac{M_2}{\tau}; \\ \frac{dM_{1+2}}{dt} = \frac{M_1 + M_2}{\tau} \frac{1}{\tau} = \frac{V_{\text{др}} S}{V}, \end{aligned}$$

где V – объем ячейки; M_1 – масса чистого вещества "1" в ячейке; M_2 – масса чистого вещества "2" в ячейке; M_{1+2} – масса вещества "смесь"; S – эффективное сечение ячейки в направлении, перпендикулярном скорости дрейфа $V_{\text{др}}$; $V_{\text{др}} = \frac{\operatorname{rot} A}{\omega} \times V$.

Ниже приведены результаты тестовых расчетов опыта Е. Е. Мешкова с сотрудниками [2]. Эксперименты проводились на ударной трубе. Схема постановки опытов представлена на рис. 1. Область 1 – канал ударной трубы – заполнена воздухом ($\rho = 1,205 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $\gamma = 1,4$), область 2 заполнена газом фреон-12 ($\rho = 5,13 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $\gamma = 1,139$). Начальное давление в области 1 и 2 равно 1 атм. На правой границе области задано постоянное давление 2,26 атм. Размеры области 1 равны 49×12 см, области 2 – 9×6 см. В области 2 задана равномерная сетка 288×192 , в области 1 над фреоном – равномерная сетка 200×96 , в остальной части области 1 – сетка 240×192 .

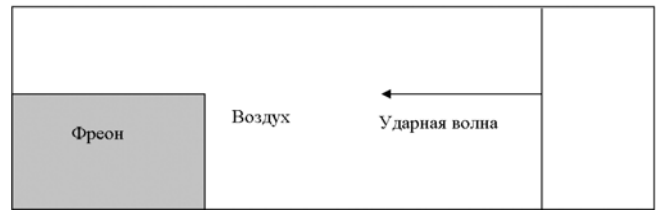


Рис. 1. Схема постановки эксперимента

В опыте исследуется обтекание "тяжелого" угла – течение двух разноплотных газов с перемешиванием. Экспериментальные и расчетные результаты (распределение плотности) приведены на рис. 2.

Как видно, контуры перемешанных областей в опыте и в расчетах с учетом перемешивания близки.

Заключение

Так как модель феноменологическая, она будет развиваться и уточняться в процессе тестирования по результатам опытов.

Список литературы

1. Волков С. Г., Жогов Б. М., Софронов И. Д. Современное состояние методики "Медуза" // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 57–63.
2. Жогов Б. М., Клопов Б. А., Мешков Е. Е., Пастернак В. М., Толшмяков А. И. Численный расчет и сравнение с экспериментом задачи о прохождении плоской ударной волны через "тяжелый" угол // Там же. 1992. Вып. 3. С. 59–65.

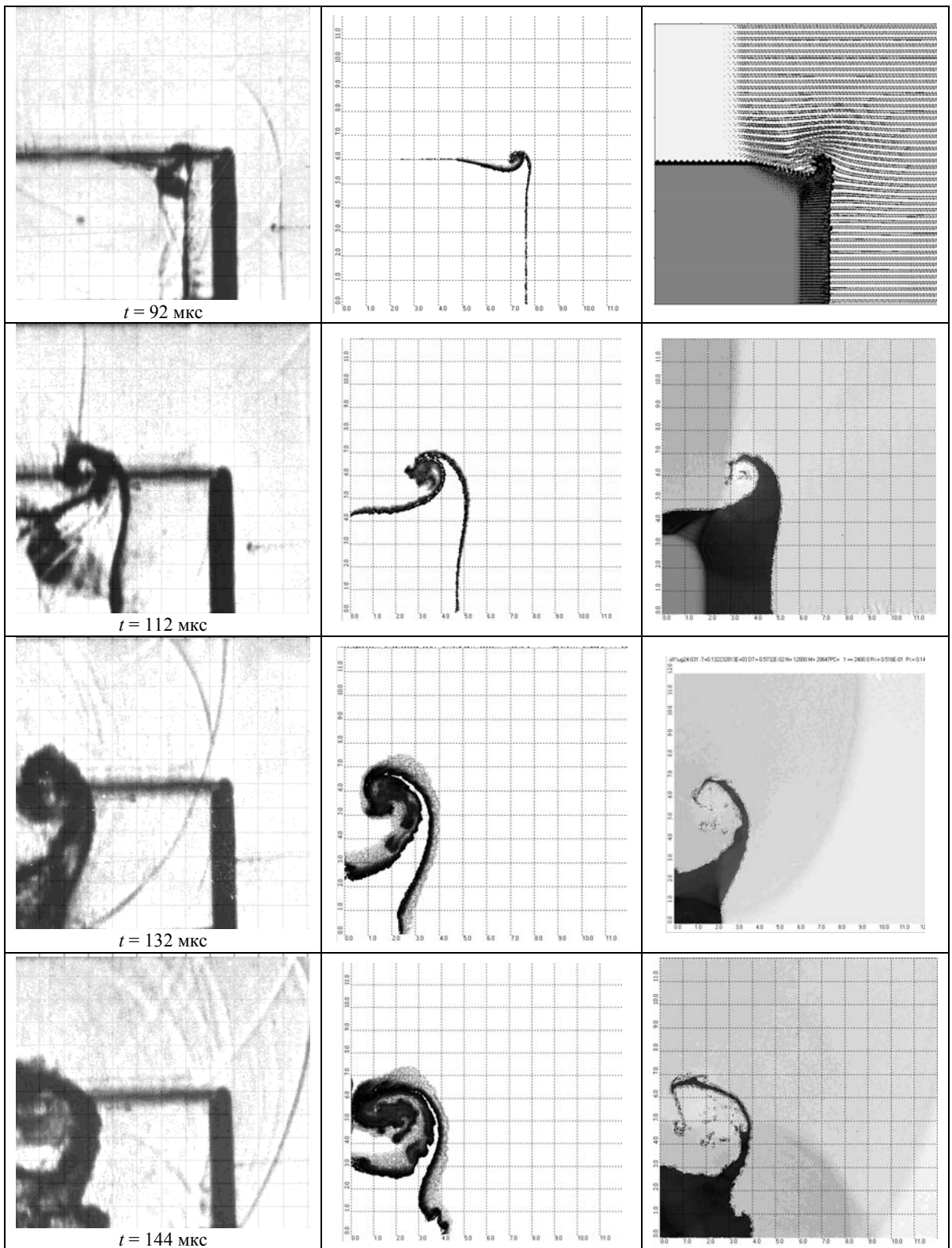


Рис. 2. Слева экспериментальные данные, в центре результаты расчета по "Медузе" с моделью турбулентности (поле концентраций фреона в смеси), справа поле плотности в расчете без турбулентности

Статья поступила в редакцию 03.09.2008.